

# 基于偏振态调制器的三级米勒矩阵测量

张申飞 王春华 于清洋 雷俊平

(上海大学特种光纤与光接入网重点实验室, 上海 200072)

**摘要** 对基于偏振态调制器的三级米勒矩阵测量方案进行了理论推导和证明, 并对其进行了实验验证。通过建立三级系统方程, 利用最小二乘的数值算法回归出多个待测器件的米勒矩阵。这种基于系统估值的方案不同于以往文献中提到的使用在线偏振测量仪测量输入/输出偏振态求解单个米勒矩阵的方法。三级串联光学子系统或光器件的米勒矩阵及其物理偏振参量可在一次测量中同时求得。实验测得的三个光学器件延迟量的标准差分别为 0.0012、0.0018 和 0.0040。还针对测量系统的不确定性进行了仿真模拟, 并着重讨论了串联系统中存在的误差累积效应, 与实验数据进行了比较。

**关键词** 测量; 三级米勒矩阵; 偏振调制器; 系统估值; 最小二乘法

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201434.0412003

## Multiple Mueller Matrices Measurement by Polarization State Modulators

Zhang Shenfei Wang Chunhua Yu Qingyang Lei Junping

(Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract** Three-stage Mueller matrices measurement by polarization state modulators is presented theoretically, and the method is verified by experiment. Through the establishment of system equations, the Mueller matrices of optical device under test can be solved by least squares algorithm. The scheme which is based on system estimation theory is different from the method of measuring the input/output states of polarization with an in-line polarization state analyzer. The Mueller matrices and physical polarization parameters can be obtained in just one experiment. The standard deviations of measured retardances of optical components are 0.0012, 0.0018 and 0.0040, respectively. In addition, the simulation of uncertainty and the error accumulation of the system are discussed in detail. There is error accumulation effect in the cascaded system, and the result is consistent with the experimental data.

**Key words** measurement; multiple Mueller matrices; polarization state modulators; system estimation; least squares algorithm

**OCIS codes** 060.2330; 060.4370; 120.5410; 260.5430

## 1 引 言

偏振信息检测在生物医学诊断<sup>[1-2]</sup>、分子化学测量<sup>[3]</sup>、空间远程传感<sup>[4]</sup>、海洋大气探测<sup>[5]</sup>、传感系统<sup>[6-7]</sup>以及材料生产检测<sup>[8]</sup>等众多领域中都有深远的意义。偏振测量可以分为两个方面: 一方面是关于描述光本征偏振特性的斯托克斯参量的测量; 另

一方面是针对描述光偏振转换的米勒矩阵测量。

迄今为止出现了很多关于偏振分析仪和米勒矩阵测量仪的报道<sup>[9-11]</sup>。这些测量系统大部分是基于偏振态发生器(PSG)、待测样品、偏振态分析仪(PSA)的顺序结构, 通过产生不同的偏振序列, 测量相对应的输出偏振态(SOP)从而获得待测样品的米

收稿日期: 2013-10-23; 收到修改稿日期: 2013-12-06

基金项目: 国家自然科学基金(61077018)、上海市重点学科项目(S30108/08DZ2231100)

作者简介: 张申飞(1988—), 男, 硕士研究生, 主要从事光电通信与传感方面的研究。E-mail: paopaokb@163.com

导师简介: 王春华(1963—), 女, 博士, 教授, 主要从事光电传感及光通信领域方面的研究。

E-mail: lizawch@staff.shu.edu.cn

勒参数。本文在此基础上,通过在三个待测样品前后分别插入相同结构的偏振调制器(PSM),提出了三级米勒矩阵的纵向空间测量方案,从而实现了多个串联样品米勒矩阵的同步测量和分析。

## 2 原 理

三级米勒矩阵测量的系统方案如图 1 所示,激

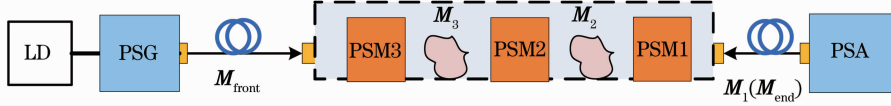


图 1 三级 PSM 构成的串联旋转波片偏振参量测量系统方案

Fig. 1 Rotating wave plate scheme for the estimation of polarization parameters by polarization state modulators

由于非退偏矩阵  $M_{end}$  的引入,相当于加入了待测矩阵  $M_1$ ,故系统依次求解  $M_1, M_2, M_3$  的基本估值方程形式可由偏振光传输理论确定:

$$\begin{cases} S_{in} = M_{front}^{-1} (P_{wp0}^3)^{-1} M_3^{-1} (P_{wp0}^2)^{-1} M_2^{-1} (P_{wp0}^1)^{-1} M_{end}^{-1} S_0 \\ S_{1,2}^1 = M_{end} P_{wp1,2}^1 M_2 P_{wp0}^2 M_3 P_{wp0}^3 M_{front} S_0 \\ S_{1,2}^2 = M_{end} P_{wp0}^1 M_2 P_{wp1,2}^2 M_3 P_{wp0}^3 M_{front} S_0 \\ S_{1,2}^3 = M_{end} P_{wp0}^1 M_2 P_{wp0}^2 M_3 P_{wp1,2}^3 M_{front} S_0 \end{cases}, \quad (1)$$

式中  $S_0$  代表 PSG 产生的 SOP 序列,  $S_{in}, S_{1,2}^1, S_{1,2}^2, S_{1,2}^3$  表示 PSA 经过一段光纤跳线  $M_{end}$  后所测的 SOP,  $P_{wp_i}^1, P_{wp_i}^2, P_{wp_i}^3 (i=0, 1, 2)$  是旋转波片方位角分别位于  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  时的米勒矩阵,下标代表两次不同的偏振态调制,上标表示 PSM 的编号。为消除  $M_{front}$  带来的不确定性影响,可将  $S_{in}$  转化为关于  $S_0$  的代数式代入系统方程。若令  $B_{wp1,2}^1 = P_{wp1,2}^1 (P_{wp0}^1)^{-1}, B_{wp1,2}^2 = P_{wp1,2}^2 (P_{wp0}^2)^{-1}, B_{wp1,2}^3 = P_{wp1,2}^3 (P_{wp0}^3)^{-1}$ ,其中  $B_{1,2}$  作为偏振调制的矩阵单元,则(1)式可变为

$$\begin{cases} A_{1,2}^1 = M_1 B_{wp1,2}^1 M_1^{-1} \\ A_{1,2}^2 = M_1 P_{wp0}^1 M_2 B_{wp1,2}^2 M_2^{-1} (P_{wp0}^1)^{-1} M_1^{-1} \\ A_{1,2}^3 = M_1 P_{wp0}^1 M_2 P_{wp0}^2 M_3 B_{wp1,2}^3 M_3^{-1} (P_{wp0}^2)^{-1} M_2^{-1} (P_{wp0}^1)^{-1} M_1^{-1} \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $A_{1,2}^1 = S_{1,2}^1 (S_0^1)^T S_0^1 (S_0^1)^T, A_{1,2}^2 = S_{1,2}^2 (S_2^2)^T [S_2^2 (S_2^2)^T]^{-1}, A_{1,2}^3 = S_{1,2}^3 (S_3^3)^T [S_3^3 (S_3^3)^T]^{-1}$  均为 PSA 的测量值。对于琼斯-米勒矩阵,使用洛伦兹约束条件对(2)式进行变换<sup>[12-13]</sup>:

$$\begin{cases} M_1 B_{wp1,2}^1 G M_1^T G / \sqrt{\Delta M_1} = A_{1,2}^1 \\ M_2 B_{wp1,2}^2 G M_2^T G / \sqrt{\Delta M_2} = G (M_1 P_{wp0}^1)^T G A_{1,2}^1 M_1 P_{wp0}^1 / \sqrt{\Delta M_1} \\ M_3 B_{wp1,2}^3 G M_3^T G / \sqrt{\Delta M_3} = G (M_1 P_{wp0}^1 M_2 P_{wp0}^2)^T G A_{1,2}^1 M_1 P_{wp0}^1 M_2 P_{wp0}^2 / \sqrt{\Delta M_1 \Delta M_2} \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。利用最小二乘算法<sup>[14]</sup>可以获得(3)式的唯一解,待测矩阵  $M_1^*$  应该满足

$$M_1^* = \arg \min_{M \in \mathbf{R}^{4 \times 4}} \left[ \sum_{i=1}^2 \| M_1 B_{wp1,2}^i G M_1^T G - A_{1,2}^i \sqrt{\det(M_1)} \|_2^2 \right], \quad (4)$$

式中  $\| \cdot \|_2$  表示矩阵的 2 范数。

对  $M_1$  进行迭代,可求  $M_2$  和  $M_3$ 。此方案从根本上解决了传统测量方法中需产生特殊 SOP 所带来的光学系统准直问题。为获得(2)式的唯一解,测量矩阵  $A_{1,2}^1, A_{1,2}^2, A_{1,2}^3$  须是非奇异矩阵,即要求选择合适的  $n$  个输入偏振态序列 ( $n \geq 4$ )。若在系统中添加样品,只需在待测样品前插入相应的 PSM 即可。非线性系统方程则可通过相应的扩展进行建立,经

光二极管(LD)发射的光进入 PSG,PSG 产生四个以上的输入偏振态序列,经过空间中的三个待测器件和 PSM,最终由 PSA 测得相应的输出偏振态序列。图 1 中,  $M_{front}$  代表与 PSG 连接的前端光纤跳线的米勒矩阵,  $M_{end}$  则代表与商用 PSA 相连的尾纤的米勒矩阵。测量数据通过计算机处理,由最小二乘数值算法求解出各个待测样品的米勒矩阵。

迭代求得  $N$  个样品的米勒矩阵,从而实现多级串联样品米勒矩阵的同步测量。

## 3 实 验

以三级系统的估值理论为基础,建立了如图 2 所示的三级实验系统。图 2(a)中,光源采用波长可调谐激光器(Santac 2000),中心波长设置为 1549.5 nm。

PSG 由一个线性起偏器(Throlabs LPNIR050-MP)和两个级联的电控励磁接触器(LC, Throlabs LCR-1-IR1)组成, PSM 采用三个 1/4 波片(QWP, Throlabs

RABQ-600), PSA 是一个商用的偏振分析仪(Santac PAM-10)。PSA 和准直器(Throlabs FBC-1550-APC)通过尾纤进行连接。

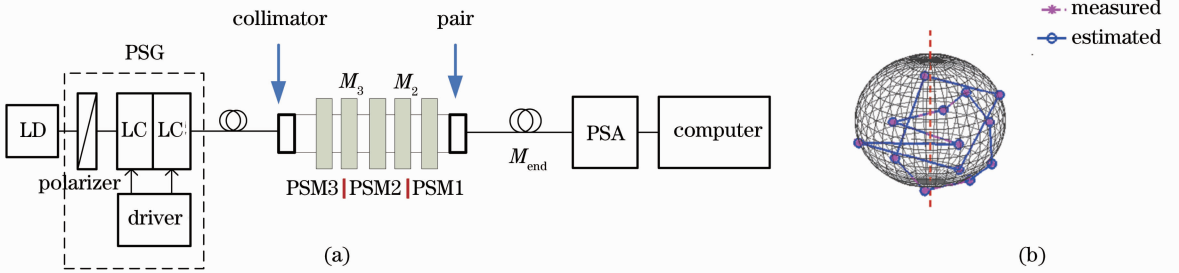


图 2 (a)串联米勒矩阵测量的实验原理图; (b)实验采用的 14-SOP 序列

Fig. 2 (a) Experimental setup for measuring cascaded Mueller matrices; (b) 14-SOP sequences needed in the experiment

合理地输入 SOP 的选取可以提高系统的稳定性并减小系统误差, 庞加莱球上等距且相对距离最大的 4-SOP(内切正四面体顶点)被证明可以带来最小的测量误差<sup>[15]</sup>。在实验中选取了庞加莱球上的 14-SOP 作为输入序列, 所有 SOP 序列均位于庞加莱球的半个球面上, 如图 2(b)所示。仿真证明, 实验选取的 14-SOP 在系统性能上与 4-SOP 序列相近。

实验包括三个待测样品: 尾纤( $M_1$ )、QWP( $M_2$ )、半波片(HWP)( $M_3$ ), 调制单元 PSM 为三个 QWP。HWP 和 QWP 的延迟量  $\delta$  分别为  $178.53^\circ$ ,  $88.61^\circ$ 。实验中待测波片的方位角始终置于  $0^\circ$ , 尾纤固定于光学平台。分别测量 PSM 的方位角依次置于  $0^\circ, 45^\circ, 66^\circ$  三个角度时的输出序列, 将 PSA 测得的相应输出 SOP 数据代入系统方程, 最终解得三个串联的光学器件的米勒矩阵。

通过对实验数据的处理, 得到两个待测波片米勒矩阵的各离散元素  $m_{ij}$  表示图。如图 3 所示, 其中实线分别代表 1, 0, -1 三条数值参考线, 离散的三角形表示 QWP 的米勒矩阵元素, 离散的圆表示 HWP 的米勒矩阵元素。所测得的三个器件(HWP,

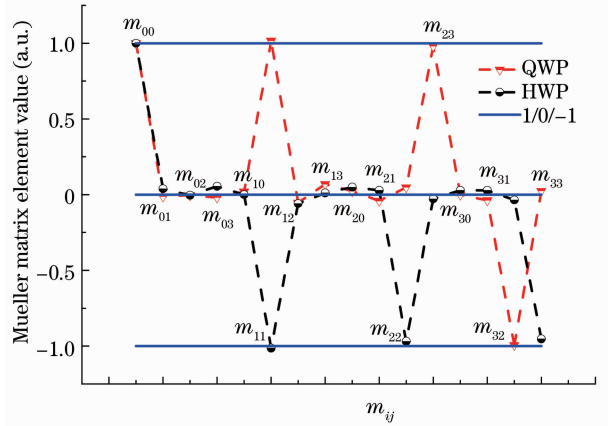


图 3 实验测得米勒矩阵元素的离散表示

Fig. 3 Dispersion of Mueller matrices elements measured with the experimental system

QWP, 尾纤)延迟量  $\delta = \arccos[\text{tr}(\mathbf{M}_R)/2 - 1]$ <sup>[16]</sup> 分别为  $177.7976^\circ, 88.0132^\circ, 128.9222^\circ$ 。结果表明, 该实验方案可达到较高的测量精度。对测得的矩阵进行前向分解, 可获得其分解矩阵, 如表 1 所示,  $\mathbf{M}_{\text{est}}$  表示被测 3 个样品的 Mueller 矩阵,  $\mathbf{M}_{R_{\text{est}}}$  是从  $\mathbf{M}_{\text{est}}$  中分解出来的双折射 Mueller 矩阵。

表 1 待测 QWP, HWP 和尾纤的米勒矩阵及分解

Table 1 Mueller matrices and their decompositions of QWP, HWP and pigtail under test respectively

	$\mathbf{M}_{3_{\text{est}}}$ (HWP)	$\mathbf{M}_{2_{\text{est}}}$ (QWP)	$\mathbf{M}_{1_{\text{est}}}$ (pigtail)
$\mathbf{M}_{\text{est}}$	$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0395 & -0.0041 & 0.0550 \\ 0.0001 & -1.0139 & -0.0586 & 0.0113 \\ 0.0493 & 0.0287 & -0.9686 & -0.0276 \\ 0.0289 & 0.0281 & -0.0351 & -0.9524 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0119 & -0.0037 & -0.0185 \\ 0.0198 & 1.0168 & -0.0530 & 0.0690 \\ 0.0238 & -0.0419 & 0.0481 & 0.9811 \\ -0.0003 & -0.0368 & -0.9936 & 0.0244 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0144 & -0.0104 & 0.0054 \\ -0.0049 & 0.5951 & 0.0277 & -0.8028 \\ -0.0189 & 0.1340 & -0.9759 & 0.0547 \\ -0.0043 & -0.8097 & -0.1261 & -0.5844 \end{bmatrix}$
$\mathbf{M}_{R_{\text{est}}}$	$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9958 & -0.0891 & 0.0194 \\ 0 & -0.0897 & -0.9954 & 0.0332 \\ 0 & 0.0164 & -0.0348 & -0.9993 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9915 & -0.1079 & 0.0732 \\ 0 & -0.0689 & 0.0428 & 0.9967 \\ 0 & -0.1107 & -0.9932 & 0.0350 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5474 & 0.7335 & -0.4028 \\ 0 & -0.1629 & 0.3787 & 0.9111 \\ 0 & 0.8209 & 0.5644 & -0.0878 \end{bmatrix}$
$\delta / (^\circ)$	177.7976	88.0132	128.9222

10次重复实验测量的波片延迟量数据如图4所示,可以看到其均值与标准值接近,偏移量 $\Delta\delta$ 分别为 $0.73^\circ$  (HWP)和 $0.60^\circ$  (QWP),造成偏移的误差来源主要是波片外表盘刻度标识不精确所带来的误差,相移误差在 $[-0.5^\circ, 0.5^\circ]$ 范围内。尾纤、QWP和HWP的测量延迟量标准差分别为0.0012、0.0018和0.0040,结果表明测量系统的稳定性较高。

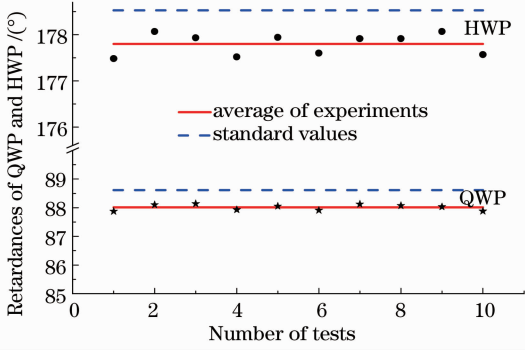


图4 米勒矩阵分解矩阵(双折射矩阵)中提取的QWP和HWP的延迟量

Fig. 4 Retardances of QWP and HWP by extracting from the Mueller matrices decomposition (birefringence matrices)

除了实验系统自身的误差来源外,测量的微误差还来自于所提出的三级串联系统测量算法的误差累积效应。从实验结果来看,测量系统达到了各个串联器件的米勒矩阵同步精确测量的目的,更为重要的是以实验的方式验证了三级串联米勒矩阵测量方案的可行性。

## 4 误差讨论

### 4.1 米勒矩阵的不确定度

根据(4)式,米勒矩阵估值的不确定度主要包括

三部分<sup>[17]</sup>:PSA的SOP测量误差、旋转角度的读数误差和偏振调制器的延迟量误差。针对三种误差,可以对米勒矩阵的估值不确定度进行仿真,仿真流程如图5所示。

在米勒矩阵的估值不确定度仿真中,生成的SOP测量误差 $\Delta S_{1,2,3}$ 服从 $[-\epsilon, +\epsilon]$ 区域内的均匀分布,其中 $\epsilon$ 代表PSA的测量误差强度, $\Delta\theta_{1,2}$ 和 $\Delta\delta$ 均服从 $[-1^\circ, 1^\circ]$ 区域内的均匀分布。使用同样的流程,通过求解相应的非线性方程,对后级的 $M_2$ 和 $M_3$ 进行迭代仿真和分析。

### 4.2 误差累积

实验中三个待测的米勒矩阵参量可以通过以上的流程进行仿真,其中米勒矩阵参量 $\mathbf{P}_m = (m_{00}, m_{01}, m_{02}, m_{03}, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{20}, m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{30}, m_{31}, m_{32}, m_{33})$ 的标准差,和相应的16个物理偏振参量<sup>[16]</sup>。

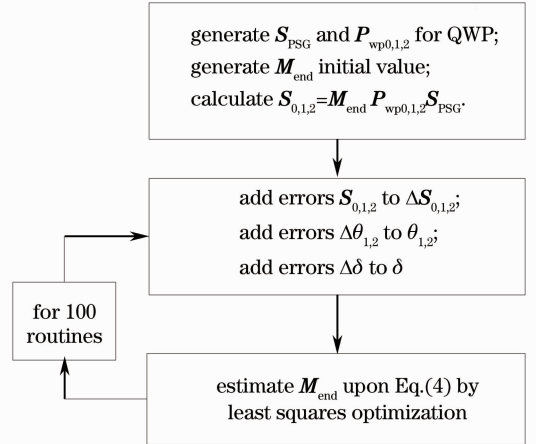


图5 米勒矩阵的估值不确定度仿真流程图

Fig. 5 Simulation process for the estimation uncertainty of Mueller matrices

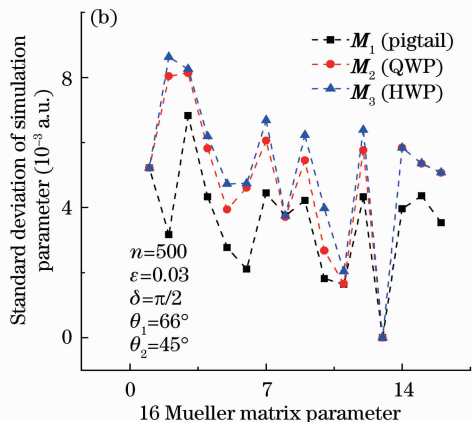
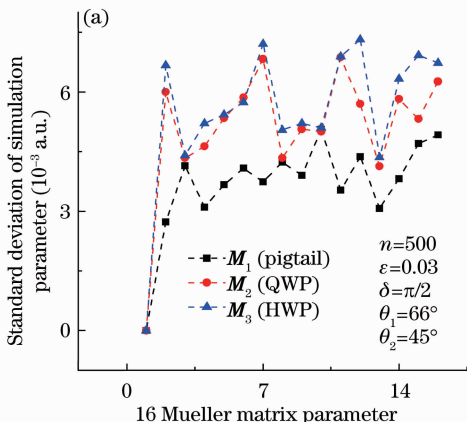


图6 (a)仿真米勒矩阵参量和(b)物理偏振参量的标准差

Fig. 6 Standard deviation of (a) simulated Mueller matrices and (b) physical polarization parameters

$\mathbf{P}_p = (p_1, p_2, p_3, m_{\Delta 11}, m_{\Delta 12}, m_{\Delta 13}, m_{\Delta 22}, m_{\Delta 23}, m_{\Delta 33}, \alpha, \theta, \delta, T, d_1, d_2, d_3)$  的仿真标准差, 如图 6 所示, 其中  $(p_1, p_2, p_3)$  为起偏效应的三个参数,  $(m_{\Delta 11}, m_{\Delta 12}, m_{\Delta 13}, m_{\Delta 22}, m_{\Delta 23}, m_{\Delta 33})$  为退偏效应的六个参数,  $(T, d_1, d_2, d_3)$  表示偏振衰减效应的四个参数以及表示器件双折射效应的三个参数  $(\alpha, \theta, \delta)$ 。

各偏振参量标准差的结果由  $n=500$  次仿真获得。其中设定 PSA 的测量误差量级  $\epsilon=0.03$ , 输入 SOP 与实验中选取的 14 点偏振态序列相同, PSM 的延迟量  $\delta=\pi/2$ 。PSM 旋转角度分别设置为  $0^\circ, 45^\circ, 66^\circ$ 。从图 6 中可以看出, 各级系统的估值参量会有一个逐步累积的过程, 与实验中的各级米勒矩阵的标准差递增趋势相同。作为单级测量的一种串行扩展, 多级米勒矩阵的测量中的误差累积效应是不可避免的, 但在一定的范围内, 这种方案所得出的测量结果仍旧是十分有意义的。

## 5 结 论

提出了基于系统估值理论的同步三级米勒矩阵测量的系统方案。实验实现了三个光学样品米勒矩阵的同步精确测量, 利用经典的 Lu-Chipman 分解方法对所得矩阵进行了分解, 实验测得延迟量的标准差在  $0.0012\sim 0.0040$  范围内。实验和仿真数据均证明, 后级的待测量会因三级系统本身的串联特性而不可避免地积累前级的误差。通过验证的三级米勒矩阵测量为未来偏振测量的远程应用和准分布垂直测量探索提供了理论和实验依据。

## 参 考 文 献

- 1 Guo Xinxin, Michael F G Wood, I A Vitkin. Angular measurements of light scattered by turbid chiral media using linear Stokes polarimeter [J]. *J Biomed Opt*, 2006, 11(4): 041105.
- 2 M A Wallenburg, M F G Wood, N Ghosh, *et al.*. Polarimetry-based method to extract geometry-independent metrics of tissue anisotropy [J]. *Opt Lett*, 2010, 35(15): 2570–2572.
- 3 H Takechi, O Arteaga, J M Ribo, *et al.*. Chiroptical

measurement of chiral aggregates at liquid-liquid interface in centrifugal liquid membrane cell by Mueller matrix and conventional circular dichroism methods [J]. *Molecules*, 2011, 16(5): 3636–3647.

- 4 J S Tyo, D H Goldstein, D B Chenault, *et al.*. Review of passive imaging polarimetry for remote sensing applications [J]. *Appl Opt*, 2006, 45(22): 5453–5469.
- 5 O Arteaga, A Canillas, J Crusats. Emergence of supramolecular chirality by flows [J]. *Chem Phys Chem*, 2010, 11(16): 3511–3516.
- 6 Z Li, C Wu, H Dong, *et al.*. Stress distribution and induced birefringence analysis for pressure vector sensing based on single mode fibers [J]. *Opt Express*, 2008, 16(6): 3955–3960.
- 7 H Takechi, O Arteaga, J M Ribo. Chiroptical measurement of chiral aggregates at liquid-liquid interface in centrifugal liquid membrane cell by Mueller matrix and conventional circular dichroism methods [J]. *Molecules*, 2011, 16(5): 3636–3647.
- 8 P Clemente, V Durán, L Martínez-León. Use of polar decomposition of Mueller matrices for optimizing the phase response of a liquid-crystal-on-silicon display [J]. *Opt Express*, 2008, 16(3): 1965–1974.
- 9 Matthew H Smith. Optimization of a dual-rotating-retarder Mueller matrix polarimeter [J]. *Appl Opt*, 2002, 41(13): 2488–2493.
- 10 K M Twietmeyer, R A Chipman. Optimization of Mueller matrix polarimeters in the presence of error sources [J]. *Opt Express*, 2008, 16(15): 11589–11603.
- 11 J C Vap, S E Nauyoks, M A Marciniak. Optimization of a dual-rotating-retarder polarimeter as applied to a tunable infrared Mueller matrix scatterometer [J]. *Meas Sci & Technol*, 2013, 24(5): 055901.
- 12 R Barakat. Bilinear constraints between elements of the  $4 \times 4$  Mueller-Jones transfer matrix of polarization theory [J]. *Opt Commun*, 1981, 38(3): 159–161.
- 13 K H Dong, P Shum, M Yan. Measurement of Mueller matrix for an optical fiber system with birefringence and polarization-dependent loss or gain [J]. *Opt Commun*, 2007, 274(1): 116–123.
- 14 Avery Paul. Applied Fitting Theory I: General Least Squares Theory [OL]. <http://www-fg.ijs.si/~matevz/docs/EavergFitting/fitting/fitting/.pdf>. [2014-01-15].
- 15 Alba Peinado, Angel Lizana, Josep Vidal, *et al.*. Optimization and performance criteria of a Stokes polarimeter based on two variable retarders [J]. *Opt Express*, 2010, 18(8): 9815–9830.
- 16 S Yau Lu, R A Chipman. Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition [J]. *J Opt Soc Am A*, 1996, 13(5): 1106–1113.
- 17 K M Twietmeyer, R A Chipman. Optimization of Mueller matrix polarimeters in the presence of error sources [J]. *Opt Express*, 2008, 16(15): 11589–11603.

栏目编辑: 何卓铭