

利用恒星闪烁测量等晕角的研究

于龙昆 沈红靖 旭 侯再红 吴毅

(中国科学院安徽光学精密机械研究所中国科学院大气成分与光学重点实验室, 安徽 合肥 230031)

摘要 利用恒星闪烁测等晕角是目前应用最广泛的等晕角测量方法。基于理论分析, 引入了更准确的计算公式, 通过公式推导、数值计算, 得出最佳探测孔径直径与非涅耳尺度相当, 分析了复色光的闪烁等效波长及湍流路径长度变化范围的问题, 讨论了等晕角与闪烁的比例系数 C 的计算问题。非涅耳数在范围 $0.5 \sim 1.1$ 时, 比例系数随非涅耳数的变化可用三次多项式进行拟合, 比例系数不能简单地取波长位于 500 nm 时的固定值, 需根据实际应用利用拟合的三次多项式来计算。

关键词 大气光学; 等晕角; 恒星闪烁; 非涅耳数

中图分类号 P412 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201434.0301001

Study on the Measurement of Isoplanatic Angle Using Stellar Scintillation

Yu Longkun Shen Hong Jing Xu Hou Zaihong Wu Yi

(Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei Anhui 230031, China)

Abstract Using stellar scintillation to measure isoplanatic angle θ_0 is now a widely used method. Based on the theoretical analyses, more accurate calculation formula is derived. With formula derivation and numerical simulation, it shows that the best aperture diameter is around Fresnel length. Equivalent wavelength of polychromatic scintillation and range of turbulence path length are analyzed, and the calculation of proportionality factor C of θ_0 and scintillation is discussed. Proportionality factor for Fresnel number in a range from 0.5 to 1.1 can be accurate fitting by cubic polynomials. Proportionality factor should not simply take a fixed value at a wavelength of 500 nm , while it should be calculated by the fitting formula in practical applications.

Key words atmospheric optics; isoplanatic angle; stellar scintillation; Fresnel number

OCIS codes 010.1290; 010.1330; 030.7060; 030.6600

1 引言

等晕角 θ_0 是激光大气传输、自适应光学、天文观测中的重要参量^[1-2], 它描述了有一定夹角的两束光波面之间的相关特征。等晕角的直接测量很困难, Loos 等^[3]提出了利用孔径平滑的恒星闪烁间接测量等晕角的方法, 其中探测孔径直径 D 选择为 10 cm ; Walters 等^[4-5]分别改进了这种方法并设计仪器实际测量了等晕角, 其中 Walters 等^[4]选择孔

径 D 为 11 cm , 而 Stevens^[5]选择孔径为外径 20 cm 的双环。等晕角也可通过实时反演的湍流廓线积分得到, 但该方法目前还不够成熟^[6]。利用恒星闪烁测量等晕角简单易行, 是目前广泛应用的等晕角测量方法, 如 ESO^[7] 在 Paranal、La Silla 天文台的等晕角测量, Dome C^[8], Dome A^[9] 南极天文台选址中的等晕角测量, 均采用恒星闪烁法。然而在实际测量中, 等晕角与恒星闪烁的转换公式大都采用的是

收稿日期: 2013-08-30; 收到修改稿日期: 2013-10-21

作者简介: 于龙昆(1987—), 男, 博士研究生, 主要从事激光大气传输光电测量技术方面的研究。

E-mail: ylk@mail.ustc.edu.cn

导师简介: 吴毅(1960—), 男, 博士, 研究员, 主要从事激光大气传输及光学参数特性方面的研究。

E-mail: wuyi@aiofm.ac.cn

近似公式,计算参数的选取没有给出严格的论证,如探测孔径、波长、比例系数等。

本文回顾了利用恒星闪烁测等晕角的理论背景,引入了更准确的计算公式,研究了计算参数的选取,主要包括探测孔径尺寸的选取、宽光谱信标光等效波长的选取、比例系数的计算,验证了新的参数选取方法的可行性。

2 基本理论分析

等晕角的理论表达式为^[1]

$$\theta_0 = [2.91k^2 \sec^{8/3} \gamma \int_0^L C_n^2(z) z^{5/3} dz]^{-3/5}, \quad (1)$$

式中 k 为光波波数, γ 为天顶角, C_n^2 为折射率结构常数, L 为湍流路径传播距离。Loos 等^[3]利用孔径平滑理论,得出孔径接收的相对光强起伏方差(即孔径闪烁)可近似表示为

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} \approx 0.528\pi^2 k^2 \int_0^L C_n^2(z) dz W(z, k, D), \quad (2)$$

式中 σ_S^2 表示光强起伏方差, S 表示孔径接收的总光强, $W(z, k, D)$ 为路径权重函数, 即

$$W(z, k, D) = \int_0^\infty \kappa^{-8/3} \sin^2\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) \left[\frac{2J_1(\kappa D/2)}{\kappa D/2}\right]^2 d\kappa, \quad (3)$$

式中 κ 为空间波数, J_1 为第一类一阶贝塞尔函数。选择合适的孔径直径 D , 可使路径权重函数匹配等晕角测量要求路径的三分之五次方, 基于测大气相干长度的差分像运动测量法(DIMM)^[10], 本文只考虑圆孔接收孔径。此时联立(1)~(3)式可得等晕角与孔径闪烁的关系式:

$$\theta_0 \approx C \left[\frac{\sigma_S^2}{S^2} \right]^{-3/5}, \quad (4)$$

式中 C 是与孔径、波长、湍流路径长度有关的比例常数。

(2)式是在弱光强起伏条件下,假设光强的相关系数 b_I 可用对数振幅起伏的相关系数 b_χ 替代时得出的, 即

$$b_I(\rho) = b_\chi(\rho), \quad (5)$$

式中 I 为光强, χ 为对数振幅起伏。在 Rytov 近似下,对数振幅起伏 χ 服从正态分布, 有

$$b_I(\rho) = \frac{\exp[4C_\chi(\rho)] - 1}{\exp[4C_\chi(0)] - 1} \approx \frac{4C_\chi(\rho)}{4C_\chi(0)} = b_\chi(\rho). \quad (6)$$

因而(2)式的近似条件即

$$\exp[4C_\chi(0)] - 1 \approx 4C_\chi(0) = 4\sigma_\chi^2. \quad (7)$$

该条件要求对数振幅起伏方差 σ_χ^2 远小于 1, 比 Rytov 近似条件 $\sigma_\chi^2 < 0.35$ 更为苛刻, 这给实际应用带来很大限制, (2)式的等号右边与孔径平滑的对数振幅起伏方差 $\sigma_{\chi_A}^2$ 有直接对应关系:

$$4\sigma_{\chi_A}^2 = 0.528\pi^2 k^2 \int_0^L C_n^2(z) dz W(z, k, D). \quad (8)$$

(8)式可通过 Sasiela^[11]的横向滤波理论得出。在 Rytov 近似下,孔径平滑的对数振幅起伏方差可表示为

$$\sigma_{\chi_A}^2 = 0.132\pi^2 k^2 \int_0^L dz C_n^2(z) \int_0^\infty \kappa f(\kappa) \sin^2\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) F(\kappa) d\kappa, \quad (9)$$

式中 $f(\kappa)$ 为规格化湍流谱, $F(\kappa)$ 为滤波函数; 将规格化的 Kolmogorov 湍流谱 $f(\kappa) = \kappa^{-11/3}$, 圆孔滤波函数 $F(\kappa) = \left[\frac{2J_1(\kappa D/2)}{\kappa D/2}\right]^2$ 代入(9)式即可得到(8)式。将(8)式替换(2)式, (4)式变为

$$\theta_0 \approx C(4\sigma_{\chi_A}^2)^{-3/5}. \quad (10)$$

众所周知,弱起伏条件下光强起伏服从对数正态分布; Vetelino 等^[12]在研究中强起伏条件下孔径平滑对光强起伏概率分布的影响时指出, 当孔径尺寸 D 大于空间相干长度 ρ_0 时, 光强起伏服从对数正态分布。利用恒星闪烁测等晕角, 接收孔径尺寸 D 一般大于 ρ_0 ($\rho_0 = r_0/2.1$), 因而等晕角测量仪接收的光强起伏服从对数正态分布, 有

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} = \exp(4\sigma_{\chi_A}^2) - 1, \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式可得

$$\theta_0 \approx C \left[\ln\left(1 + \frac{\sigma_S^2}{S^2}\right) \right]^{-3/5}. \quad (12)$$

与(4)式相比, (12)式在推导过程中少做了一次近似, 不需要满足近似条件(7)式, 因而应用范围更广, 计算结果更准确。

3 计算参数分析

(12)式的理论误差来自路径权重与 $z^{5/3}$ 的匹配偏差。作变量代换 $u = z/L, \kappa = \kappa D$, 并设 F_N 为菲涅耳数 $D^2/(\lambda L)$, (8)式简化为

$$4\sigma_{\chi_A}^2 = 8.448\pi^2 k^2 LD^{5/3} \int_0^1 C_n^2(uL) du \times \int_0^\infty \kappa^{-14/3} d\kappa J_1^2(\kappa/2) \sin^2\left(\frac{\kappa^2 u}{4\pi F_N}\right), \quad (13)$$

新的路径权重函数为

$$W(u, F_N) = \int_0^{\infty} \kappa^{-14/3} d\kappa J_1^2(\kappa/2) \sin^2\left(\frac{\kappa^2 u}{4\pi F_N}\right). \quad (14)$$

在合适的菲涅耳数下, (14)式可拟合成 $u^{5/3}$ 的形式:

$$W(u, F_N) \approx C_0(F_N) u^{5/3}. \quad (15)$$

将(13)、(15)式代入(1)式可得 $\theta_0 = C(4\sigma_{\lambda A}^2)^{-3/5}$, 其中比例系数 C 的表达式为

$$C = 7.49 \frac{F_N \lambda}{D} C_0^{3/5}(F_N). \quad (16)$$

(14)式表明路径权重与孔径与菲涅耳尺度的比值有关, 为此计算了不同菲涅耳数时路径权重 $W(u)$ 与 $u^{5/3}$ 的匹配偏差 e_{fit} , 匹配偏差计算方式为拟合标准误差除以拟合数据点的均值:

$$e_{\text{fit}} = \frac{\sqrt{[W(u_i) - C_0 u_i^{5/3}]^2}}{W(u_i)}, \quad (17)$$

式中 u_i 为归一化路径位置, $W(u_i)$ 为路径权重, $C_0 u_i^{5/3}$ 为路径权重的最小二乘拟合值, 计算结果如图 1 所示。

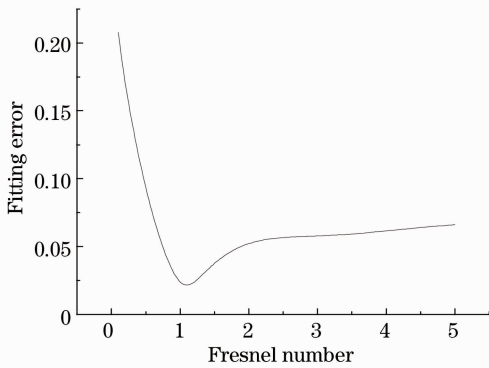


图 1 匹配偏差随菲涅耳数的变化

Fig.1 Fitting error versus Fresnel number

从图 1 看出, 在菲涅耳数不同时匹配偏差存在最小值, 为 2.17%, 菲涅耳数取值范围为 0.75 ~ 1.88 时, 匹配偏差小于 5%, 该范围称之为匹配范围; 数值计算表明, $D/(\lambda L)^{1/2} = 1.04$ 时路径权重与 $u^{5/3}$ 偏差最小, 称之为最佳匹配条件。

实际测量中孔径大小固定不变, 探测波长因观测恒星变化而变, 湍流路径长度 L 因观测仰角变化而变。为此数值计算了不同菲涅耳数时比例系数 C 的变化情况, 为了和 Walters 等^[4] 计算的比例系数 $C_w = 9.55 \times 10^{-7}$ rad 相比较, 计算中波长 λ 选择 500 nm, 孔径 D 选择 11 cm, 菲涅耳数的变化是由 L 引起的, 计算结果如图 2 所示。在最佳匹配条件下, 比例系数 $C = 9.58 \times 10^{-7}$ rad 与 C_w 基本一致。在菲涅

耳数为 1.3 时 C 有最大值, 小于 1.3 时 C 快速递增, 大于 1.3 时 C 缓慢递减。因而实际测量中需根据不同菲涅耳数取 C 值。

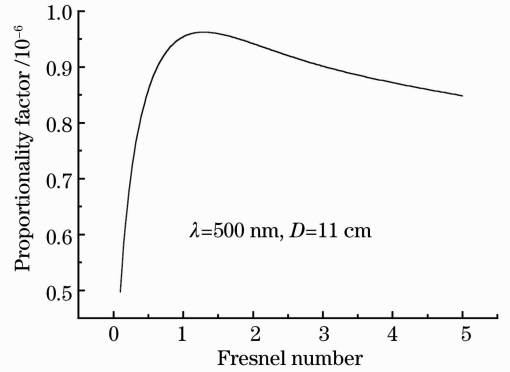


图 2 比例系数随菲涅耳数的变化

Fig.2 Proportionality factor versus Fresnel number

为满足信噪比的要求, 实际测量中接收的是具有一定谱宽的复色光, 它的光谱分布与星光、滤光片和探测器等的光谱特征有关; 瑞利散射强度与波长的四次方成反比, 天空背景辐射在短波段更强, 为了能在白天观测恒星, 等晕角测量仪接收的复色光光谱分布范围一般选择在长波段。为了计算比例系数 C , 了解转换得来的等晕角所处的波长, 寻求该复色光的等效波长, 所谓等效波长是指该波长的单色光闪烁量与实际接收的复色光闪烁量相等。

设 $R(\lambda)$ 为接收光强的归一化光谱响应函数,

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R(\lambda) d\lambda = 1, \text{ 复色光的路径权重可表示为}^{[13]}$$

$$W'_{\text{poly}}(z) = 4\pi^2 \int_0^{\infty} \kappa^{-8/3} \left[\mathcal{F}_{\text{im}}\left(\frac{\kappa^2 z}{8\pi^2}\right) \right]^2 d\kappa \left[\frac{2J_1(\kappa D/2)}{\kappa D/2} \right]^2, \quad (18)$$

式中与波长有关的量 $\mathcal{F}_{\text{im}}\left(\frac{\kappa^2 z}{8\pi^2}\right) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R(\lambda) \lambda^{-1} \cdot \sin\left(\frac{\kappa^2 z \lambda}{4\pi}\right) d\lambda$, 为光谱响应函数除以波长的傅里叶变换的虚部。等效波长即满足

$$k_{\text{eq}}^2 W(z, k_{\text{eq}}, D) = W'_{\text{poly}}(z), \quad (19)$$

式中 k_{eq} 为等效光波波数。根据该方法, 结合实际测量所选用的探测器、滤光片、恒星, 计算的等效波长 λ_{eq} 取值范围为 640 ~ 670 nm, 恒星色温降低, 等效波长增加。

湍流模型 SLC Day 和 SLC Night 认为高于地面 20.5 km 处光学湍流强度为零^[11], Hufnagel-Valley(H-V)模型通常认为高于地面 30 km 处光学湍流强度为零^[12]。为了确定用于拟合路径权重的

整层大气湍流积分高度 h , 计算了 H-V 模型下积分到不同高度的等晕角与积分到高度 100 km 时的等晕角的偏差 e_h , 偏差计算方式为

$$e_h = \frac{\theta_{oh}}{\theta_0} - 1, \quad (20)$$

式中 θ_{oh} 为积分到高度 h 的等晕角, θ_0 为积分到高度 100 km 的等晕角。图 3 为积分到 20 km 时偏差 e_h 与 H-V 模型两参数近地面湍流强度 A 、高空风速 W 的关系。从图中可看出积分高度为 20 km 时, 等晕角偏差不超过 2%, 偏差总为正值, 高空风速参数 W 越大, 偏差越大; 近地面湍流强度参数 A 对偏差影响很小。计算表明, 当积分高度为 25 km 时, 偏差不超过 0.15%。同时也计算了其他一些湍流模型下积分到 20 km 时的偏差, SLC Day 和 SLC Night 模型下的偏差分别为 1.82%、1.91%, Middle East 和 Greenwood 模型下的偏差分别为 5.18%、5.83%, 这些偏差对等晕角测量来说是可以接受的, 因此积分高度 h 的变化范围可以取在 20~30 km。湍流路径长度与积分高度的几何关系为

$$L = h \sec \gamma. \quad (21)$$

为满足 Rytov 近似条件, 通常要求 γ 小于 45° 。利用 (21) 式可得湍流路径长度变化范围为 20~42.4 km。

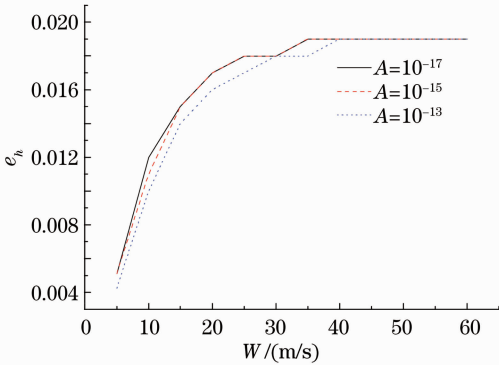


图 3 积分到 20 km 时等晕角的偏差与 H-V 模型参数 A 、 W 的关系

Fig. 3 Deviation of isoplanatic angle versus H-V turbulence model parameters A and W with the integral height of 20 km

基于上述等效波长、湍流路径长度的变化范围, 综合最佳匹配条件和实际仪器结构要求, 选取探测孔径直径 D 为 12 cm。运用 (15) 式, 菲涅耳数为 $D^2 \cos \gamma / (\lambda h)$ 。实际应用中, 等效波长和孔径大小均固定。为了满足最佳匹配条件, 假定积分高度 h 随天顶角 γ 的变化而变化, 由于积分高度 h 变化范围有限, 当天顶角 γ 大于一定值后, 菲涅耳数 $D^2 \cos \gamma / (\lambda h)$ 将减小, 由图 2 可知, 此时比例系数 C 随之减小。为了便于

在测量程序中利用天顶角数据计算相应的比例系数 C , 将 C (选定 $D=12$ cm, $\lambda=650$ nm) 在非涅耳数 0.5~1.1 范围内的数值拟合成三次多项式, 如图 4 所示。拟合均方差 σ_e 为 2.414×10^{-20} , 校正决定系数 K 为 0.99998, 拟合精度极高, 可用于计算程序中。为了使菲涅耳数在匹配范围内, 实际测量中应尽量选天顶角较小的恒星。

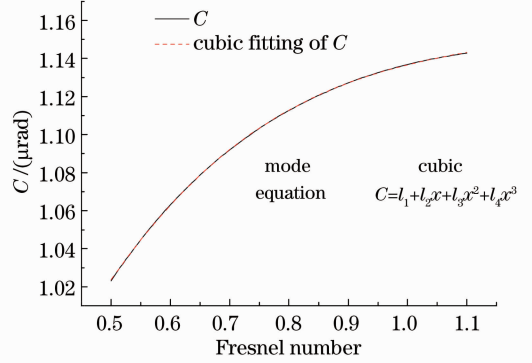


图 4 菲涅耳数在 0.5~1.1 之间的比例系数 C 以及 C 的三次多项式拟合

Fig. 4 Proportionality factor C versus Fresnel number from 0.5 to 1.1 and cubic fitting of C

应注意, 利用比例系数 C 计算的等晕角是等效波长处的等晕角, 可在计算程序中利用 (1) 式转到需要波长 (500 nm) 的等晕角。

4 计算参数验证

为了验证新的计算参数选取方法的有效性, 基于数值计算比较了某一典型条件下利用新方法 with 一般方法计算的等晕角理论误差。选取 H-V5/7 模型, 等效波长为 650 nm, 新方法 with 一般方法对应的计算参数如表 1 所示。

表 1 计算参数

Table 1 Calculation parameters

Calculation parameter	New method	Common method
D /cm	12	11
C /rad	1.14×10^{-6}	9.55×10^{-7}

根据所选参数利用 (9)、(11) 式数值计算得

$$\sigma_{\chi^2 \lambda}^2 = 7.51 \times 10^{-3}, \quad \frac{\sigma_S^2}{S^2} = 0.03, \quad (22)$$

代入到 (12)、(6) 式分别得到新方法计算的等晕角 $\theta_{0, \text{new}} = 6.82$, 一般方法计算的等晕角 $\theta_{0, \text{old}} = 7.83$ (对应波长 500 nm, 单位为 μrad), 显然 $\theta_{0, \text{new}}$ 更接近真实值 7 μrad , 由此验证了新方法的准确性与有效性。

5 结 论

对利用恒星闪烁测等晕角的理论公式和计算参数进行了深入研究。通过理论分析得出了更准确的计算公式,利用数值方法研究了实际测量中计算参数的选取问题。存在最佳探测孔径直径,它与菲涅耳尺度相当,对于接收复色光,应计算等效波长,H-V模型下,忽略高于20 km以上的光学湍流,积分得到的等晕角偏大不超过2%,用于计算比例系数的整层大气湍流积分高度可选范围为20~30 km。实际应用中,等晕角与闪烁的比例系数与观测恒星、观测天顶角等引起菲涅耳数变化的量有关,比例系数随菲涅耳数的变化关系可用三次多项式拟合。利用恒星闪烁测等晕角的误差有方法理论误差和闪烁测量误差,用上述结果可以减小理论误差,下一步将考虑如何减小闪烁测量误差。

参 考 文 献

- 1 Zhang Pengfei, Fan Chengyu, Qiao Chunhong, *et al.*. Strehl ratio expressions for high energy laser beams and numerical analysis [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(7): 0701005.
张鹏飞, 范承玉, 乔春红, 等. 高能激光准直传输远场斯特雷尔比与数值验证[J]. *光学学报*, 2012, 32(7): 0701005.
- 2 Chen Jingyuan, Zhou Yu, Chang Xiang, *et al.*. Unified method for anisoplanatism of adaptive optical systems [J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(4): 0413001.
陈京元, 周钰, 常翔, 等. 研究自适应光学非等晕性的统一方法[J]. *中国激光*, 2013, 40(4): 0413001.
- 3 G C Loos, C B Hogge. Turbulence of the upper atmosphere and isoplanatism [J]. *Appl Opt*, 1979, 18(15): 2654-2661.
- 4 D L Walters, L William Bradford. Measurements of γ_0 and θ_0 : two decades and 18 sites [J]. *Appl Opt*, 1998, 36(30): 7876-7885.
- 5 K B Stevens. Remote Measurement of the Atmospheric Isoplanatic Angle and Determination of Refractive Turbulence Profiles by Direct Inversion of the Scintillation Amplitude Covariance Function with Tikhonov Regularization [D]. Monterey: Naval Postgraduate School, 1985.
- 6 Cheng Zhi, Hou Zaihong, Jing Xu, *et al.*. High-precision and real-time inversion method of Hufnagel-Valley turbulence profile [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(6): 1563-1567.
程知, 侯再红, 靖旭, 等. Hufnagel-Valley湍流强度廓线的高精度实时反演方法[J]. *红外与激光工程*, 2013, 42(6): 1563-1567.
- 7 M Sarazina, A Tokovininb. The statistics of isoplanatic angle and adaptive optics time constant derived from DIMM data [J]. *Beyond Conventional Adaptive Optics*, 2001. 1-7.
- 8 E Aristidi, A Agabi, E Fossat, *et al.*. Site testing in summer at Dome C, Antarctica [J]. *Astronomy and Astrophysics*, 2005, 444(2): 651-659.
- 9 Chong Pei, Hualin Chen, Xiangyan Yuan, *et al.*. Development of automated small telescopes at Dome A Site testing DIMM [C]. *SPIE*, 2010, 7733: 77334W.
- 10 Yu Longkun, Wu Yi, Hou Zaihong, *et al.*. Study on the measurement of r_0 by DIMM [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(12): 1201004.
于龙昆, 吴毅, 侯再红, 等. 利用DIMM法测大气相干长度的研究[J]. *光学学报*, 2013, 33(12): 1201004.
- 11 R J Sasiela. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence* [M]. Berlin: SPIE, 2007.
- 12 F S Vetelino, C Young, L Andrews, *et al.*. Aperture averaging effects on the probability density of irradiance fluctuations in moderate-to-strong turbulence [J]. *Appl Opt*, 2007, 46(11): 2099-2108.
- 13 A Anderi, Tokovinin. Polychromatic scintillation [J]. *J Opt Soc Am A*, 2003, 20(4): 686-689.

栏目编辑: 王晓琰