

# 一种液晶相控阵中基于迭代的相位恢复算法

卓静一<sup>1</sup> 孔令讲<sup>1</sup> 周建华<sup>1</sup> 刘鑫<sup>2</sup> 张晓光<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 电子科技大学电子工程学院, 四川 成都 611731  
<sup>2</sup> 光电信息控制和安全技术重点实验室, 河北 三河 065201)

**摘要** 在液晶相控阵中,由于电压量化、边缘效应、液晶器件制造工艺等因素的影响,导致实际的波前相位面与理想的波阵面存在误差。因此,在应用中要依据实际出射相位与理想出射相位的偏差,反复地修正加载电压,对入射激光波前进行相位调制,以此来满足视场域内波束扫描的需要,这也是液晶相控阵波束控制技术研究的 key 问题。为解决上述问题,提出了一种波前相位恢复算法。该算法利用三个输出面的幅度信息迭代计算出波前相位分布,相比只用两个输出面幅度信息的相位恢复算法,该算法具有较高的精确度。同时,该算法利用角谱理论处理输出面的光场传播过程,使得所得到的恢复结果更加精确。仿真实验进一步表明,这种算法在精确度、效率上同时具有优势。

**关键词** 光计算;液晶相控阵;相位恢复;迭代算法;角谱法;衍射

**中图分类号** TN958.98 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.0505001

## An Iteration-Based Phase Retrieval Algorithm in Liquid-Crystal Phased Array

Zhuo Jingyi<sup>1</sup> Kong Lingjiang<sup>1</sup> Zhou Jianhua<sup>1</sup> Liu Xin<sup>2</sup> Zhang Xiaoguang<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731, China

<sup>2</sup> Science and Technology on Electro-Optical Information Security Control Laboratory, Sanhe, Hebei 065201, China

**Abstract** In liquid-crystal phased array, the actual wavefront may deviate from the ideal wavefront, since the actual performance depends significantly on voltage quantization, phase sag, fringing effect, the manufacturing process of liquid crystal device, and so on. Thus, to meet the requirement of beam scanning in the view field, the voltage is constantly adjusted according to deviation between the actual wavefront phase and the ideal, such that the actual phase can approximate to the ideal phase as much as possible. This has been one of the key problems in liquid crystal phased array. For retrieving the phase in liquid crystal phased array, a novel output-plane-based phase retrieval algorithm with wavefront iteration is presented. Specifically, the wavefront phase distribution is retrieved by using the knowledge of intensity measurements in three output-planes. Compared with the algorithms depended on the two output planes, our algorithm can achieve high precision. Moreover, the algorithm exploits angular spectrum transfer function, thus the results are more reliable. The theoretical analysis and simulation experiments indicate that this algorithm enjoys advantages in terms of precision and efficiency simultaneously.

**Key words** optics in computing; liquid crystal phased array; phase retrieval; iterative algorithm; angular spectrum method; diffraction

**OCIS codes** 050.1950, 230.1950, 230.3720

## 1 引言

激光雷达结合了雷达技术和激光技术的优势,

具有高分辨率、精准、快速、灵敏等一系列独特的特点<sup>[1-2]</sup>,在军事和民用领域均得到了广泛的关注。

**收稿日期**: 2013-09-18; **收到修改稿日期**: 2013-12-11

**基金项目**: 国家自然科学基金(61178068)、国家基础科研计划资助(B1120110006)

**作者简介**: 卓静一(1988—),女,硕士研究生,主要从事液晶相控阵调制方面的研究。E-mail: jingyi.zhuo@gmail.com

**导师简介**: 孔令讲(1974—),男,博士生导师,主要从事雷达信号处理及新体制雷达的研究方面的研究。

E-mail: lingjiang.kong@gmail.com

液晶相控阵是实现雷达波束控制的主流技术,可以实现高速稳定的驱动波束指向。同时,以液晶相控阵为代表的非机械式波束控制技术也已成为波束控制领域的研究热点<sup>[3-6]</sup>。

液晶相控阵对激光进行偏转控制的过程实质上是对激光波前进行相位调制过程,在实际中,波前相位容易受到各种外界因素的干扰和液晶相控阵自身结构的约束,如电压量化、边缘效应、电极占空比、液晶制造工艺等,这就导致实际的出射面相位通常会偏离理想的出射相位,进而影响到液晶波束指向的效率和精度<sup>[7]</sup>。

目前,提高液晶波束指向效率和精度的方法主要有四类:1)通过提高液晶的加工工艺,如提高占空比,提高液晶盒的平整性,可以减少制造工艺造成的影响,但是受限于当前的工艺水平;2)采用波前传感器测量法,如剪切干涉仪和哈特曼-夏克传感器<sup>[8]</sup>等。但当波阵面范围较大、相位变化较快时,剪切干涉仪和哈特曼-夏克传感器便不能得到有效测量值<sup>[9]</sup>,此时波前传感器测量法失效;3)闭环搜索法,以波束效率和精度为目标函数有方向性的调整电压代码来控制波阵面的形状,如模式搜索法、resonbrock法等<sup>[10]</sup>。但是此类算法在效率和精度上彼此制约,即不能同时提高波束效率和精度;4)利用光学系统输入和输出面的光强分布反复迭代求解波前相位分布的方法<sup>[11]</sup>,此类方法弥补了各种影响因素的不足,可以同时提高算法精度和效率。传统的相位恢复算法一般选取输入平面进行相位恢复,而在液晶相控阵中,液晶出射面的振幅分布往往无法直接测量,且入射光瞳的形状都只能粗略加以估计,此时输入面上可用的信息很少,增加了相位恢复的难度。本文在传统相位恢复方法的基础上,针对液晶相控阵特定结构,提出了一种不依赖输入面信息的相位恢复算法。仿真实验表明该算法具有很好的收敛性,能以较少的迭代次数得到较好的恢复效果。

## 2 液晶相控阵光学传播模型

激光通过液晶相控阵的传播过程符合光波场的衍射规律<sup>[12]</sup>,如图1所示, $p_0$ 为光入射的方向,位于 $(x_0, y_0, 0)$ 平面的 $S_0$ 表示输入平面,其复振幅分布为 $A(x_0, y_0)$ 是需要求解的,而输出面 $S_1$ 与输入面 $S_0$ 平行,相距 $z_1$ ,取 $S_1$ 面坐标为 $(x_1, y_1, z_1)$ ,输出面 $S_1$ 上的复振幅分布 $U(x_1, y_1)$ 可以通过测量获得。

先对输入面复振幅 $A(x_0, y_0)$ 做傅里叶变换,将其分解成各个沿不同方向传播的简谐平面波,因

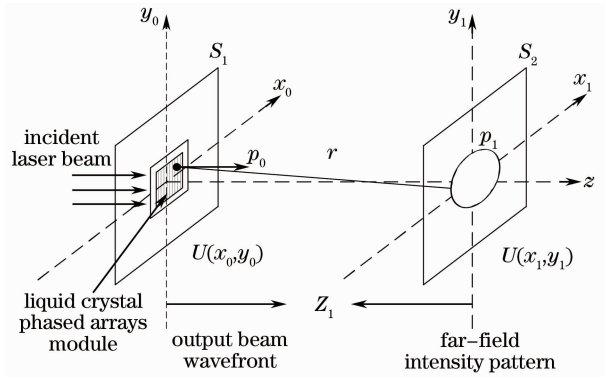


图1 液晶相控阵光学传播模型

Fig. 1 Model of liquid crystal phased array optical propagation

此输入面复振幅 $A(x_0, y_0)$ 的空间频谱 $a(f_x, f_y)$ 正是空间频率为 $(f_x, f_y)$ 的平面波成分的复振幅密度。然后根据 $S_0$ 平面的频谱 $a(f_x, f_y)$ 求出在距离 $z_1$ 处 $S_1$ 平面处的频谱分布 $u(f_x, f_y)$ 。最后通过对 $u(f_x, f_y)$ 做逆傅里叶变换,也就是将传播到 $S_1$ 平面上的所有平面波相叠加,综合出 $S_1$ 平面上衍射图形的复振幅分布 $U(x_1, y_1)$ 。

## 3 液晶相控阵中基于迭代的相位恢复算法

### 3.1 算法原理

如图2所示,假设 $S_1, S_2, S_3$ 代表远场三个输出平面,图中实线箭头仅表示一次传播,虚线箭头表示循环传播,图2为图1横切剖面图。

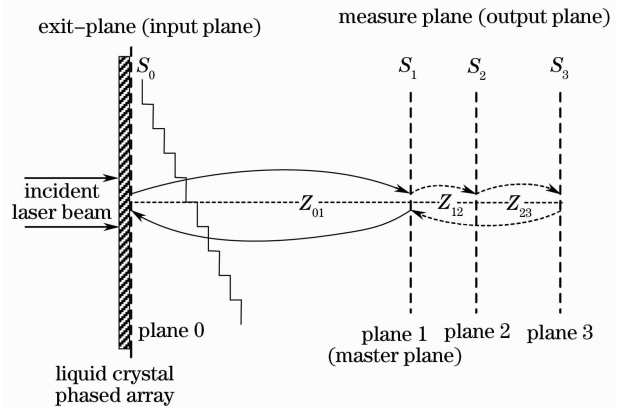


图2 算法在输入面和输出面的迭代示意图

Fig. 2 Example of propagations taking place between input plane and output plane

在未知输入面幅度信息的情况下,该算法选择三个位于远场的测量平面(输出面) $S_1, S_2, S_3$ ,通过测量它们的光强信息来迭代地恢复波前相位。下面从算法初始化、光场传播过程、目标函数设定三个方

面来介绍算法的原理。

选择离输入面  $S_0$  最近的输出面  $S_1$  作为主平面,并对每个输出面的初始相位信息进行估计,得到初始相位  $\theta_m(x_m)$ ,  $1 \leq m \leq 3$ 。要获取高精度的波束指向,需按照理想的波前相位  $\alpha = \frac{2\pi d \cdot \sin \theta}{\lambda}$  来设置初始相位面,与实际的出射波阵面比较接近。因此所提算法以理想情况下波阵面的相位分布作为初始相位分布,并假设幅度分布为常数 1,这样可以减小迭代次数,避免算法停滞。

在所提算法中,把每个输出面的测量幅度当作其输出面的幅度,即

$$|F_m| = \sqrt{I_m}, \quad (1)$$

式中  $I_m$  是第  $m$  个测量面的测量光强,  $F_m$  是第  $m$  个输出面复杂光场的幅度值。结合初始相位分布和输出面幅度值就可以得到输出面  $S_m$  的光强分布  $G_m(x_m)$ , 即

$$G_m(x_m) = |F_m(x_m)| \exp[i\theta_m(x_m)]. \quad (2)$$

而输出面之间的光场传播可以用角谱传递函数来处理。这种处理方法不仅较其他标量衍射方法更加准确,而且采样间距也不随光场的光场传播距离而改变。假设一个光场从  $m$  面到  $n$  面,传播距离为  $Z_{mn}$ ,则在  $n$  面的光场可以由  $m$  面的光场表示为

$$G_{nm}(x) = \text{IDFT}\{\text{DFT}[G_m(x)] \times \exp[jkz_{nm} \sqrt{1 - (\lambda r \Delta f_x)^2}]\}, \quad (3)$$

式中  $\text{DFT}(\cdot)$  和  $\text{IDFT}(\cdot)$  分别代表离散傅里叶变换和逆变换,  $G_{nm}(x)$  表示从  $m$  面传播到  $n$  面的光场,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $f$  为入射波在传播方向上的空间频率,  $\lambda$  表示入射波的波长,  $r$  为点光源与  $P$  之间的距离。(3)式还可以简化为下述线性表达式:

$$G_n(x) = P_{nm}\{G_m(x)\}. \quad (4)$$

由于幅度与相位的收敛方向一致,而幅度值可以直接通过测量得到,本算法采用幅度的均方误差来代替相位的均方误差作为目标函数。这实际上是把计算出来的光场幅度分布和实际测量的输出面的光场幅度分布做一个比较,当通过计算得到的输出面的相位分布和实际情况越符合时,计算出来的光场幅度分布和测量值的偏差就越小。具体来说,目标函数设定如下<sup>[9]</sup>:

$$V_{\text{ER}_m} = \sum_{x_m} (|F_m(x_m)| - |G_m^l(x_m)|)^2 / \sum_{x_m} |F_m(x_m)|^2, \quad (5)$$

式中  $|G_m^l(x_m)|$  为第  $l$  次恢复出来的平面  $S_m$  的振幅

分布,  $x_m$  为各采样点位置。而当目标函数值达到预先设定的误差精度的时候,算法终止,并输出输入面的相位分布。

### 3.2 算法流程

如图 3 所示,所提算法的具体流程如下

1) 假设输入面  $S_0$  光场分布是  $G_0(x_0) = |F_0(x_0)| \exp[i\theta_0(x_0)]$ , 利用(4)式即可得到输出面  $S_1$  的光场分布  $G_{10}(x_1) = P_{10}\{G_0(x_1)\}$ , 然后以  $\theta_1^l(x_1)$  作为算法迭代的初始相位,其中  $l = 1, 2, 3 \dots$  为迭代次数;

2) 对  $G_{10}(x_1)$  进行幅度替换,用输出面  $S_1$  处的测量光强分布信息  $\sqrt{I_1(x_1)}$  替换  $G_{10}(x_1)$ , 得到输出面  $S_1$  的估计光场  $G_1(x_1) = \sqrt{I_1(x_1)} \exp[i\theta_1^l(x_1)]$ ;

3) 根据(4)式,由  $G_1(x_1)$  计算输出面  $S_2$  的光场  $G_{21}(x_2) = P_{21}\{G_1(x_2)\}$ , 然后用输出面  $S_2$  的测量光强分布信息  $\sqrt{I_2(x_2)}$  替换  $|G_{21}(x_2)|$ , 得到输出面  $S_2$  的估计光场  $G_2(x_2) = \sqrt{I_2(x_2)} \exp[i\theta_2^l(x_2)]$ 。用同样的传递和幅度替代法得到输出面  $S_3$  的估计光场  $G_3(x_3) = \sqrt{I_3(x_3)} \exp[i\theta_3^l(x_3)]$ ;

4) 计算目标函数值

$$V_{\text{ER}_1} = \sum_{x_1} (|F_1(x_1)| - |G_1(x_1)|)^2 / \sum_{x_1} |F_1(x_1)|^2,$$

若  $\min(V_{\text{ER}_1}) \leq \epsilon$ , 则算法跳到步骤 6);

5) 根据(4)式由  $G_3(x_3)$  计算输出面  $S_1$  的光场  $G_{13}(x_1) = G_{13}(x) = P_{13}\{G_3(x)\}$ , 然后用输出面  $S_1$

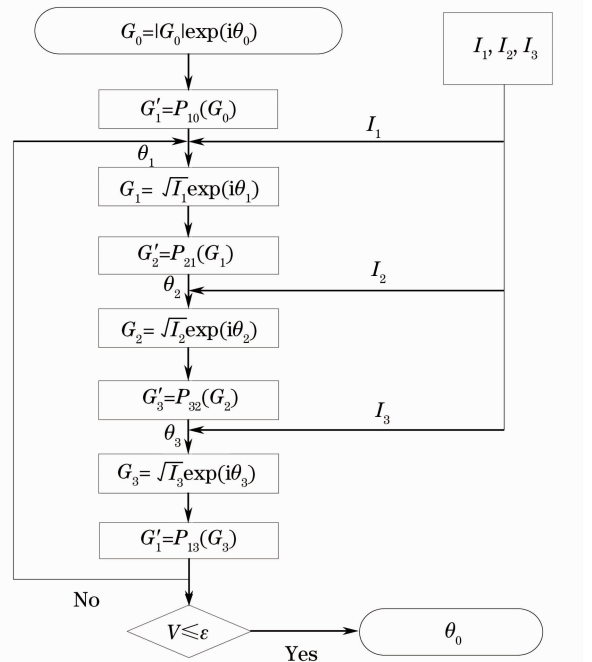


图 3 算法流程图

Fig. 3 Description of the propose algorithm

的测量光强分布信息  $\sqrt{I_1(x_1)}$  替换  $|G_{13}(x_1)|$ , 得到输出面  $S_1$  的估计光场  $G_1(x_1) = \sqrt{I_1(x_1)} \exp[i\theta_1^{+1}(x_1)]$ , 算法跳到步骤 2);

6) 以最后一次迭代得到的  $S_1$  光场  $G_1(x_1)$  经 (6) 式计算得到的输入面  $S_0$  的光场  $G_0(x_0) = |G_{01}(x_0)| \exp[i\theta_0(x_0)]$ , 得到输入面恢复相位

$\theta_0(x_0)$ 。

## 4 仿真实验

为验证所提相位恢复算法的可行性、相位恢复效果、收敛速度, 利用仿真软件 Matlab 7.0 对其进行仿真。仿真参数设置如表 1 所示。

表 1 仿真参数设置

Table 1 Setting of simulation parameters

Parameters	Valuation	Parameters	Valuation
Laser wavelength	$\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$	Liquid electrode numbers	$N = 300$
Electrode center distance	$d = 5 \mu\text{m}$	Electrode gap	$d_0 = 1 \mu\text{m}$
Liquid crystal cell thickness	$h = 6 \mu\text{m}$	Input and output surface width	0.5 m
Extraordinary refractive index	$n_e = 1.525$	Ordinary refractive index	$n_o = 1.755$
Gauss incident beam waist radius	$\omega_0 = 675 \mu\text{m}$	Distances of $S_1 - S_0, S_2 - S_0, S_3 - S_0$	10 mm, 50 mm, 500 mm

### 4.1 算法有效性, 精确性, 收敛性分析

为验证算法的有效性, 将由算法恢复的幅度相位值与实际的幅度和相位值进行了对比。假设输入面实际光场强度宽度为 1.5 mm, 估计的光场宽度为 3 mm, 是实际光场宽度的两倍; 实际相位的范围为  $-4 \sim 3.5$  rad, 估计相位的范围为  $-\pi \sim \pi$  rad。如

图 4(a) 所示, 对比所提算法恢复出的输入面幅度和相位范围, 可以发现此时恢复的输入面幅度已与实际幅度的宽度基本一致, 恢复的输入面相位范围与实际的相位范围也趋于一致。这说明该算法能实现波前相位恢复。

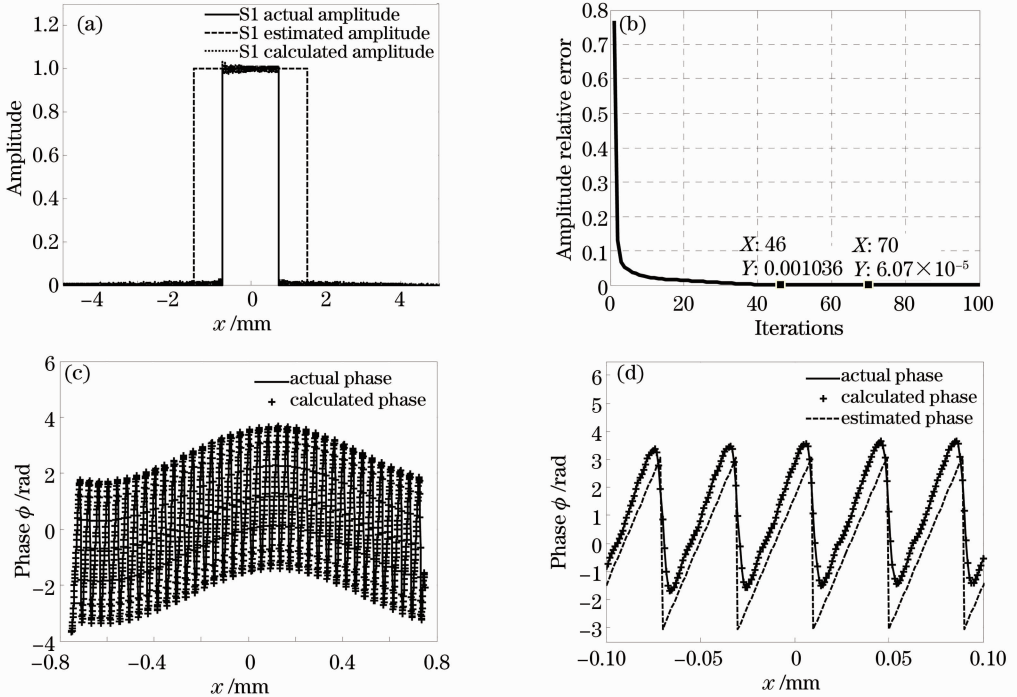


图 4 (a) 输入面实际幅度、恢复幅度和初始估计幅度的对比图; (b) 迭代过程中幅度收敛曲线; (c) 输入面实际相位与恢复相位的对比图; (d) 图 (c) 的局部放大图

Fig. 4 (a) Comparison between actual, calculated and estimated amplitude from input plane; (b) convergence curve of amplitude in the process of iteration; (c) comparison between actual and calculated amplitude from input plane; (d) as part of (c)

为验证所提算法的精确性, 将恢复相位与实际相位都平移到  $-\pi \sim \pi$  空间进行比较, 得到输入面的

恢复相位与实际相位的对比如图 4(c) 所示, 对比的局部放大图如图 4(d) 所示。从图中可以看出, 当迭

代 46 次时,恢复相位与实际相位已经非常接近。通过计算可以得到,实际相位和恢复相位的相位恢复均方根误差为  $0.0227\lambda$ ,这说明该算法能以较高的精确度恢复出波前相位。

为验证所提算法的收敛性,用图 4(b)刻画了幅度输入面的幅度相对误差值与迭代次数之间的关系。如图 4(b)所示,幅度相对误差值在迭代 46 次时为  $1.034 \times 10^{-3}$ ,迭代 70 次时为  $6.07 \times 10^{-6}$ ,由此可见所提算法能够快速恢复相位。在此,当最后迭代得到的幅度均方误差达到  $10^{-3}$  数量级时,就认为算法能很好地恢复出了初始相位。

#### 4.2 初始值敏感分析

通过仿真实验考查初始值对算法收敛速度和收敛精度的影响。具体方法如下:设置在理想波阵面上加入均值为 0,最大幅度为  $k$  的随机扰动,比较  $k=0, 0.1\pi, 0.2\pi, 0.5\pi, \pi$  时的幅度收敛曲线,并设置对比项:设置初始相位为 0 相位和  $\pi$  相位,如图 5 所示。

如表 5 所示,对于不同的  $k$  值,都能很快的达到

表 2 不同初始值下达到收敛条件的迭代次数

Table 2 Iterations when meet convergence condition under different initial values

Initial value setting	$k=0$	$k=0.1\pi$	$k=0.2\pi$	$k=0.5\pi$	$k=\pi$
Iterations	46	35	31	31	26
Convergency value	$1.034 \times 10^{-3}$	$1.078 \times 10^{-3}$	$9.771 \times 10^{-4}$	$9.634 \times 10^{-4}$	$1.072 \times 10^{-3}$

#### 4.3 算法的抗噪声性能

由于在光强进行实际测量时会不可避免的引入噪声,为了验证该算法的抗噪声性能,将输入平面和三个输出平面分别加入信噪比(SNR,  $R_{SN}$ )  $R_{SN} = 4$  dB 的高斯噪声。从图 6 可以看出,算法收敛速度比无噪声时收敛速度快很多,在迭代 10 次时就已经收敛。不同之处就在于算法会陷入局部极小值,幅度均方误差达到 0.1545 时变无法进一步下降,是无噪

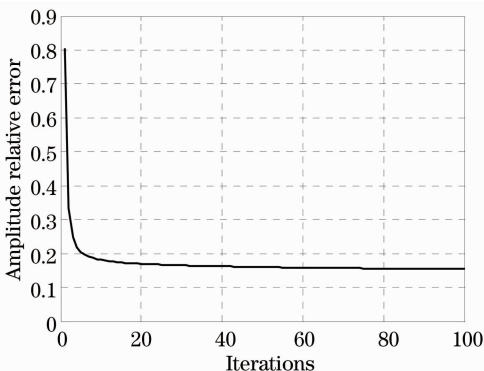


图 6  $R_{SN} = 4$  dB 时收敛特性曲线

Fig. 6 Convergence curve when  $R_{SN} = 4$  dB

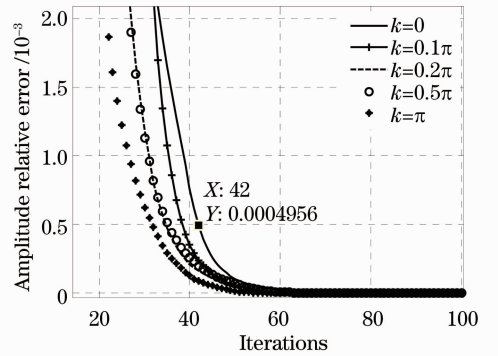


图 5 不同初始值下幅度收敛特性曲线

Fig. 5 Convergence characteristic curve of the amplitude under different initial values

收敛。对比表 2 可知,当幅度均方误差达到  $10^{-3}$  时, $k=0$  需要的迭代次数是 46 次,而其他初始值达到收敛时,迭代次数要小于 46 次,收敛速度更快。且在这些情况下都能达到全局收敛。即改进后相位恢复算法对初始值不是特别敏感,具有一定的容错能力。在初始波阵面上加上随机扰动都能快速的达到全局收敛。

声情况下幅度均方误差的 3000 倍,不能恢复出实际输出相位面。当噪声超高一定的噪声容限,此算法易陷入局部极小值,开始停滞不前,所以该算法恢复出的相位信息无法精确模拟实际相位信息。

为了研究各信噪比条件下该算法的有效性,图 7 给出了不同信噪比下算法迭代 100 次的收敛情况。从图中可以看出,当  $R_{SN} \leq 16$  dB 时,幅度均方

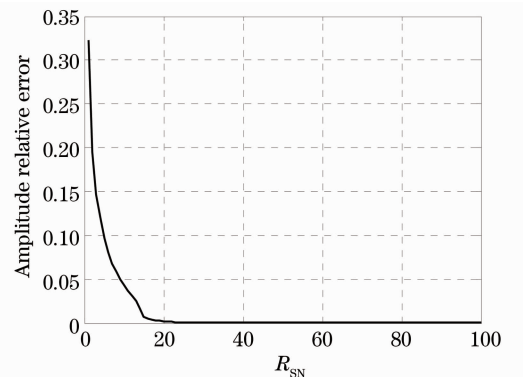


图 7 迭代 100 次算法的抗噪声性能分析

Fig. 7 Analysis of anti-noise performance after 100 interactions

误差随着信噪比的增加而快速减小,收敛梯度值较大,说明当噪声值较大时对该算法的收敛效果具有很大的影响。当  $R_{SN} \leq 16$  dB 范围内性能受到限制,可认为在次信噪比范围内算法失效。而当  $R_{SN} \geq 16$  dB 时,幅度均方误差随着信噪比的增加而变化缓慢,并且误差值已下降至  $10^{-3}$  数量级以下,已经能够很好的恢复输入相位面。所以,对于本文所提算法在噪声较大( $R_{SN} \leq 16$  dB)时,其精度会显著降低,而当噪声较小( $R_{SN} \geq 16$  dB)时则可以很好的恢复出相位信息。

#### 4.4 收敛特性对比

该算法采用三个输出面的幅度信息来迭代恢复波前相位信息,这使得算法具有较高的精确度。通过仿真实验来说明这种方法对算法收敛性的影响。

如图 8 所示,对比四个输出面、三个输出面与两个输出面的幅度均方误差收敛曲线,可知两个输出面的收敛速度更快,经过 12 次迭代就能趋于平稳,而利用三个输出面的迭代算法虽然没有收敛,但是却能够得到更小的误差值,恢复出的波阵面更加接近于实际出射波阵面。利用四个输出面经过 26 次算法就能达到收敛,比三个输出面收敛的速度更快,但是利用四个输出面相比于三个输出面计算量较大,最后都能达到同等数量级的收敛值。因此,为了能够获得高效率精度的波束指向,经过综合考虑,采用三个输出面的幅度信息进行相位恢复更加合理。其次,比较任意两个面组合下(不同相对距离)的收敛效果,可见三组组合的迭代收敛效果从迭代次数、收敛稳定度上都大致相同,说明输出面的相对距离对算法的性能影响几乎可以忽略不计。

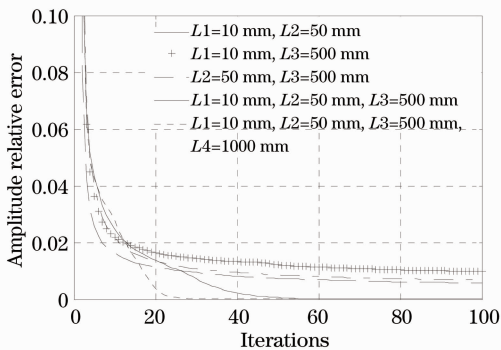


图 8 不同条件下的幅度均方误差收敛曲线

Fig. 8 Convergence curves of amplitude relative error under different conditions

## 5 结 论

为提高液晶波束指向的效率和精度,需要恢复

实际出射相位,以此为依据来调节入射光束。为克服传统相位恢复算法的缺陷,解决液晶相控阵中的波前相位恢复问题,提出了一种不依赖于出射面幅度信息的相位恢复算法。该算法利用三个输出面的光强信息进行迭代计算,提高了算法的收敛速度。此外,所提算法利用角谱理论处理出射相位与测量面光场间的衍射计算问题,没有省略图像频谱的高频分量,使得算法具有较高的精确度。仿真实验表明,所提算法应用于液晶相控阵中的波前相位恢复时,不仅具有较高的准确度,还能快速收敛。

#### 参 考 文 献

- 1 P F Mcmanamon. Laser radar development [C]. The 15th Annual AESS/IEEE Dayton Section Symposium, Fairborn, 1998; 53-60.
- 2 Xu Runjun, Chen Xinzhong. Application of radar in military [J]. Physics and Engineering, 2002, 12(6): 36-39.  
徐润君, 陈心中. 激光雷达在军事中的应用[J]. 物理与工程, 2002, 12(6): 36-39.
- 3 Kong Lingjiang, Zhu Yin, Yang Jianyu, et al.. A new method of scanning angles screening of liquid crystal phased array component [J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(7): 1961-1966.  
孔令讲, 朱 颖, 杨建宇, 等. 一种新的液晶相控阵组件波控方法[J]. 光学学报, 2009, 29(7): 1961-1966.
- 4 Kong Lingjiang, Zhu Yin, Song Yan, et al.. Beam steering approach for high-precision spatial light modulators [J]. Chinese Optics Letters, 2010, 8(11): 1085-1089.  
孔令讲, 朱 颖, 宋 艳, 等. 空间光调制器的高精度波束扫描方法研究[J]. 中国光学快报, 2010, 8(11): 1085-1089.
- 5 Kong Lingjiang, Zhu Yan, Song Yan, et al.. A beam steering approach of liquid crystal phased array based on nonperiodic blazed grating [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(1): 0123001.  
孔令讲, 朱 颖, 宋 艳, 等. 基于非周期闪耀光栅的液晶相控阵波控方法研究[J]. 光学学报, 2011, 31(1): 0123001.
- 6 Xiao Feng, Kong Lingjiang, Ai Yue. A liquid crystal lens with tunable focal length based on principle of optical phased array technology [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(s1): s123003.  
肖 锋, 孔令讲, 艾 越. 一种基于光学相控阵技术的可变焦液晶透镜实现方法[J]. 光学学报, 2012, 32(s1): s123003.
- 7 P F Mcmanamon, T A Dorschner, D L Corkum. Optical phased array technology [J]. Proceedings of the IEEE, 1996, 84(2): 268-298.
- 8 A Anand, G Pedrini, W Osten, et al.. Phase retrieval using a random amplitude mask for wavefront sensing [C]. Optical Metrology. International Society for Optics and Photonics, 2007; 66170J.
- 9 Chen Bo, Li Min, Li Xinyang. Close-loop experiment of adaptive optics system based on linear phase retrieval technique [J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(9): 1633-1637.  
陈 波, 李 敏, 李新阳, 等. 基于线性相位反演技术的自适应光学闭环实验研究 [J]. 光学学报, 2008, 28(9): 1633-1637.
- 10 J Zhuo, L Kong, Y Zhou, et al.. A rapid iterative algorithm of obtaining wave-control data for liquid crystal phased array [C]. SPIE, 2013, 8913: 89130O.
- 11 Zeng Fa, Tan Xiaofeng, Wei Xiaofeng, et al.. Complex optical field retrieved from intensity distributions on several fractional fourier transform planes [J]. Chinese J Lasers, 2006, 33(12): 1621-1625.  
曾 发, 谭峭峰, 魏晓峰, 等. 基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复算法[J]. 中国激光, 2006, 33(12): 1621-1625.
- 12 W G Joseph. Introduction to Fourier Optics [M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2011. 40-42.  
古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011. 40-44.