

# 激光导引星倾斜探测的非等晕性

黄 凯<sup>1,2</sup> 周 钰<sup>1</sup> 常 翔<sup>1</sup> 翟东升<sup>1</sup> 熊耀恒<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院云南天文台, 云南 昆明 650011; <sup>2</sup> 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要** 传统的激光导引星(LGS)由于激光发射与接收光路的限制,导致难以利用激光导引星来探测大气倾斜量变化。其中重要的一个解决方案就是利用辅助望远镜,从侧面对激光导引星进行探测,从观测到的激光导引星带状拖影中提取出大气倾斜信息。随着激光带拖影长度的增加,必然导致其出现非等晕现象。给出了激光导引星带状拖影上两球面波之间的 Zernike 多项式展开系数角度相关函数。从相关性的角度分析了导引星高度、大气湍流强度以及接收望远镜口径对激光导引星带状拖影的非等晕性的影响。此外,基于激光导引星倾斜探测方案的非等晕限制,给出了 Na 层激光导引星倾斜量探测方案中的辅助望远镜视场限制。

**关键词** 自适应光学;非等晕性;角度相关性;激光导引星;倾斜量;Zernike 多项式

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201434.0401002

## Anisoplanatism in the Tip-Tilt Determination of the Laser Guide Star

Huang Kai<sup>1,2</sup> Zhou Yu<sup>1</sup> Chang Xiang<sup>1</sup> Zhai Dongsheng<sup>1</sup> Xiong Yaoheng<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences, Kunming, Yunnan 650011, China)

<sup>2</sup> University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** Traditional laser guide star (LGS) is difficult to detect the variance of atmospheric tilt because of the limitation of laser transmitter and receiver light path. An important solution is to use auxiliary telescopes to detect the LGS from the side, in order to single out the information of atmospheric tilt from the observed LGS strip. It leads to the phenomenon of anisoplanatism with the increase of the length of LGS strip. The Zernike coefficient correlations between two spherical waves coming from the LGS strip are developed. From the point of correlation, the effect of the altitude of LGS, atmospheric turbulence and the caliber of the receiving telescope on the anisoplanatism of the LGS strip is analyzed. Furthermore, based on the anisoplanatism limitation of the tip-tilt determination concept, the request of field of view (FOV) of auxiliary telescope to view the sodium LGS is presented.

**Key words** adaptive optics; anisoplanatism; angular correlation; laser guide star; gradient; Zernike polynomials

**OCIS codes** 010.1080; 010.1290; 110.0115; 010.1330

## 1 引 言

激光导引星(LGS)的提出是为了解决自适应光学系统在探测暗弱目标时的局限性<sup>[1]</sup>。它将激光信标发射到暗弱目标的等晕区范围内,利用激光信标实时探测波前误差,通过长时间曝光得到暗弱目标的高分辨率图像。而传统激光导引星的限制是难以探测波前畸变的倾斜量信息,其主要原因是在大气冻结时间内,激光导引星的光束上下往返经过大气层,正好经历了方向相反的大气倾斜,故波前倾斜可以相互抵消<sup>[2]</sup>。目前大多数的解决方案都是在目标

的倾斜等晕角(比高阶等晕角大一个数量级)范围内寻找一颗自然导引星(NGS)来提供目标的倾斜校正量<sup>[3-4]</sup>。为了完全摆脱自然导引星的束缚,进一步提高自适应光学观测的天空覆盖率,多国的研究人员提出了众多测量激光导引星本身倾斜量的方案<sup>[5-8]</sup>。其中多数方案都是利用主望远镜发射激光束,辅助望远镜观测激光导引星的到达角起伏,从而打破激光上下行光路重叠现象,以解决波前倾斜抵消的问题。辅助望远镜观测到的激光束有一定拖影长度的带状激光。随着激光带拖影长度的增加,必然导

**收稿日期:** 2013-10-21; **收到修改稿日期:** 2013-12-12

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金(11103070)

**作者简介:** 黄 凯(1987—),男,博士研究生,主要从事自适应光学天文应用方面的研究。E-mail: hklobo@ynao.ac.cn

**导师简介:** 熊耀恒(1955—),男,博士,研究员,主要从事天文光学、空间目标与空间碎片的光电探测等方面的研究。

E-mail: xyh@ynao.ac.cn

致其出现非等晕现象。非等晕性表征的是光场相关性的减小,限制了自适应光学系统的性能<sup>[9-10]</sup>。

本文从倾斜相关性的角度分析了激光拖影的非等晕限制。从辅助望远镜激光导引星倾斜探测的几何位置关系的角度,利用 Zernike 多项式展开系数给出了导引星之间的角度相关函数。针对不同的大气湍流强度以及望远镜接收口径与视场,给出了不同高度激光导引星的数值计算结果,分析了利用统计平均理论探测 Na 层激光导引星时,辅助望远镜的视场限制。

## 2 导引星探测几何位置关系及 Zernike 系数相关函数表达式

激光导引星倾斜探测的布局方案如图 1(a)所示,主望远镜发射激光对准目标,辅助望远镜从侧面对激光导引星带进行观测。辅助望远镜观测到的激光带会在激光上行光路的大气湍流影响下整体抖动,这个抖动量反映了激光上行光路的大气湍流倾斜信息。但是,由于受到激光导引星带到辅助望远镜之间的大气湍流影响,激光拖影的整体抖动同时受上行和下行湍流的倾斜影响。由于不同位置的激光到达辅助望远镜经历了不同的湍流,Belen'kii<sup>[5]</sup>

把激光上行倾斜抖动量设为  $T_{up}$ ,下行倾斜抖动量设为  $T_{down}$ ,同时认为激光带不同位置的  $T_{up}$  相同,  $T_{down}$  是与位置有关的变量,这可以用角度非等晕性来解释。Belen'kii 分析得出,当激光拖影长度增加,直到激光带两端倾斜相关性下降到  $e^{-1}$  以下时,  $T_{up} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [T_{up} + T_{down}(n)]$ ,  $N$  为激光导引星拖影分段采样的数量,即对激光带的倾斜抖动求统计平均,就能得到上行光路的湍流倾斜信息。基于此考虑,利用 Zernike 多项式分析激光导引星拖影的相关性,并利用相关性限制条件(相关系数小于  $e^{-1}$ ) 来确定接受望远镜的视场限制。

如图 1(b)所示,在不考虑上行湍流对探测的影响时,将激光带上不同的点单独看作一个点状激光导引星,激光导引星带上任意一点激光导引星的波前表达式为

$$\phi_n(R_n \boldsymbol{\rho}_n) = \sum_{j=2}^{\infty} a_{nj} \times Z_j(\boldsymbol{\rho}_n), \quad (1)$$

式中  $Z_j(\boldsymbol{\rho}_n)$  为 Zernike 多项式,  $\boldsymbol{\rho}$  为单位位置矢量,  $j$  为模序数,  $a_{nj}$  为 Zernike 多项式各阶模式系数。如图 1(b)所示,角间距为  $\theta$  的两颗激光导引星,其 Zernike 系数角度相关函数可表示为

$$\langle a_{1j}(\theta) a_{2j}(0) \rangle = \int d^2 \boldsymbol{\rho}_1 \int d^2 \boldsymbol{\rho}_2 W(\boldsymbol{\rho}_1) Z_j(\boldsymbol{\rho}_1) W(\boldsymbol{\rho}_2) Z_j(\boldsymbol{\rho}_2) C(R_1 \boldsymbol{\rho}_1, R_2 \boldsymbol{\rho}_2), \quad (2)$$

式中  $W(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 1/\pi, & |\boldsymbol{\rho}| \leq 1 \\ 0, & |\boldsymbol{\rho}| > 1 \end{cases}$

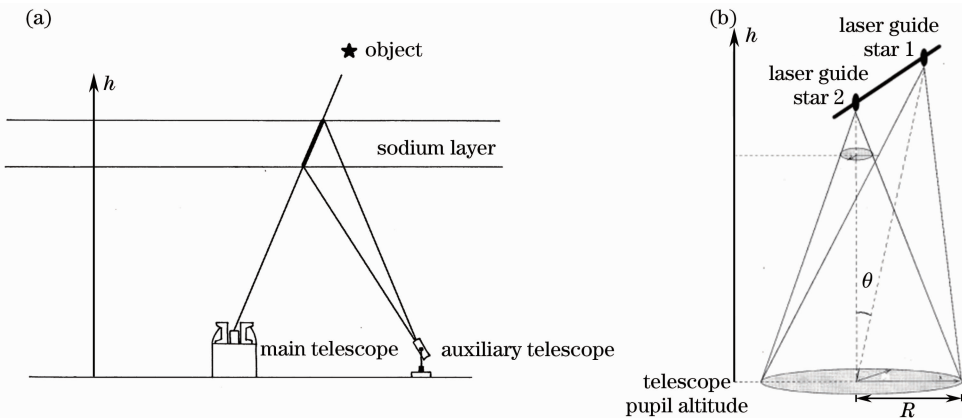


图 1 辅助望远镜探测 LGS 方案的几何布局图。(a)总体布局;(b)点状激光导引星

Fig. 1 Geometric layout of project for LGS detected with auxiliary telescope. (a) General layout; (b) punctiform LGS

接收望远镜半径为  $R$ ,激光导引星的光路半径是与高度  $h$  有关的函数,即  $R_n = R \times (L_n - h) / L_n$ ,  $L_n$  为第  $n$  个激光导引星的高度,  $C(R_1 \boldsymbol{\rho}_1, R_2 \boldsymbol{\rho}_2)$  是相位协方差函数,将波前的相位起伏看作是均值为 0

的高斯随机变量,那么

$$C(R_1 \boldsymbol{\rho}_1, R_2 \boldsymbol{\rho}_2) = \langle \phi_1(\boldsymbol{\rho}) \phi_2(\boldsymbol{\rho} + \Delta \boldsymbol{\rho}) \rangle, \quad (3)$$

$$\Delta \boldsymbol{\rho} = \theta h \boldsymbol{l} + R_1 \boldsymbol{\rho}_1 - R_2 \boldsymbol{\rho}_2, \quad (4)$$

式中  $\boldsymbol{l}$  为望远镜孔径处单位位置矢量。Noll<sup>[11]</sup> 给出

了 Zernike 多项式的傅里叶变换, 并得到

$$W(\boldsymbol{\rho})Z_j(\boldsymbol{\rho}) = \int d^2\mathbf{K}Q_j(K, \varphi)\exp(-2i\pi\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\rho}), \quad (5)$$

式中  $Q(\mathbf{K})$  和  $Z(\boldsymbol{\rho})$  为傅里叶变换对, 且  $K = |\mathbf{K}|$ ,

$$Q_j(K, \varphi) = \frac{\sqrt{p+1}J_{p+1}(2\pi K)}{\pi K} \times \begin{cases} (-1)^{\frac{p-q}{2}} i^q \sqrt{2} \cos(q\varphi), & j \text{ is even and } q \neq 0 \\ (-1)^{\frac{p-q}{2}} i^q \sqrt{2} \cos(q\varphi), & j \text{ is odd and } q \neq 0, \\ (-1)^{p/2}, & q = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中  $J_{p+1}(2\pi K)$  为第一类贝塞尔函数,  $q, p$  分别是多项式的角向频率数和径向频率数。

将(5)式代入(2)式得

$$\langle a_{1j}(\theta)a_{2j}(0) \rangle = \int d^2\mathbf{K}_1 \int d^2\mathbf{K}_2 Q_j(\mathbf{K}_1)Q_j^*(\mathbf{K}_2) \times \int d^2\boldsymbol{\rho}_1 \int d^2\boldsymbol{\rho}_2 \exp[2i\pi(\mathbf{K}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{K}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1)] \times C(\theta\mathbf{l} + R_1\boldsymbol{\rho}_1 - R_2\boldsymbol{\rho}_2). \quad (7)$$

为了化解(7)式积分, 设

$$\xi_1(h) = R_1(h)/R, \quad \xi_2(h) = R_2(h)/R, \quad (8)$$

$$\frac{\boldsymbol{\eta}(h)}{\xi_1(h)} = \frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1, \quad (9)$$

故

$$\langle a_{g_{1j}}(\theta)a_{g_{2j}}(0) \rangle = \int d^2\mathbf{K}_1 \int d^2\mathbf{K}_2 Q_j(\mathbf{K}_1)Q_j^*(\mathbf{K}_2) \times \int d^2\frac{\boldsymbol{\eta}(h)}{\xi_1(h)} \exp\left\{2i\pi\left[\mathbf{K}_1\cdot\frac{\boldsymbol{\eta}(h)}{\xi_1(h)}\right]\right\} \times C[\theta\mathbf{l} + R\boldsymbol{\eta}(h)] \times \int d^2\boldsymbol{\rho}_2 \exp\left\{2i\pi\boldsymbol{\rho}_2\left[\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1\cdot\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}\right]\right\}, \quad (10)$$

(10)式最后一个积分是单位脉冲函数的积分形式, 只有当  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1\cdot\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}$  时, (10)式才能存在。所以, 将  $\mathbf{K}_2$

替换为  $\mathbf{K}_1\cdot\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}$  得

$$\langle a_{1j}(\theta)a_{2j}(0) \rangle = \int d^2\mathbf{K}_1 Q_j(\mathbf{K}_1)Q_j^*\left[\mathbf{K}_1\cdot\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}\right] \times \int d^2\frac{\boldsymbol{\eta}(h)}{\xi_1(h)} \exp\left\{2i\pi\left[\mathbf{K}_1\cdot\frac{\boldsymbol{\eta}(h)}{\xi_1(h)}\right]\right\} \times C[\theta\mathbf{l} + R\boldsymbol{\eta}(h)]. \quad (11)$$

由于自相关函数  $C[\theta\mathbf{l} + R\boldsymbol{\eta}(h)]$  和功率谱呈一对傅里叶关系<sup>[12]</sup>, 因此,

$$\langle a_{1j}(\theta)a_{2j}(0) \rangle = \frac{1}{R^2} \int d^2\mathbf{K}_1 Q_j(\mathbf{K}_1)Q_j^*\left[\mathbf{K}_1\cdot\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}\right] \exp\left[\frac{2i\pi\theta\mathbf{K}_1\mathbf{l}}{R\xi_1(h)}\right] \Psi_\beta\left[\frac{K}{R\xi_1(h)}\right]. \quad (12)$$

采用文献[13]提到的规格化相位功率谱, 对于单一层湍流, 其相位功率谱为

$$\Psi_\beta\left[\frac{K}{R\xi_1(h)}\right] = A_\beta D_\beta k^2 C_n^2(h) K^{-\beta} dh, \quad (13)$$

式中  $\beta$  为规格化大气湍流相位功率谱空间频率的指数下降因子, 对于科尔莫哥罗夫谱,  $\beta = 11/3$ ,  $C_n^2(h)$  为折射率结构常数,  $k$  为波数,  $k = 2\pi/\lambda$ , 其中  $\lambda$  为激光波长,  $A_\beta$  和  $D_\beta$  为归一化系数, 具体系数表达式见文献[13]。

将(6)式和(13)式代入(12)式得

$$\langle a_{1j}(\theta)a_{2j}(0) \rangle = (p+1)\pi^{-2} A_\beta D_\beta k^2 R^{\beta-2} \times \int_0^L \xi_1(h)^{\beta-1} \xi_2(h) C_n^2(h) dh \times \int_0^\infty dK K^{-(\beta+1)} J_{p+1}(2\pi K) J_{p+1}\left[2\pi K \frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}\right] \times s_{p,q} \left\{ 2\pi \left( J_0\left[\frac{2\pi\theta h K}{R\xi_1(h)}\right] + k_j J_{2q}\left[\frac{2\pi\theta h K}{R\xi_1(h)}\right] \right) \right\}, \quad (14)$$

$$s_{p,q} = \begin{cases} 1, & q = 0 \\ (-1)^{p-q}, & q \neq 0 \end{cases}, \quad k_j = \begin{cases} 0, & p = 0 \\ (-1)^j, & p \neq 0 \end{cases}.$$

本文的结果相比于利用自然导引星推导出来的结果多出一个传播因子:  $\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}$ , 这是由于考虑了两颗信

标不同高度与角间距的影响而引入的。这也导致了积分中的第一类贝塞尔函数不满足 Tyler<sup>[14]</sup> 求解贝塞尔函数积分的表达式  $G_{lp}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty dt t^\alpha J_l(t) J_q(t) J_q(\beta t)$ 。将  $H(x, y) = \int_0^\infty dK K^{-(\beta+1)} J_{p+1}(K) J_{p+1}(Ky) J_{2q}(Kx)$  形式的积分利用泰勒级数展开为<sup>[15]</sup>

$$H(x, y) = y^{p+1} \{ H_1(x, p+1, q, \beta+1) - H_1(x, p+1, q, \beta-1) \times [B_2 + (2p+4)B_3 + 4(p+3)(p+4)B_4] + H_2(x, p+1, q, \beta) [B_1 + (2p+3)B_2 + 4(p+3)(p+2)B_3 + 8(p+4)(p+3)(p+2)B_4] + H_1(x, p+1, q, \beta-3)B_4 - H_2(x, p+1, q, \beta-2) [B_3 + 4(p+3)B_4] \} + E_4(x, p+1, q), \quad (15)$$

式中

$$H_1(x, p+1, q, \beta) = \int_0^\infty dK K^{-\beta} J_{p+1}(K) J_{p+1}(K) J_{2q}(xK), \quad (16)$$

$$H_2(x, p+1, q, \beta) = \int_0^\infty dK K^{-\beta} J_{p+1}(K) J_{p+2}(K) J_{2q}(xK), \quad (17)$$

$$B_m = (-1)^m (y^2 - 1)^m / (m! 2^m), \quad (18)$$

$E_4(x, p+1, q)$  是泰勒级数展开的四阶误差。 $H_1$ 、 $H_2$  都符合 Tyler 求解贝塞尔函数积分的表达式，故能顺利地求解出不同高度与角间距的激光导引星 Zernike 多项式各阶系数的相关函数。

给出归一化的相关函数：

$$F_{q,p,\theta} = \frac{\langle a_{1j}(\theta) a_{2j}(0) \rangle}{\langle a_j^2 \rangle} = \frac{\int_0^L \xi_1(h)^{\beta-1} \xi_2(h) C_n^2(h) I_{p,q,\beta} \left[ \frac{\theta h}{R \xi_1(h)}, \frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)} \right] dh}{\int_0^L \xi(h)^\beta C_n^2(h) I_{n,m,\beta}(0, 1) dh}, \quad (19)$$

$$I_{p,q,\beta}(x, y) = \int_0^\infty dK K^{-(\beta+1)} J_{n+1}(K) J_{n+1}(Ky) \times s_{p,q} \{ 2\pi [J_0(Kx) + k_j J_{2q}(Kx)] \}. \quad (20)$$

将(19)式中  $\xi_1(h)$ 、 $\xi_2(h)$  同时设为 1，这样就得到了无穷远的自然导引星与有限远的激光导引星的归一化相关函数。其结果与文献[13]给出的自然导引星和激光导引星 Zernike 多项式系数归一化相关函数一致。

波前为

$$\phi_0(R\rho) = \sum_{j=2}^\infty a_{0j} \times Z_j(\rho). \quad (21)$$

考虑自适应光学系统校正了  $J$  阶波前误差的情况下，残余相位方差  $\sigma^2(J, \theta)$  为

$$\sigma^2(J, \theta) = \int d^2\rho W(\rho) \langle [\phi_0(R\rho) - \phi_n(R_n\rho, \theta, J)]^2 \rangle. \quad (22)$$

由于 Zernike 多项式的正交性，在广义平稳的条件下，

### 3 导引星探测波前倾斜引起的非等晕误差

利用 Zernike 多项式系数展开，目标星的入射

$$\sigma^2(J, \theta) = \sum_{j=J+1}^\infty \langle a_{0j}^2 \rangle + \sum_{j=2}^J [\langle a_{0j}^2 \rangle + \langle a_{nj}^2 \rangle - 2\langle a_{0j} a_{nj}(\theta) \rangle], \quad (23)$$

式中  $\sum_{j=J+1}^\infty \langle a_{0j}^2 \rangle$  为未被校正的高阶模式误差， $\sum_{j=2}^J [\langle a_{0j}^2 \rangle + \langle a_{nj}^2 \rangle - 2\langle a_{0j} a_{nj}(\theta) \rangle]$  是利用激光导引星对前  $J$  阶模式校正以后，其非等晕性引起的误差。如果利用一颗与目标相距  $\epsilon$  角度的自然导引星探测倾斜分量，其残余相位方差为

$$\sigma_1^2(J, \theta, \epsilon) = \sum_{j=J+1}^\infty \langle a_{0j}^2 \rangle + 2 \sum_{j=2}^3 [\langle a_{0j}^2 \rangle - \langle a_{0j} a_{0j}(\epsilon) \rangle] + \sum_{j=4}^J [\langle a_{0j}^2 \rangle + \langle a_{nj}^2 \rangle - 2\langle a_{0j} a_{nj}(\theta) \rangle], \quad (24)$$

式中自然导引星由于角度分离引起的倾斜非等晕误差为

$$\sigma_{\text{NGS-tilt},1}^2 = 2 \sum_{j=2}^3 [\langle a_{0j}^2 \rangle - \langle a_{0j} a_{0j}(\epsilon) \rangle]. \quad (25)$$

如果利用一颗与目标相距  $\theta$  角度的激光导引星探测倾斜分量,其残余相位方差为

$$\sigma^2(J, \theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \langle a_{0j}^2 \rangle + \sum_{j=2}^3 [\langle a_{0j}^2 \rangle + \langle a_{nj}^2 \rangle - 2\langle a_{0j} a_{nj}(\theta) \rangle] + \sum_{j=4}^J [\langle a_{0j}^2 \rangle + \langle a_{nj}^2 \rangle - 2\langle a_{0j} a_{nj}(\theta) \rangle], \quad (26)$$

式中激光导引星引起的倾斜非等晕误差为

$$\sigma_{\text{LGS-tilt},2}^2 = \sum_{j=2}^3 [\langle a_{0j}^2 \rangle + \langle a_{nj}^2 \rangle - 2\langle a_{0j} a_{nj}(\theta) \rangle]. \quad (27)$$

## 4 数值计算结果

对于大气模型,采用 Hufnagel 湍流结构常数剖面模型<sup>[16]</sup>

$$C_n^2(h) = 2.72 \times 10^{-16} \left[ 3v^2 \left( \frac{h}{10} \right)^{10} \exp(-h) \right] + 10^{-16} (h/1.5)^{-2/3}, \quad (28)$$

式中  $v$  是风速,应该是与海拔高度相关的量。为了计算方便, $v$  将用常数代替。利用中国科学院云南天文台 1.2 m 望远镜的参数,并假设湍流大气层高度为 0~25 km。

图 2(a)、(b)是根据(19)式计算得到的径向频率数  $p$  分别等于 1~9 时,相同高度的两颗激光导引星随着角间距增加,其归一化相关函数的变化曲线。图 2(a)为 Na 导星在 90 km 高度的情况,图 2(b)为 Rayleigh 导星在 15 km 高度的情况。图 2 中由上至下的曲线分别代表  $p=1\sim 9$ ,  $p=1$  是倾斜分量,其

他的是高阶分量。在 Na 导星的情况下,倾斜相关函数随着角间距增大下降缓慢,而高阶相关函数很快下降到  $e^{-1}$  以下。相比于 Na 导星的情况, Rayleigh 激光导引星各阶相关函数下降的幅度都有所减小,这是由于随着激光导引星高度的增加,相同角间距的情况下,导引星距离也相应地增加,这样导致两颗导星到同一接收口径的光路重合度降低。以上两个结果,都是在科尔莫哥诺夫湍流模式( $\beta=11/3$ )下计算得出的。

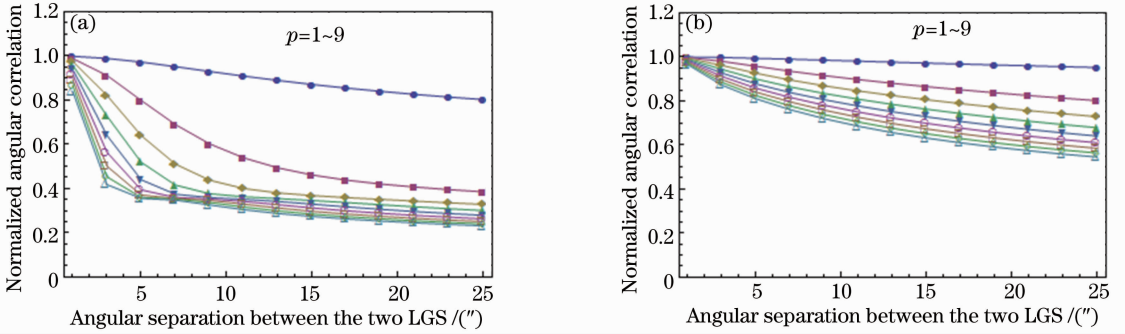


图 2 LGS 归一化相关函数随导引星之间的角间距变化曲线。(a) Na 导星在 90 km; (b) Rayleigh 导星在 15 km  
Fig. 2 Changing curves of normalized correlation function with the change of angle spacing of guide star. (a) Na guide star at 90 km; (b) Rayleigh guide star at 15 km

利用辅助望远镜对激光导引星的观测,主要目的是分离出倾斜量信息,接下来主要考虑倾斜分量。由(19)式可以看出,大气湍流相位功率谱空间频率的指数下降因子  $\beta$  对归一化相关函数是有影响的。图 3 给出了  $\beta$  分别为 9/3、10/3、11/3、12/3 时,倾斜相关函数随角间距的变化曲线。随着指数下降因子  $\beta$  的减小,归一化倾斜相关函数随角间距增大而变小的趋势越明显。当  $\beta > 4$  时,湍流相位功率谱需要引入湍流外尺度参数,在这里不做考虑。经过计算,

(28)式 Hufnagel 湍流结构常数剖面模型中的风速  $v$  也对倾斜相关函数有影响。图 4 给出了风速  $v$  不同时,倾斜相关函数随角间距的变化曲线,由图可知,风速越大,归一化倾斜相关函数随角间距增加下降得越来越快。风速越快,湍流结构常数也越大,这说明相同的角间距湍流越强烈倾斜相关性就越差。

图 5 给出不同的接收口径对应的倾斜相关函数随角间距的变化曲线。图中的曲线显示,望远镜接收口径越大,倾斜相关函数随角间距下降的趋势越

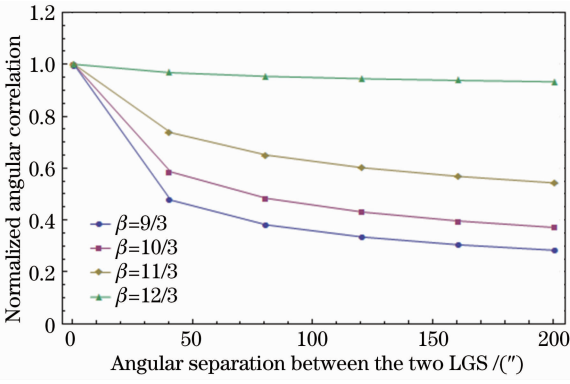


图 3 不同指数下降因子  $\beta$  对应的归一化相关函数随激光导引星角间距变化曲线

Fig. 3 Changing curves of normalized angular correlation functions for different exponential decline factors  $\beta$  with the change of LGS angular separation

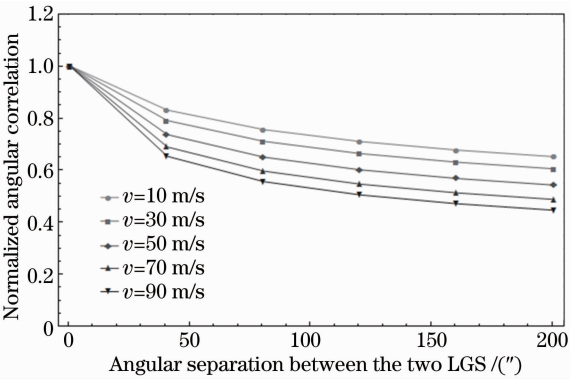


图 4 不同风速  $v$  对应的归一化相关函数随激光导引星角间距变化曲线

Fig. 4 Changing curves of normalized angular correlation functions for different air speeds  $v$  with the change of LGS angular separation

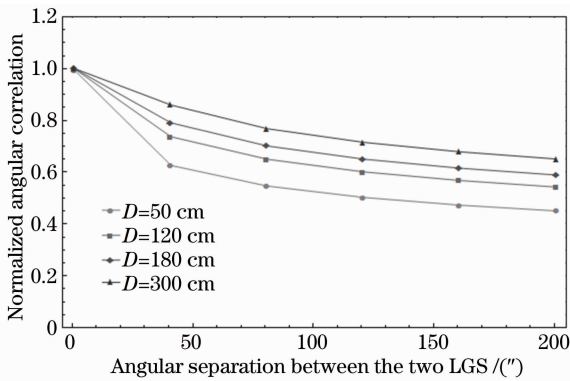


图 5 不同望远镜接收口径  $D$  对应的归一化相关函数随激光导引星角间距变化曲线

Fig. 5 Changing curves of normalized angular correlation functions for different apertures of the receiver-telescope apertures  $D$  with the change of LGS angular separation

平缓,这说明同样的大气条件以及同样的激光导引星布局,望远镜口径越小,两颗激光导引星之间的倾斜相关性越小。这个结果表明,对倾斜相关性的影响,不仅取决于大气环境的影响,望远镜的接收口径也是非常重要的指标。

为了比较激光导引星与自然导引星在倾斜探测中引入的误差大小,同时对(25)、(27)式除以目标星的模式系数方差  $\langle a_{0j}^2 \rangle$ ,以考察非等晕误差对目标补偿效果的影响。其表达式为

$$\sigma_{\text{NGS-tilt},1}^2 = 2 \sum_{j=2}^3 \left[ 1 - \frac{\langle a_{0j} a_{0j}(\epsilon) \rangle}{\langle a_{0j}^2 \rangle} \right], \quad (29)$$

$$\sigma_{\text{LGS-tilt},2}^2 = \sum_{j=2}^3 \left[ 1 + \frac{\langle a_{mj}^2 \rangle}{\langle a_{0j}^2 \rangle} - \frac{2 \langle a_{0j} a_{mj}(\theta) \rangle}{\langle a_{0j}^2 \rangle} \right]. \quad (30)$$

以 90 km 高的 Na 导引星为例,设接收望远镜的口径为 50 cm,分别根据(29)式和(30)式计算出归一化倾斜非等晕误差随角间距的变化,结果如图 6 所示。自然导引星与目标角间距为 0 时,倾斜非等晕误差也为 0,而激光导引星与目标角间距为 0 时,还存在相当的倾斜非等晕误差。这是因为角间距为 0 时,角度非等晕误差为 0,而激光导引星还存在聚焦非等晕性的影响,所以有非等晕误差的存在。当倾斜非等晕误差大于 1 时,倾斜校正是无效的。自然导引星校正有效的区域约为  $40''$ ,激光导引星校正有效的区域约为  $25''$ 。这说明自然导引星相比激光导引星探测倾斜量的优势在于其有效探测区域比激光导引星大,而且只要目标距离自然导引星越近,非等晕性误差越小;而激光导引星倾斜量探测的优势在于其不受目标位置的影响,可以指向距离目标足够近的天区,实现真正的全天覆盖。

以上考虑的都是激光导引星高度相同的情况,如图 1 所示给出的利用辅助望远镜对激光导引星进行探测布局图,激光导引星带上不同的点不仅有一定的角间距,而且高度也是不同的,因此,要考虑不同高度的两颗激光导引星倾斜相关函数随着角间距的增加的变化情况。Na 层主要分布在大气层海拔 80~110 km 处<sup>[17]</sup>。图 8 给出了激光导引星高度分别为 80 km 和 110 km,以及激光导引星高度同为 80 km 时的归一化倾斜相关函数的变化趋势图。图中实线代表激光导引星同为 80 km 时的倾斜相关函数变化趋势,虚线代表激光导引星高度分别为 80 km 和 110 km 时的倾斜相关函数变化趋势;平行于横坐标的虚线等于  $e^{-1}$ 。由图 7 可以看出,不同高度的激光导引星归一化倾斜相关系数比相同高度的激光导引星小 0.1 左右,且随着激光导引星角间

距的增大,这种差距有缩小的趋势。文献[5]指出,激光导引星带上不同的点的倾斜相关系数小于  $e^{-1}$  就能利用统计平均的方法分离出激光上行光路的湍流倾斜分量。设辅助望远镜的口径为 50 cm,即图 7

所示的情况,此时相关系数等于  $e^{-1}$  对应的角间距为  $115''$ 。这意味着如果辅助望远镜的视场远大于  $115''$ ,就能利用统计平均的方案实现激光导引星倾斜量的分离。

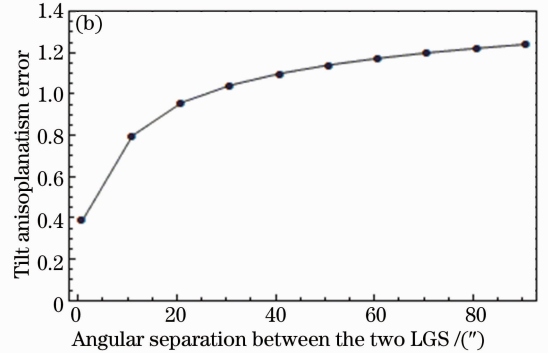
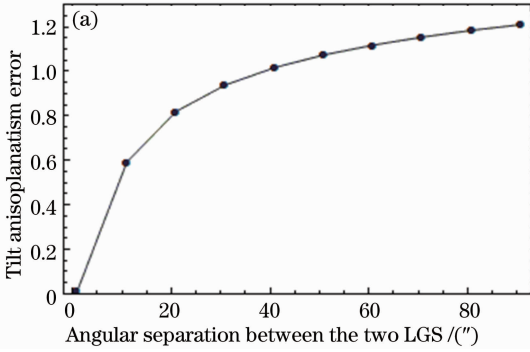


图 6 倾斜非等晕误差与角间距的关系曲线。(a)自然导引星;(b)90 km 高 Na 激光导引星

Fig. 6 Relation curves between tilt anisoplanatism error and the angular separation. (a) Natural guide star; (b) Na laser guide star at 90 km

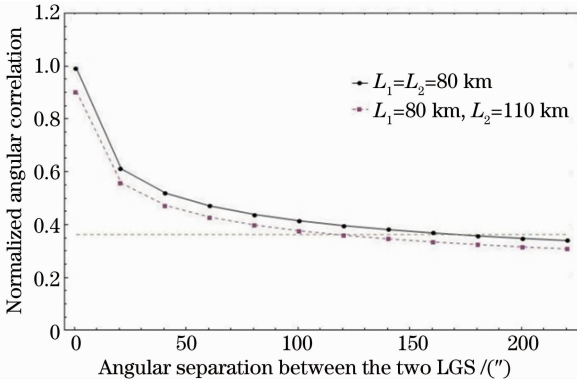


图 7 不同高度激光导引星倾斜相关函数随角间距变化图  
Fig. 7 Changing curves of tilt correlation functions for LGS in different heights with the change of angular separation

## 5 结 论

给出了不同高度激光导引星的 Zernike 多项式系数角度相关函数,在结果中引入反映激光导引星高度差的  $\frac{\xi_2(h)}{\xi_1(h)}$  参数。在没有考虑自适应光学系统的探测误差以及校正误差的情况下,分析了 Hufnagel 湍流结构常数剖面模型中的风速、规格化大气湍流相位功率谱空间频率的指数下降因子、Zernike 多项式径向频率数、激光导引星高度以及接收望远镜口径对 Zernike 多项式角度相关函数的影响。结果表明:在相同的湍流强度以及角间距下,激光导引星的高度越高,其相关性越差;在相同的角间距和激光导引星高度下,大气中风速越快,激光导引星之间的相关性越小;而且,随着规格化大气湍流相

位功率谱空间频率的指数下降因子的减小,激光导引星之间的相关性也会变小。利用 Zernike 多项式系数相关函数,计算了自然导引星与激光导引星探测大气倾斜时引入的非等晕误差,并总结了它们各自的优势。讨论了辅助望远镜观测激光带时激光带不同部分的激光之间的倾斜相关性,并结合 Belen'kii 的统计平均理论,得到了利用 50 cm 辅助望远镜测量激光导引星倾斜分量的视场要求。

从激光导引星的倾斜探测手段出发,分析了激光导引星之间的相关性联系。分析结果可以作为利用辅助望远镜对激光导引星倾斜量探测的理论依据,并给出了辅助望远镜的视场限制。对于多重激光导引星系统,本文的讨论可对其导引星数量以及分布的设计提供参考和指导。

## 参 考 文 献

- 1 J W Hardy. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes [M]. New York: Oxford University Press, 1998.
- 2 Xiong Yaoheng. Laser guide stars for adaptive optical systems [J]. Progress in Astronomy, 2000, 18(1): 1-8.  
熊耀恒. 用于自适应光学系统的激光导引星[J]. 天文学进展, 2000, 18(1): 1-8.
- 3 A J Longmore. Laser guide star plans and related instrumentation for the WHT [J]. New Astronomy Reviews, 2001, 45(1-2): 63-68.
- 4 P L Wizinowich, D Le Mignant, A H Bouchez, et al.. The W. M. Keck observatory laser guide star adaptive optics system: overview [J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2006, 118(840): 297-309.
- 5 M S Belen'kii. Tilt angular anisoplanatism and a full-aperture tilt-measurement technique with a laser guide star [J]. Appl Opt, 2000, 39(33): 6097-6108.
- 6 S Eposito, R Ragazzoni, A Riccardi. Auxiliary telescope absolute laser tilt determination: the Rayleigh case [C]. SPIE.

- 1997, 3126: 476–480.
- 7 R Ragazzoni, S Esposito, E Marchetti. Auxiliary telescopes for the absolute tip-tilt determination of a laser guide star [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1995, 276(4): 76–78.
- 8 A Riccardi, S Esposito, R Ragazzoni. Sub-pupil estimation of the laser guide star tilt term [C]. SPIE, 1997, 3126: 467–475.
- 9 Fan Chengyu, Song Zhengfang. The limit of anisoplanatism to laser-guide-stars [J]. Chinese J Lasers, 1996, 23(8): 722–726. 范承玉, 宋正方. 激光导引星非等晕性的限制[J]. 中国激光, 1996, 23(8): 722–726.
- 10 Chen Jingyuan, Zhou Yu, Chang Xiang, *et al.*. Unified method for anisoplanatism of adaptive optical systems [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(4): 0413001. 陈京元, 周钰, 常翔, 等. 研究自适应光学非等晕性的统一方法[J]. 中国激光, 2013, 40(4): 0413001.
- 11 R J Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. J Opt Soc Am, 1975, 66(3): 207–211.
- 12 J W Goodman. Statistical Optics [M]. New York: Science, 1985.
- 13 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning. Anisoplanatism limitations for low-order mode correction adaptive optical system [J]. Acta Optica Sinica, 2000, 20(11): 1486–1493. 饶长辉, 姜文汉, 凌宁. 低阶模式校正自适应光学系统的非等晕限制[J]. 光学学报, 2000, 20(11): 1486–1493.
- 14 G A Tyler. Analysis of propagation through turbulence; evaluation of an integral involving the product of three Bessel functions [J]. J Opt Soc Am A, 1990, 7(7): 1218–1223.
- 15 G Molodij, G Rousset. Angular correlation of Zernike polynomials for a laser guide star in adaptive optics [J]. J Opt Soc Am A, 1997, 14(8): 1949–1966.
- 16 R E Hufnagel. Propagation through Atmospheric Turbulence [M]. The Infrared Handbook, 1978. 6–31.
- 17 Yang Guotao, Liu Bingmo, Wang Jiamin, *et al.*. A study of sodium layer distribution over Wuhan, China based the LIDAR observation result [J]. Chinese J Geophysics, 2003, 46(5): 577–583. 杨国韬, 刘炳模, 王嘉珉, 等. 根据激光雷达观测结果研究中国武汉地区钠层的分布[J]. 地球物理学报, 2003, 46(5): 577–583.

栏目编辑: 王晓琰