

# 基于迭代算法的两平板互检求解方法

高波 李强 刘昂 何宇航 柴立群\*

(成都精密光学工程研究中心, 四川 成都 610041)

**摘要** 提出了一种基于两平板绝对检验的迭代面形恢复算法。算法基于两平板互检方法,通过分别翻转和旋转其中一块平板,获得 4 次两两测量结果。对测量得到的 4 个结果数据进行翻转和旋转逆操作,直接推导出三个面形与测量结果及相互之间的关系公式。设置初始面形,逐次迭代逼近 4 次测量结果。实验表明,该方法仅需要 50 次以内迭代,即可得到偏差小于 0.1 nm 均方根值的绝对面形。详细分析了实验过程中的各项误差来源,并对每项误差进行了定量计算,获得总的测量误差为 1.417 nm。

**关键词** 测量;绝对检测;两平板互检;迭代算法

**中图分类号** O439 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201434.1212003

## Two-Flat Test Solution Based on Iterative Algorithm

Gao Bo Li Qiang Liu Ang He Yuhang Chai Liqun

(Chengdu Fine Optics and Engineering Research Center, Chengdu, Sichuan 610041, China)

**Abstract** A method for reconstruction surfaces map on iterative algorithm is presented. According to flipping and rotating one of the two plates, four measurements are generated. The formulas are directly derived from four measurements that require rotation or flipping operations. Three trial surfaces are initialized, then the new surfaces are calculated according to the formulas. The trial surfaces are replaced by the new surfaces. The experiment shows that this method can achieve a deviation of 0.1 nm, which only requires no more than 50 iterations. And the error sources are analyzed in detail. The total measuring error of this method is 1.417 nm.

**Key words** measurement; absolute testing; two-flat test; iterative algorithm

**OCIS codes** 120.3940; 120.6650; 240.6700

## 1 引 言

三板互检方法目前是最有效的测量平板元件绝对面形的方法。最早的传统三面互检方法由 Schulz 等<sup>[1-2]</sup>提出并发展起来的,这种简单的三面互检法利用三面两两组合测量,计算出每个平面的绝对质量,但只能检测出平面上沿直径的几条线的轮廓。为了获得面形的二维分布,Fritz 等<sup>[3-5]</sup>在传统三面互检方法的基础上增加一次对其中一块平板的旋转测量,利用泽尼克多项式特性将平面的表面面形误差分解为某些正交基函数,采用最小二乘法将这些基函数拟合合成被检平面的绝对面形。Vannoni 等<sup>[6-7]</sup>提出了一种基于三板互检迭代算法。该方法需要设置初始波面,通过对初始波面进行旋转或翻

转的逆操作,合成为波前,通过合成的波前与实际测量波前结果相减,直到残差趋近于零时,则可以得到绝对面形。由于对波面数据的旋转或翻转,其实现方法简单,数据计算速度快,因此与多项式拟合方法相比,大大提高了全频段波面恢复速度。国内也有大部分作者在绝对检测方面做了相当多的研究<sup>[8-10]</sup>。

Xu 等<sup>[11]</sup>提出了一种两平晶互检的绝对检验方法,测量中只需使用两块平晶,测量过程中无需替换参考平面,测量要求其中一块双面使用的平晶具有较好的光学均匀性,或能提前测得其均匀性分布情况。该方法采用泽尼克多项式拟合的方法,因此只能获得低频面形信息。孙文卿等<sup>[12]</sup>提出在两平晶

收稿日期: 2014-06-23; 收到修改稿日期: 2014-08-29

基金项目: 中国工程物理研究院资助项目(GFZX02080201.1)

作者简介: 高波(1983—),男,硕士,助理研究员,主要从事光学检测方面的研究。E-mail: cowboy12319@sina.com

\* 通信联系人。E-mail: chailiqun@163.com

绝对检验测量的基础上增加多次旋转测量,用快速傅里叶变换(FFT)方法处理波面,求得3个面上的绝对面形分布情况。

本文提出在两平晶互检方法的基础上,通过4次测量公式,直接推导出三个面形相互之间、以及与4次测量波前关系迭代公式。由于迭代公式中,每个面形迭代结果直接导入下一面形迭代公式,因此相比 Vannoni 提出的迭代算法,该方法迭代效率更高,收敛速度更快。通过实验验证了该方法的有效性,并详细分析了该方法计算过程中产生的插值误差以及原理性误差。

## 2 原 理

两平板互检法,采用4次测量,4次测量坐标系及测量顺序如图1所示。

4次测量采用公式表示为

$$\begin{cases} W_1 = A + B \\ W_2 = A + (1 - n)B - nC_F + \Delta \\ W_3 = A + C \\ W_4 = A + C_\Phi \end{cases}, \quad (1)$$

式中  $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$ 、 $W_4$  分别表示4次测量得到的波前,  $A$  为1#平板参考面面形,  $B$  为2#平板前表面面形,  $C$  为2#平板后表面面形,  $n$  为2#平板折射率,  $\Delta$  为2#平板光学非均匀性引入的相位差。两板互检中需要对其中一块平板翻转一次,另外还需要对该平板旋转一次,假设均对2#平板后表面  $C$  进

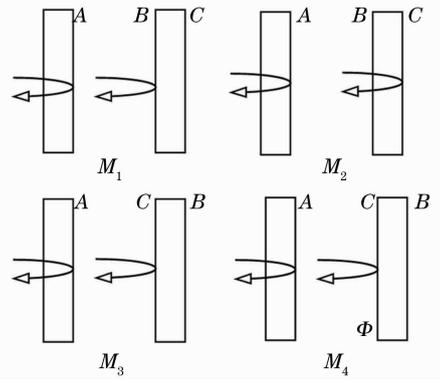


图1 4次相关测量示意图

Fig.1 Four configurations and corresponding measurements

行上述操作,  $C_F$  为翻转,  $C_\Phi$  为旋转。

将(1)式中  $W_1$  减去  $W_2$ , 则(1)式可以变为

$$\begin{cases} W_1 = A + B \\ W_1 - W_2 = nB + nC_F - \Delta \\ W_3 = A + C \\ W_4 = A + C_\Phi \end{cases}, \quad (2)$$

一般地,对同一平板翻转两次则相当于不翻转;同样旋转一次后,按照同一角度反方向旋转后,也相当于不旋转。假设定义“ $-\Phi$ ”为反方向旋转。上述表达可以表述为

$$\begin{cases} C = (C_F)_F \\ C = (C_\Phi)_{-\Phi} \end{cases}, \quad (3)$$

由(2)式和(3)式可分别推导出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的表达式为

$$\begin{cases} A = \frac{W_1 + W_3 + W_4}{3} - \frac{B + C + C_\Phi}{3} \\ B = \frac{2W_1 - W_2 + \Delta}{n + 1} - \frac{A + nC_F}{n + 1} \\ C = \frac{(W_1 - W_2)_F + W_3 + (W_4)_{-\Phi} + \Delta_F}{n + 2} - \frac{A + A_{-\Phi} + nB_F}{n + 2} \end{cases}. \quad (4)$$

迭代步骤表示如下:

- 1) 设置  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的初始波面,一般地假设  $A=0$ 、 $B=0$ 、 $C=0$ 。
- 2) 计算新的波面  $A_{new}$ 、 $B_{new}$ 、 $C_{new}$ , 由(4)式可得到

$$\begin{cases} A_{new} = \frac{W_1 + W_3 + W_4}{3} - \frac{B + C + C_\Phi}{3} \\ B_{new} = \frac{2W_1 - W_2 + \Delta}{n + 1} - \frac{A_{new} + nC_F}{n + 1} \\ C_{new} = \frac{(W_1 - W_2)_F + W_3 + (W_4)_{-\Phi} + \Delta_F}{n + 2} - \frac{A_{new} + (A_{new})_{-\Phi} + n(B_{new})_F}{n + 2} \end{cases}, \quad (5)$$

(4)式可简单地表示为

$$\begin{cases} A_{\text{new}} = X - \frac{B+C+C_{\Phi}}{3} \\ B_{\text{new}} = Y - \frac{A_{\text{new}} + nC_F}{n+1} \\ C_{\text{new}} = Z - \frac{A_{\text{new}} + (A_{\text{new}})_{-\Phi} + n(B_{\text{new}})_F}{n+2} \end{cases}, (6)$$

式中  $X, Y, Z$  表示为

$$\begin{cases} X = \frac{W_1 + W_3 + W_4}{3} \\ Y = \frac{2W_1 - W_2 + \Delta}{n+1} \\ Z = \frac{(W_1 - W_2)_F + W_3 + (W_4)_{-\Phi} + \Delta_F}{n+2} \end{cases}, (7)$$

由于  $W_1, W_2, W_3, W_4$  及  $\Delta$  测量完成后恒定不变, 因此可以在迭代循环开始之前计算完成, 从而减小迭代过程中的计算量。

3) 定义收敛规则。将第二步中获得的新的  $A_{\text{new}}, B_{\text{new}}, C_{\text{new}}$ , 代入(6)式中计算每次循环后恢复得到的波面与实际测量波前的偏差。

$$\begin{cases} E_1 = W_1 - A_{\text{new}} - B_{\text{new}} \\ E_2 = W_2 - A_{\text{new}} - (1-n)B_{\text{new}} + n(C_{\text{new}})_F - \Delta \\ E_3 = W_3 - A_{\text{new}} - C_{\text{new}} \\ E_4 = W_4 - A_{\text{new}} - (C_{\Phi})_{\text{new}} \end{cases}, (8)$$

则定义误差函数为

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + E_4^2}. \quad (9)$$

迭代开始前设定循环结束阈值, 当循环若干次后计算得到  $E_0$  小于阈值后, 则循环结束。

### 3 实验

实验选择两块口径  $\Phi 100$  mm 的平板, 材料均为熔石英, 折射率为 1.457。按照图 1 中的测量方法对 2# 平板按照竖直方向进行翻转, 然后旋转  $54^\circ$ , 依次测量获得 4 组波前测量结果,  $W_1, W_2, W_3, W_4$ , 如图 2 所示 [ $f_{\text{PV}}$ : 峰谷 (PV) 值,  $f_{\text{RMS}}$ : 均方根 (RMS) 值]。2# 平板均匀性通过经典的 4 步法测量获得, 如图 3 所示。

利用本文提出的迭代算法对上述测量结果进行计算。迭代 128 次后, 计算得到 1# 平板 A 面面形、2# 平板前表面 (B 面) 面形和 2# 平板后表面 (C 面) 面形, 如图 4 所示。为了消除边缘效应, 通光口径取  $\Phi 80$  mm。利用(8)式和(9)式, 计算其误差函数, 误差函数收敛曲线如图 5 所示。

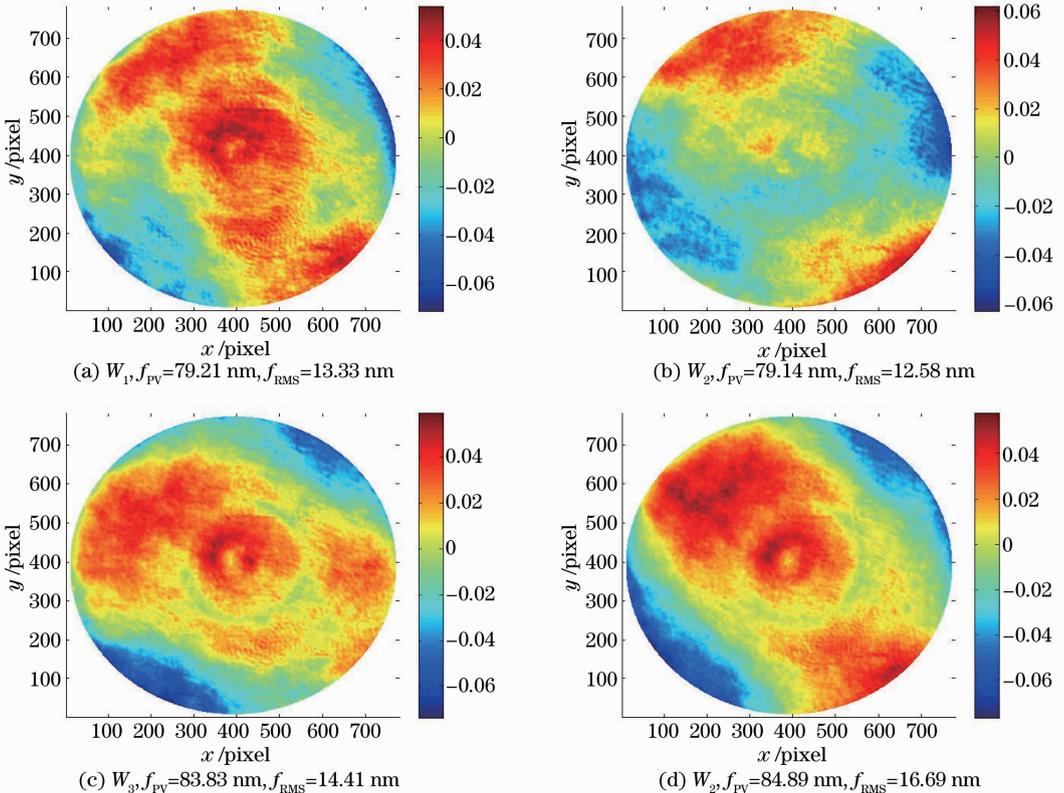


图 2 4 次测量波前

Fig. 2 Wavefront of  $W_1, W_2, W_3$  and  $W_4$

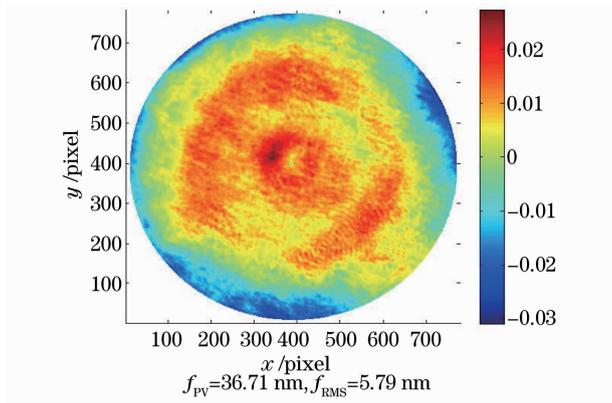


图 3 2 平板的光学非均匀性

Fig. 3 Inhomogeneity of plate II

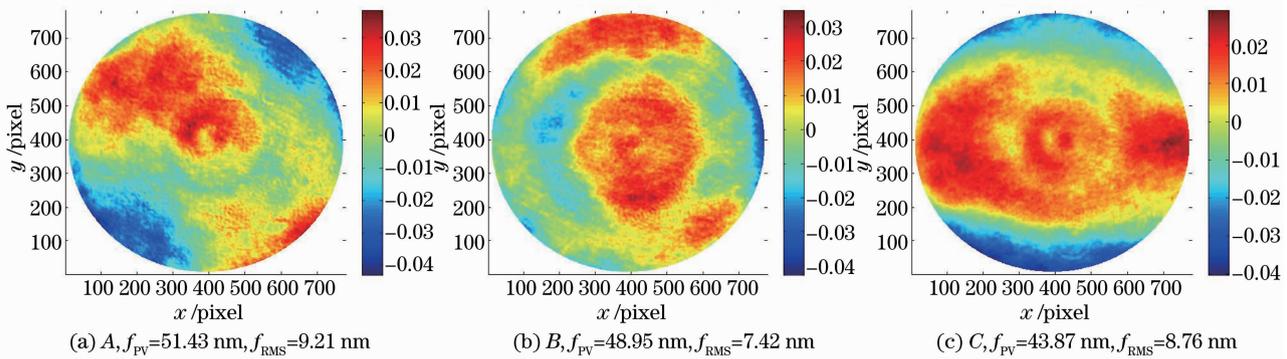


图 4 恢复得到的三个面 A、B、C 的面形

Fig. 4 Reconstruction surfaces map of A, B, C

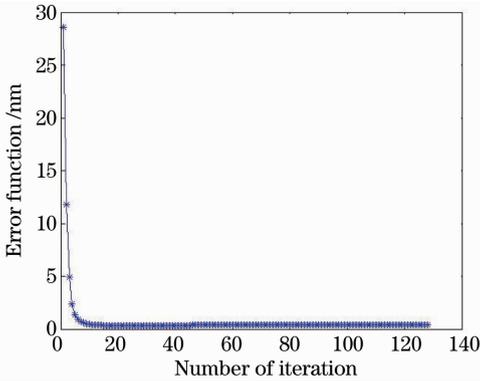


图 5 误差函数迭代收敛图

Fig. 5 Error function versus number of iteration cycles

## 4 误差分析

两板互检绝对检测中误差来源比较多,包括环境影响引入的误差(气流、振动、温度变化等),干涉仪系统误差,算法处理过程中的插值误差,以及原理性误差。

### 4.1 重复性测量误差及光学非均匀性测量误差

测量过程中的随机性误差,例如气流等引入的随机性误差,均可通过重复性测量误差来表征,本次

实验针对 4 个波前  $W_1, W_2, W_3, W_4$  共测量 16 组数据,每组数据测量过程中取 16 次相位平均,计算得到 4 次波前重复性测量误差分别为 0.406、0.456、0.552、0.507。则 4 次波前测量总的重复性测量误差可通过(10)式得到,为 0.935 nm。

$$\sigma_1 = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2}. \quad (10)$$

2# 平板光学非均匀性采用经典的 4 步法测量,光学非均匀性测量误差主要来自于干涉仪重复性测量误差,经过计算干涉仪重复性测量误差为 0.460 nm,其总的测量误差可通过(11)式计算:

$$\sigma_2 = \epsilon \sqrt{2n^2 + 2(n-1)^2}, \quad (11)$$

式中  $\sigma_2$  为总的光学非均匀性测量误差,  $\epsilon$  为干涉仪测量重复性误差。

通过(11)式得到均匀性测量重复性误差为 0.996 nm。

### 4.2 插值误差

进一步增加迭代次数,发现迭代后恢复的波面与实际波面之间的偏差并未进一步下降,相反其 RMS 值逐渐变大。这是因为在(2)式推导为(4)式过程中,假设两次翻转后数据不变和旋转数据后,再

逆旋转数据同样保持不变。对于离散数据,沿水平(或竖直)方向连续翻转两次后,数据不变,因此不会引入误差。但是对于数据旋转一个角度( $54^\circ$ ),按照同样角度逆旋转一次后,必然存在插值误差。插值误差在迭代过程中不断积累,最终在迭代结果中表现出来,特别地,当迭代次数越多时,插值误差累积

越多。

因此为了抑制旋转和逆旋转引入的误差,在迭代计算的步骤 2 中的公式增加一个旋转误差消除因子,  $\frac{[(C_{\text{new}})_\Phi]_{-\Phi}}{n+2} - \frac{C_{\text{new}}}{n+2}$ , 则(5)式改变为

$$\begin{cases} A_{\text{new}} = X - \frac{B+C+C_\Phi}{3} \\ B_{\text{new}} = Y - \frac{A_{\text{new}} + nC_F}{n+1} \\ C_{\text{new}} = Z - \frac{A_{\text{new}} + (A_{\text{new}})_{-\Phi} + n(B_{\text{new}})_F}{n+2} + \frac{[(C_{\text{new}})_\Phi]_{-\Phi}}{n+2} - \frac{C_{\text{new}}}{n+2} \end{cases} \quad (12)$$

图 6 中给出了旋转误差因子引入前后,残差结果分布。从图中可以明显看出改进前后关于波前  $W_1$  的残差分别为 0.1 nm 和 0.06 nm。另外通过误

差函数(9)式计算总的残差,改进前后分别为 0.376 nm 和 0.099 nm。因此改进后的算法对旋转引入的插值误差得到了极大的抑制。

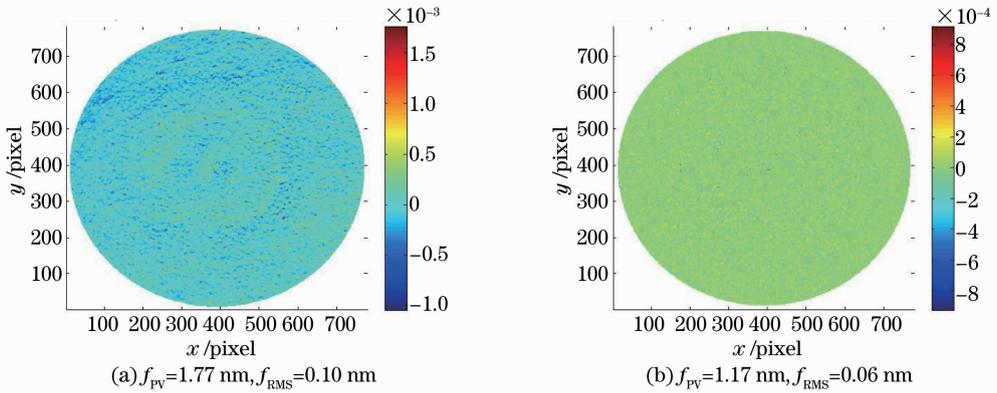


图 6 改进前后 128 次迭代后的关于波前  $W_1$  的残差分布。(a)改进前;(b)改进后

Fig. 6 Residual map of  $W_1$  after 128 iterations. (a) Before modified; (b) after modified

#### 4.3 原理性误差

为了分析该方法存在的原理性误差产生原因,

这里假设 2# 平板后表面面形  $C$  可以通过无穷多项泽尼克多项式表示

$$C(r, \theta) = \sum_{m,n} U_n^m(r) [C_n^m \cos(m\theta) + C_n^{-m} \sin(m\theta)], \quad (13)$$

那么翻转 2# 平板后

$$C_F(r, \theta) = \sum_{m,n} U_n^m(r) [\bar{C}_n^m \cos m(\pi - \theta) + \bar{C}_n^{-m} \sin m(\pi - \theta)], \quad (14)$$

化解后(14)式变为

$$C_F(r, \theta) = \sum_{m,n} U_n^m(r) [C_n^{-m} \sin(m\theta) - C_n^m \cos(m\theta)], \quad (15)$$

同样对 2# 平板旋转角度  $\varphi$  后

$$C_\Phi(r, \theta) = C(r, \theta - \varphi) = \sum_{m,n} U_n^m(r) [\bar{C}_n^m \cos(m\theta) + \bar{C}_n^{-m} \sin(m\theta)], \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{C}_n^m = C_n^m \cos(m\varphi) - C_n^{-m} \sin(m\varphi) \\ \bar{C}_n^{-m} = C_n^{-m} \cos(m\varphi) + C_n^m \sin(m\varphi) \end{cases}, \quad (17)$$

当  $m\varphi$  正好是  $180^\circ$  的整数倍时, (17) 式可表示为

$$\begin{cases} \bar{C}_n^m = C_n^m \\ \bar{C}_n^{-m} = C_n^{-m} \end{cases} \quad (18)$$

因此, 当  $m\varphi$  正好是  $180^\circ$  的整数倍时, 旋转后的面形分量与旋转前面形分量相等。显然该部分面形分量无法通过迭代方法计算获得。为了获得更多的该部分分量, 可以通过增加旋转次数获得。同时为了避免产生更多的  $180^\circ$  的整数倍分量, 旋转角度应尽量避免旋转  $45^\circ$ 、 $90^\circ$  等角度。

#### 4.4 旋转(翻转)误差

迭代算法中假设翻转两次以及旋转一次再逆旋转相同角度后数据不变, 但是实际操作时必然存在旋转角度误差或翻转后数据在水平方向存在平移误差。

为了降低旋转误差对迭代过程中多次旋转造成的影响, 实验中采用一个精密旋转控制台对待测元件进行旋转, 该精密旋转控制台角度旋转精度为  $0.1^\circ$ , 因此为了估计旋转角度误差为  $0.1^\circ$  对实验计算结果的影响, 分别对旋转角度为  $54^\circ$  和  $54.1^\circ$  进行迭代计算, 两次迭代收敛曲线如图 8 所示。当旋转角度误差为  $0.1^\circ$  时, 误差收敛后最小残差为  $0.315 \text{ nm}$ , 相对无旋转误差时, 残差增加了  $0.216 \text{ nm}$ 。

同样为了减小翻转过程中造成的平移误差, 实验中在测量过程中设置了掩模板, 保证 4 次测量使用同一掩模板, 从而保证了平移误差不大于 1 pixel。为了估计平移误差为 1 pixel 时, 迭代算法中的翻转对实验结果的影响, 分别对无平移误差和 1 pixel 这两种情况进行迭代计算, 平移 1 pixel 后, 误差收敛后最小残差为  $0.2792 \text{ nm}$ , 相比无平移误差增加  $0.1793 \text{ nm}$ 。

同时加入旋转误差  $0.1^\circ$  和平移误差 1 pixel 后, 迭代计算后, 最小收敛误差为  $0.3763 \text{ nm}$ 。

#### 4.5 总的误差计算

插值误差和原理性误差可统一为最后的计算残差, 通过迭代计算公式的误差函数(9)式计算, 改进后的迭代算法最小残差为  $0.099 \text{ nm}$ , 则插值误差和原理性误差为  $0.099 \text{ nm}$ 。同时考虑旋转误差和翻转过程中造成的平移误差后, 则插值误差、原理性误差、旋转(翻转)误差可总共表示为  $\sigma_3 = 0.3763 \text{ nm}$ 。

通过对上述测量进行详细分析, 假设认为各部分误差相互无关, 则总的误差可通过(19)式计算:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{0.935^2 + 0.996^2 + 0.376^2} = 1.417 \text{ nm}, (19)$$

则总的误差为  $1.417 \text{ nm}$ 。

## 5 结 论

提出一种用于两板互检的迭代算法, 该方法与泽尼克多项式拟合方法相比, 具有计算速度快、同时可以获得更多中高频面形分量等优势。与 Vannoni 提出的迭代算法相比, 该方法通过 4 次测量步骤, 通过计算推导出每一个面形表达式, 因此其迭代思想具有根本的不同。同时由于该方法迭代过程中, 每一步都直接影响下一步面形迭代计算, 因此迭代效率更高。通过对实际的测试波面进行计算, 证明了该方法的有效性。并详细分析了方法中存在的两项主要误差来源。该方法具备高精度、高效率等优点, 特别适合于大口径平板元件绝对检测。

## 参 考 文 献

- 1 G Schulz, J Schwider. Precise measurement of planeness [J]. Appl Opt, 1967, 6(6): 1077-1084.
- 2 G Schulz, J Schwider. Establishing an optical flatness [J]. Appl Opt, 1971, 10(4): 929-934.
- 3 B S Fritz. Absolute calibration of an optical flat [J]. Opt Eng, 1984, 23(4): 379-383.
- 4 V Greco, R Tronconi, C Del Vecchio, et al.. Absolute measurement of planarity with Fritz's method; uncertainty evaluation [J]. Appl Opt, 1999, 38(10): 2018-2027.
- 5 Miao Erlong, Su Dongqi, Peng Shijun. High precise absolute flat calibration [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(5): 051203.  
苗二龙, 苏东奇, 彭石军. 高精度平面绝对标定[J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(5): 051203.
- 6 M Vannoni, G Molesini. Iterative algorithm for three flat test [J]. Opt Express, 2007, 15(11): 6809-6816.
- 7 M Vannoni, G Molesini. Absolute planarity with three flat test: an iterative approach with Zernike polynomials [J]. Opt Express, 2008, 16(1): 340-354.
- 8 Song Weihong, Wu Fan, Hou Xi. Study on the absolute testing of rotationally asymmetric surface deviation with the method of single rotation [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(9): 0912006.  
宋伟红, 伍凡, 侯溪. 基于单次旋转的旋转非对称面形误差绝对检测技术研究[J]. 光学学报, 2012, 32(9): 0912006.
- 9 He Yuhang, Chai Liqun, Chen Bo, et al.. Error compensation method for mirror symmetry absolute measurement [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(4): 0412003.  
何宇航, 柴立群, 陈波, 等. 镜面对称法绝对测量中的误差补偿方法[J]. 光学学报, 2013, 33(4): 0412003.
- 10 Chen Xu, Yuan Wenquan, Feng Yutao, et al.. Study of the error reference lens in absolute spherical testing and the thermal deformation model establishment [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(2): 0212002.  
陈旭, 袁文全, 冯玉涛, 等. 绝对检验参考镜误差分析与热变形模型建立[J]. 光学学报, 2011, 31(2): 0212002.
- 11 Chen Xu, Lei Chen, Jiayi Yin. Method for absolute flatness measurement of optical surfaces [J]. Appl Opt, 2009, 48(13): 2536-2540.
- 12 Sun Wenqing, Chen Lei, He Yong, et al.. Two flat test solutions based on frequency domain transform [J]. Journal of Optoelectronics·Laser, 2012, 23(3): 542-545.  
孙文卿, 陈磊, 何勇, 等. 基于频域变换的两平晶互检求解算法[J]. 光电子·激光, 2012, 23(3): 542-545.

栏目编辑: 何卓铭