

基于 Moreau 包络平滑 l_1 /全变差范数模型的 图像脉冲噪声去除方法

王 斌 胡辽林 曹京京 薛瑞洋 王亚萍

(西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要 脉冲噪声是导致图像退化的主要原因之一,低密度脉冲噪声去除比较容易,但高密度比较困难。为了有效去除高密度的脉冲噪声,提高边缘和细节纹理的保持能力,提出了一种基于莫罗(Moreau)包络平滑 l_1 /全变差范数(l_1 /TV)模型的脉冲噪声去除方法。此方法具有修复前后图像对比度和形态不变,不易产生局部模糊等优点。由于 l_1 /TV 模型中的两个目标函数均为不可微凸函数,无法直接求解,提出了利用解耦形式的 Moreau 包络对全变差范数进行平滑化处理,平滑后的函数是原函数的可微紧下界,具有迭代形式的解析解,证明了它也是原函数的解。仿真表明该算法具有很强的去噪能力,并能较好地保持边缘和细节信息。此外,还提出了该算法的加速策略,可以大大提高收敛速度。

关键词 成像系统;脉冲噪声; l_1 /全变差范数模型;全变差范数;Moreau 包络;加速

中图分类号 TP391.4; TP751.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.1211002

Impulse Noise Removal Method Based on Moreau Envelope Smoothing l_1 /TV Norm Model

Wang Bin Hu Liaolin Cao Jingjing Xue Ruiyang Wang Yaping

(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology,
Xi'an, Shaanxi 710048, China)

Abstract Impulse noise is one of the main causes of image degradation, low density impulse noise can be easily removed while high density impulse noise removal is more difficult. In order to effectively remove high density impulse noise and to keep edges and texture better, an algorithm based on Moreau envelope smoothing l_1 /total variation (l_1 /TV) norm model is proposed. This algorithm has advantages such as contrast and morphological invariance and absence of local blur. Since the convex objective function in l_1 /TV model is non-differentiable and thus difficult to solve, smoothing the total variation part by utilizing decoupled Moreau envelope is proposed. As the smoothed function which generates an iterative form of analytical solution is the differentiable tight lower bound of the original function, it is provable that they have the same solution. The simulation results show that the algorithm effectively removes noise with edges and texture kept. In addition, the combined acceleration steps are proposed to greatly improve the speed of convergence.

Key words imaging system; impulse noise; l_1 /total variation norm model; total variation norm; Moreau envelope; acceleration

OCIS codes 110.4280; 110.2960; 110.3000; 110.2960

1 引 言

图像在获取、传输、存储及处理过程中,由于成像器材、传输介质、存储器件和处理手段的影响,不可避

免地会出现一些随机、离散的亮点或暗点,称之为脉冲噪声。脉冲噪声属于非全局噪声,去除比较困难。例如电荷耦合器件(CCD)因感光面积太小、热稳定性

收稿日期: 2014-06-04; **收到修改稿日期**: 2014-07-16

基金项目: 陕西省自然科学基金(2014JM7273)

作者简介: 王 斌(1989—),男,硕士研究生,主要从事信号与图像处理方面的研究。

E-mail: 1208030272@xaut.stu.edu.cn

导师简介: 胡辽林(1968—),男,博士,副教授,主要从事传感技术与信号处理等方面的研究。E-mail: huliaolin@163.com

不足、长时间曝光^[1]等原因会产生脉冲噪声。为了去除脉冲噪声,一方面需要改善硬件质量,当然这需要较高的成本;另一方面,可以从算法入手,设计合适的算法可以降低噪声影响,大幅度提高图像质量。

目前,去除图像脉冲噪声的基本方法是中值滤波和均值滤波。均值滤波是指对像素某个邻域内的所有像素值求平均值,用以代替原像素值。中值滤波则是选择像素某个邻域内的所有像素值的中间值,用中间值来代替原像素值。这两种方法只在脉冲噪声密度较小时有效,当模板选择不当时容易造成局部模糊。维纳滤波法^[2]也可用来去除脉冲噪声,但只涉及图像信息中的二阶统计特性,不涉及更重要的高阶统计特性,因此去噪效果并不理想。其他比较新颖的方法包括改进的中值滤波法^[3]、小波法^[4]、低秩分解法^[5]等。其中低秩分解法假定原始图像为低秩矩阵,含噪图像是稀疏矩阵和低秩矩阵的和,通过恢复低秩矩阵来得到原始图像,此方法在处理低密度脉冲噪声时具有较强的边缘保持能力,但随着噪声密度的增加,恢复精度会降低。

针对以上方法存在的问题,本文提出利用 l_1 /全变差范数(l_1 /TV)模型来去除图像中的脉冲噪声。全变差(TV)范数在图像处理中应用广泛,常用于电子计算机断层扫描(CT)重建^[6]、光流估计^[7]、去噪声、去模糊^[8-9]。 l_1 /TV 模型最早出现在文献[10]中,具有图像对比度和形态不变、能够适应高密度噪声环境、不易产生局部模糊等优点,因此很适用来去除脉冲噪声,但其缺点在于求解困难。求解 l_1 /TV 问题的主要难点在于 l_1 范数和全变差范数均为不可微凸函数,文献[11]中通过引入一个中间变量构造莫罗(Moreau)包络将 l_1 范数平滑化。但 TV 范数是一个多变量函数,需要构造复杂的解耦算法处理。文献[12]利用不动点理论对 TV 范数构造了非解耦形式的 Moreau 包络,但不动点理论要求迭代算子为非扩张算子,对参数要求非常苛刻且算法非常复杂。文献[13]从逼近算子出发利用 Moreau 包络对 TV 范数进行平滑化处理,但其 Moreau 包络仍是非解耦形式的,无法与文献[14-15]中的加速方法结合,收敛速度较慢。在文献[13]的基础上,提出对 TV 范数构造解耦形式的 Moreau 包络,然后利用 Moreau 包络的性质构造迭代算法,并与文献[14-15]中的加速方法结合,获得了较高的收敛速度。仿真表明本文算法具有较强的噪声去除能力,且能较好地保持边缘和细节信息。

2 去除脉冲噪声的数学模型

含脉冲噪声图像的数学模型为

$$\mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad (1)$$

式中矩阵 \mathbf{x} 、 \mathbf{w} 、 \mathbf{b} 分别表示尺寸为 $n \text{ pixel} \times n \text{ pixel}$ 的无噪声图像、脉冲噪声、退化图像。加入脉冲噪声后的图像为

$$\mathbf{b} = \begin{cases} x_{i,j}, & P = 1 - p \\ x_{i,j} = 255, & P = 0.5p \\ x_{i,j} = 0, & P = 0.5p \end{cases}, \quad (2)$$

式中 $x_{i,j}$ 为图像 \mathbf{x} 中像素值, p 为脉冲噪声出现的概率, $x_{i,j} = 255$ 的点为亮点, $x_{i,j} = 0$ 的点为暗点。(2)式中假设暗点和亮点的出现概率相同。仿真中会验证,即使二者出现概率不同,也不会影响本算法的性能。

去除脉冲噪声的数学模型为

$$\min \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}, \quad \text{s. t } \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_0 \leq \epsilon, \quad (3)$$

式中 $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_0$ 为 $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ 的 l_0 范数,即 $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ 中不等于 0 的元素个数。以 $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_0 \leq \epsilon$ 作为约束项符合脉冲噪声的离散和非全局特性。 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 为 \mathbf{x} 的全变差范数,即 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} \|\mathbf{B}_{ij} \mathbf{x}\|_2$, $\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i+1,j} - x_{i,j} \\ x_{i,j+1} - x_{i,j} \end{bmatrix}$, 全变差范数本质上是 \mathbf{x} 中每个像素在横纵两个方向上的一阶差分^[16]。为便于表达,设 $\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^r \sqrt{z_i^2 + z_{i+r}^2}$, $r = n^2$, 将 \mathbf{x} 看成向量, \mathbf{R} 为 $n \times n$ 的一阶差分特普利兹方阵,即

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

令 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \otimes \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_{n \times n}$ 为单位矩阵, \otimes 表示矩阵的克罗内克积,易知 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = \Phi(\mathbf{C}\mathbf{x})$ ^[12-13,17]。

由于图像信息具有冗余性,即在一个较小的区域里,像素值的变化较小,因此无噪声图像的全变差范数值很小;有噪声时,由于像素值梯度剧烈变化,全变差范数值变得很大。因此最小化 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 就是降低噪声的影响,并且去噪的同时还能保持图像的边缘和细节纹理。处理高斯噪声时,由于高斯噪声是全局噪声,保真项需要体现能量极小特点,通常选择保真项(又称约束项)为 $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon$ 。处理脉冲噪声时,由于脉冲噪声不是全局性噪声并且幅度很大,以 l_2 范数做保真项无法有效去除噪声,还会

造成局部模糊。因此,处理脉冲噪声时选择 l_0 -范数效果更佳,即 $\|x-b\|_0 \leq \epsilon$,它表征了原图像与待修复图像的点相似程度,即 x 与 b 中像素值不同的点应该很少,恰好能够体现脉冲噪声的特点。但由于 $\|x-b\|_0$ 失去了幅度特征,难以求导,(3)式无法直接求解,又因 l_1 -范数是 l_0 -范数的凸包络,即二者具有良好的近似特性,故选择 l_1 -范数作为保真项,(3)式转化为

$$\min \Phi(\mathbf{Cx}), \quad \text{s. t } \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1 \leq \epsilon, \quad (4)$$

经 Tikhonov 正则化后可得

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= \lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1 + \Phi(\mathbf{Cx}), \\ \text{s. t } \mathbf{x} &= \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 λ 为拉格朗日乘子,表示 $\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$ 在 $\min F(\mathbf{x})$ 中的权重。利用 l_1 -范数作为保真项可以有效去除脉冲噪声,且图像对比度不变,边缘细节保持较好^[17-18]。若 λ 较小,表示重视噪声的去除,恢复后的图像保真度稍差; λ 较大,表示重视保真度,噪声去除效果稍差。 λ 本质上体现的是 x 与 w 的能量对比。约束条件将像素值归一化,以减少运算量。(5)式的目标函数中 $\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$ 、 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 均为不可微凸函数,难以直接求解,需要至少将其中一项平滑化为可微函数。

3 全变差范数的平滑化

$\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$ 、 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 均为不可微凸函数,需要至少对其中之一进行平滑化。文献[11]中通过引入一个中间变量将 $\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$ 平滑化。本文选择对 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 进行平滑化处理。因为即使 $\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$ 平滑化后, $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 还是一个复杂的函数,需要构造复杂的解耦算法处理。而 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 平滑化后, $\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$ 结构较简单,利用一阶梯度下降算法即可求解,并且可以对算法进行加速。通过数值仿真,发现对 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 平滑化的效果也优于前者。

定义连续凸函数 $f(x)$ 的 Moreau 包络为

$$\text{env}_{\alpha f}(x) = \inf_y \left[\frac{\|y-x\|_2^2}{2\alpha} + f(y) \right], \quad (6)$$

由凸分析知,任何凸函数的 Moreau 包络都是可微凸函数^[4],且 $\inf \text{env}_{\alpha f}(x) = f(x)$,即凸函数的 Moreau 包络是其本身的紧下界,因此 $\min_x \text{env}_{\alpha f}(x) = \min_x f(x)$ 。同时,当 α 趋于 0 时, $\text{env}_{\alpha f}(x)$ 也趋于 $f(x)$ 。根据文献[19], $\text{env}_{\alpha f}(x)$ 的梯度为 $\nabla \text{env}_{\alpha f}(x) = \alpha^{-1}[1 - \text{prox}_{\alpha f}(x)]$,其中 $\text{prox}_{\alpha f}(x) = \arg \min_y [0.5\|y-x\|_2^2 + \alpha f(y)]$ 。为构造全变差范数的 Moreau 包络,

需利用(5)式的增广拉格朗日形式,即引入中间变量 q ,使(5)式转化为

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{q}, \mathbf{x}) &= \lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1 + \Phi(\mathbf{q}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{q}-\mathbf{Cx}\|_2^2, \\ \text{s. t } \mathbf{x} &= \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\}, \end{aligned} \quad (7)$$

将(7)式中 $\Phi(\mathbf{q}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{q}-\mathbf{Cx}\|_2^2$ 替换为 $\Phi(\mathbf{Cx})$ 的 Moreau 包络,可得

$$\begin{aligned} \min F_{\text{env}}(\mathbf{Cx}, \mathbf{x}) &= \lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1 + \text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}), \\ \text{s. t } \mathbf{x} &= \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于(5)式和(7)式的解相同,只需证明(8)式与(7)式的解相同即可。下面给出简要证明。

证明:设 $(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1)$ 是(7)式的解,显然有 $F(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1) \leq F[\text{prox}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}_1), \mathbf{x}_1]$ 。为方便起见,令 $T(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{q}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{q}-\mathbf{Cx}\|_2^2$,应有 $T(\mathbf{q}_1) \leq T[\text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{Cx}_1)]$ 。但根据定义, $\text{prox}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}_1) = \arg \min_q [\Phi(\mathbf{q}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{q}-\mathbf{Cx}_1\|_2^2]$,所以 $T[\text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{Cx}_1)] \leq T(\mathbf{q}_1)$,故 $F[\text{prox}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}_1), \mathbf{x}_1] \leq F(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1)$,故必有 $F(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1) = F[\text{prox}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}_1), \mathbf{x}_1]$ 。又因为 $F[\text{prox}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}_1), \mathbf{x}_1]$ 是(8)式的解,所以(8)式与(7)式有相同的解。

(8)式将 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 平滑为可微函数 $\text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx})$,从而使(5)式可以求解。

求解(6)式即是寻找

$$0 \in \lambda \partial \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1 + \mathbf{C}^T \nabla \text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}) \quad (9)$$

成立的 \mathbf{x} 。式中 $\partial(\cdot)$ 表示次微分,是普通微分在凸函数中的推广,是一个集合。凸函数 $\psi(x)$ 的次微分定义为对任意 $x, y \in \text{dom } \psi$ 都有 $\partial \psi(x) = \{z: \psi(x) - \psi(y) - \langle z, x-y \rangle \geq 0\}$ ^[20]。如果凸函数可微,其次微分就是普通微分;如果凸函数不可微,次微分可作为普通微分的拓展,尤其是若 $0 \in \partial \psi(x)$,则 $x = \arg \min_x \psi(x)$ 。 $\nabla(\cdot)$ 表示普通微分, $\text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx})$ 是可微函数。根据以上结论,若(9)式成立,则有 $0 \in \partial[\lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1 + \mathbf{C}^T \text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx})]$,对应的 \mathbf{x} 就是(8)式的解。

为构造(8)式的解,根据文献[19], $z \in \partial \psi(x)$ 当且仅当 $x = \text{prox}_{\psi}(x+z)$ 。对任意正数 m, ζ ,令向量 $\mathbf{u} \in m^{-1} \partial \lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1, \mathbf{v} = \zeta^{-1} \nabla \text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx})$,有 $m\mathbf{u} + \zeta \mathbf{C}^T \mathbf{v} = 0$,即 $\mathbf{u} = -m^{-1} \zeta \mathbf{C}^T \mathbf{v}$ 。因为 $\mathbf{u} \in m^{-1} \partial \lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$,所以 $-m^{-1} \zeta \mathbf{C}^T \mathbf{v} \in m^{-1} \partial \lambda \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_1$,于是有

$$\mathbf{x}-\mathbf{b} = \text{prox}_{\frac{\lambda \|\cdot\|_1}{m}} \left[\mathbf{x} - \frac{\mathbf{C}^T}{m} \nabla \text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}) - \mathbf{b} \right], \quad (10)$$

由于 $\nabla \text{env}_{\alpha \Phi}(\mathbf{Cx}) = \alpha^{-1} [I - \text{prox}_{\alpha \Phi}(\mathbf{x})]$,代入(10)式可得

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \text{prox}_{\frac{\lambda \|\cdot\|_1}{m}} \left[\mathbf{x} - \frac{\mathbf{C}^T}{m\alpha} (\mathbf{I} - \text{prox}_{\Phi})(\mathbf{C}\mathbf{x}) - \mathbf{b} \right]. \quad (11)$$

下面分别给出(11)式中 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 和 $\text{prox}_{\Phi}(\mathbf{C}\mathbf{x})$ 的解形式。由于 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 就是文献[14-15]中的收缩算子,故其解为

$$\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(x) = \max(|x| - m^{-1}) \times \text{sgn}(x), \quad (12)$$

式中 $\text{sgn}(x)$ 为 x 的符号函数。根据定义,函数

$$\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\mathbf{z}_i^2 + \mathbf{z}_{i+r}^2}$$

包含两个自变量 \mathbf{z}_i 和 \mathbf{z}_{i+r} , 令

$$\text{向量 } \mathbf{z}_i = [\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+r}], \text{ 则 } \Phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^r \Phi(\mathbf{z}_i), \text{ 其中}$$

$$\Phi(\mathbf{z}_i) = \sqrt{\mathbf{z}_i^2 + \mathbf{z}_{i+r}^2} = \|\mathbf{z}_i\|_2. \text{ 根据文献[12], 对于}$$

任意向量 \mathbf{z}_i

$$\text{prox}_{\alpha \|\cdot\|_2}(\cdot) = \max(\|\cdot\|_2 - \alpha) \times \frac{(\cdot)}{\|\cdot\|_2}, \quad (13)$$

又根据文献[19], 若函数 $g(x) = \sum_i g_i(x_i)$, 则

$$\text{prox}_g(x) = \sum_i \text{prox}_{g_i}(x). \text{ 因此, } \text{prox}_{\Phi}(\mathbf{C}\mathbf{x}) =$$

$$\sum_{i=1}^r \text{prox}_{\Phi(\mathbf{z}_i)}(\mathbf{C}\mathbf{x}). \text{ 令向量 } \mathbf{M}_i = [(\mathbf{C}\mathbf{x})_i, (\mathbf{C}\mathbf{x})_{i+r}],$$

根据(13)式

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\Phi}(\mathbf{C}\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^r \text{prox}_{\Phi(\mathbf{z}_i)}(\mathbf{M}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^r \text{prox}_{\alpha \|\cdot\|_2}(\mathbf{M}_i) = \\ &= \max(\|\mathbf{M}_i\|_2 - \alpha) \times \frac{\mathbf{M}_i}{\|\mathbf{M}_i\|_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

将(13)、(14)与(11)式结合起来,即得到(11)式的解,其算法(算法1)步骤如下。

输入:含噪图像 \mathbf{b} , 常数 m, λ 和 α ;

初始化:令 $\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$;

$$\text{迭代: } \mathbf{x}^k = \mathbf{b} + \text{prox}_{\frac{\lambda \|\cdot\|_1}{m}} \left[\mathbf{x}^{k-1} - \frac{\mathbf{C}^T}{m\alpha} (\mathbf{I} - \text{prox}_{\Phi})(\mathbf{C}\mathbf{x}^k) - \mathbf{b} \right],$$

$\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 和 $\text{prox}_{\Phi}(\mathbf{C}\mathbf{x})$ 分别按(12)式和(13)式计算;

输出: \mathbf{x}^{k+1} 。

4 收敛速度分析与加速策略

4.1 收敛速度分析

(11)式的收敛速度主要取决于 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 和 $\text{prox}_{\Phi}(\mathbf{C}\mathbf{x})$ 的收敛速度。根据文献[14-15], $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 的收敛速度为 $O(1/k)$, 其中 k 为迭

代次数。通过比较(14)式和(13)式,易知 $\text{prox}_{\Phi}(\cdot)$ 与 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 具有类似的形式,但复杂度略高,收敛速度稍慢于 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$, 假设其收敛速度为 $O[(1+s)/k]$, s 为小于1的常数。由于 $\text{prox}_{\Phi}(\cdot)$ 为 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 的内部循环,因此 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 每循环一次,内部循环 l 次 $\text{prox}_{\Phi}(\cdot)$, 则总的收敛速度为 $O[l(1+s)/k]$ 。分析中没有考虑 $\mathbf{C}\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{C}^T \mathbf{I}\mathbf{C}\mathbf{x}$ 的复杂度,虽然 \mathbf{C} 和 \mathbf{C}^T 都是很大的矩阵(分别为 $2n^2 \times n^2$ 和 $n^2 \times 2n^2$),但实际操作中并不是将图像 \mathbf{x} 排成向量来计算 $\mathbf{C}\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{C}^T \mathbf{I}\mathbf{C}\mathbf{x}$, 而是采用等价操作,如 $\mathbf{C}\mathbf{x}$ 等价于 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (2x_{i,j} - x_{i+1,j} - x_{i,j+1})$, $\mathbf{C}^T \mathbf{I}\mathbf{C}\mathbf{x}$ 等价于 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (4x_{i,j} - x_{i+1,j} - x_{i,j+1} - x_{i-1,j} + x_{i,j-1})$ 。之所以在推导过程中使用 $\mathbf{C}\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{C}^T \mathbf{I}\mathbf{C}\mathbf{x}$, 是为了便于表述和推导。

4.2 加速策略

文献[14-15]提出了一种针对收缩算子加速的方法,如果可写成收缩算子的形式,只需添加两个简单的中间步骤(仅含算术运算,计算复杂度可忽略不计)即可将 $\text{prox}_{m^{-1}\lambda \|\cdot\|_1}(\cdot)$ 的收敛速度由 $O(1/k)$ 提高到 $O(1/k^2)$ 。根据4.1节中的分析,若其他条件不变,则总的收敛速度增加为 $O[l(1+s)/k^2]$ 。拥有加速步骤的算法(算法2)如下。

输入:含噪图像 \mathbf{b} , 常数 m, λ 和 α ;

初始化:令 $\mathbf{y}^0 = \mathbf{b}; t^0 = 1$;

迭代:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{b} + \text{prox}_{\frac{\lambda \|\cdot\|_1}{m}} \left[\mathbf{y}^{k-1} - \frac{\mathbf{C}^T}{m\alpha} (\mathbf{I} - \text{prox}_{\Phi})(\mathbf{C}\mathbf{y}^k) - \mathbf{b} \right],$$

$$t^{k+1} = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 4(t^k)^2} + 1];$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{t^k - 1}{t^{k+1}} (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1});$$

输出: \mathbf{x}^{k+1} 。

5 仿真及分析

仿真采用 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$ 的标准 lena 和 cameraman 图像。对 lena 和 cameraman 分别添加密度为 10% 的脉冲噪声,脉冲噪声的密度是指脉冲出现的频率,即正脉冲(亮点)和负脉冲(暗点)之和占总像素数的比例,仿真时会考虑亮点和暗点出现概率不同的情况。仿真采用拥有加速步骤的算法2进行仿真。两幅图像的恢复效果如图1和图2所示。修复后 lena 图像峰值信噪比(PSNR)达到 36.21 dB,修复图像与原图像几乎完全一致,脸部特

征、头发、帽沿等细节和纹理保持得很好，整幅图像轮廓鲜明，噪声去除得非常干净，没有产生局部模糊现象。修复后的 cameraman 图像 PSNR 达到 34.34 dB，修复图像与原图像也几乎完全一致，脸部

特征、相机、手套等细节保持得很好，噪声也去除得非常干净，没有产生局部模糊现象。图 1 和图 2 说明该算法可以推广到其他任何图像，为节省篇幅，下面的仿真只针对 lena 图像。

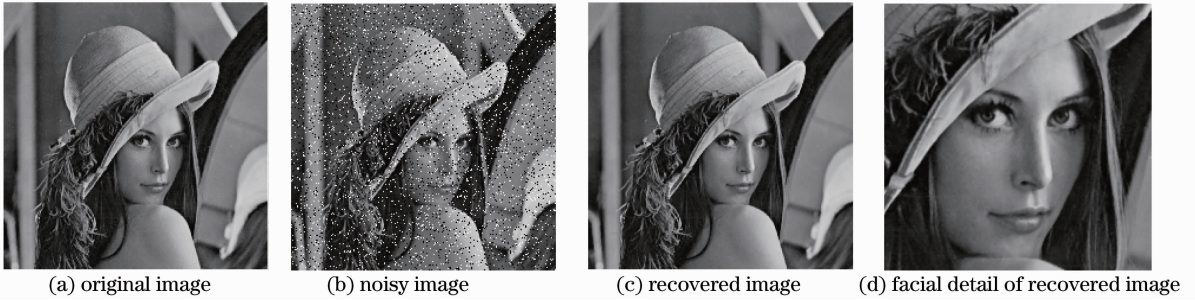


图 1 lena 修复效果(10%脉冲噪声)

Fig. 1 Recovered results of lena (10% impulse noise)

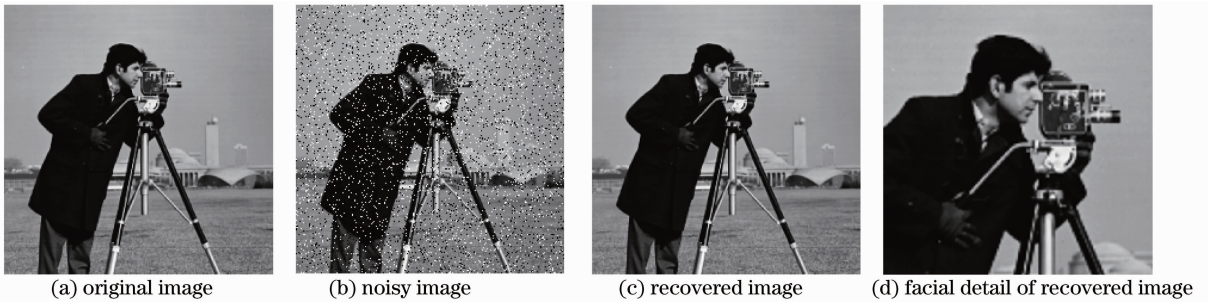


图 2 cameraman 修复效果(10%脉冲噪声)

Fig. 2 Recovered results of lena (10% impulse noise)

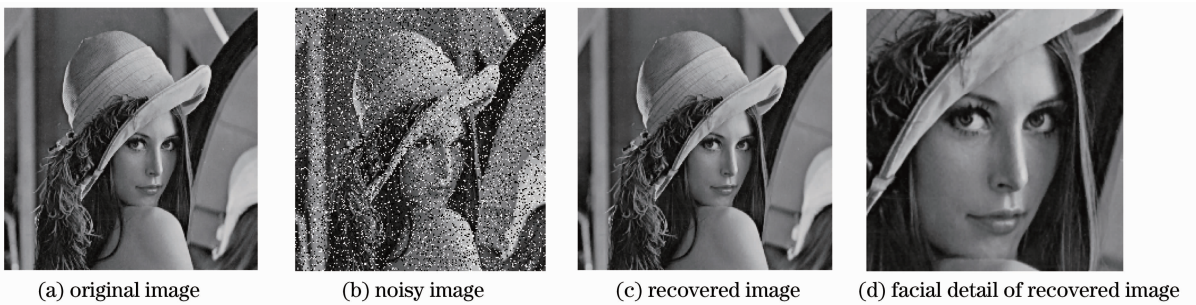


图 3 lena 修复效果(20%脉冲噪声)

Fig. 3 Recovered results of lena (20% impulse noise)

然后，对 lena 图像添加密度为 20% 的脉冲噪声。从图 3 可以看出，修复效果依然很理想，图像的整体轮廓未受影响，纹理和细节也得到了很好的保持，修复图像与原图像几乎完全一致，没有噪声残留，几乎没有产生局部模糊现象。修复后图像的 PSNR 为 34.56 dB。

图 4 为对 lena 图像添加密度为 30% 的脉冲噪声的恢复结果，PSNR 为 32.71 dB。相比图 1 和图 3，图 4 中出现了局部模糊现象，但并不是很明显，说明即使在高密度噪声环境下该算法也能够取得较好

的恢复效果。产生局部模糊是因为当脉冲噪声密度较大时，其能量较大，此时最小化(5)式会迫使全变差范数值低于理想值，使原本不需平滑的区域被平滑以满足最小化(5)式。所以，局部模糊产生的区域为像素值梯度较大的区域，如边缘、纹理细节处。

图 5(lena 图像)和图 6(cameraman 图像)为脉冲噪声密度不同时各算法比较。选择比较对象分别为本文算法、文献[13,21]中的 l_1 /TV 方法、中值滤波法、均值滤波法。需要说明，文献[13,21]中的 l_1 /TV 方法与本文方法的区别在于全变差范数采用

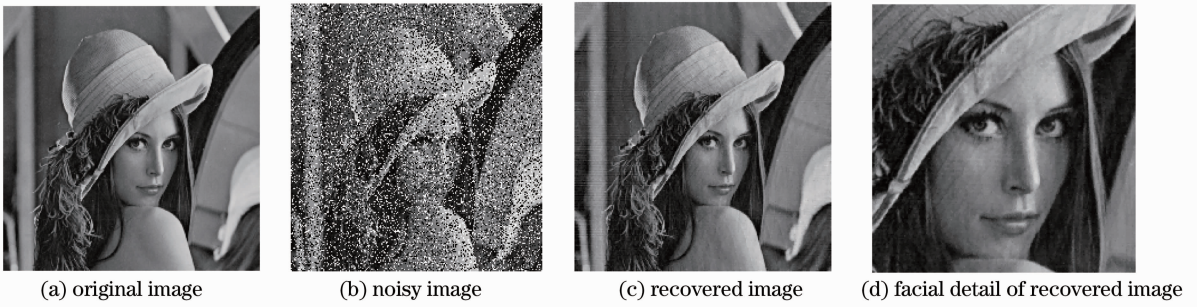


图 4 lena 修复效果(30%脉冲噪声)

Fig. 4 Recovered results of lena (30% impulse noise)

不同的解耦方式。可以看出,4种算法中本文算法拥有最高的峰值信噪比,并且随着脉冲噪声密度的增加,峰值信噪比的下降最为平缓,表现最为稳定。文献[13,21]中的 l_1/TV 方法稍逊于本文算法,峰值信噪比大约低 0.1~0.2 dB,下降速度也很平缓。中值滤波法很不稳定,当脉冲噪声密度较小时,其峰值信噪比与前两种方法相差不多,甚至还略高一点,但随着噪声密度的增大,中值滤波法的峰值信噪比迅速下降,当噪声密度高于 40% 时,其性能甚至差于均值滤波法。

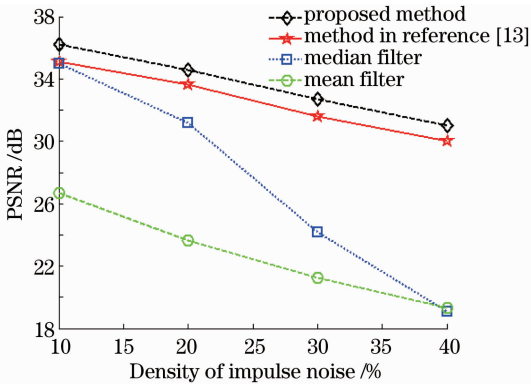


图 5 不同算法时的 PSNR (lena)

Fig. 5 PSNR of different algorithms (lena)

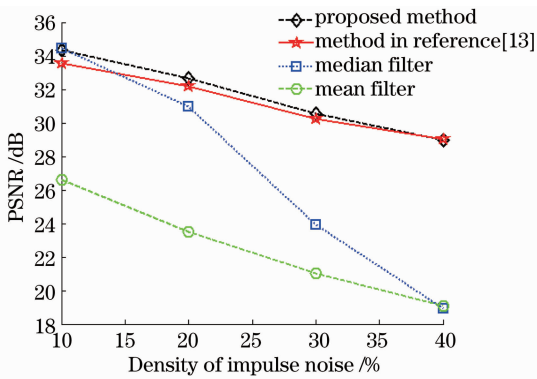


图 6 不同算法时的 PSNR (cameraman)

Fig. 6 PSNR of different algorithms (cameraman)

图 7 为脉冲噪声中亮点比例变化时的 PSNR 变化情况。其中横轴为亮点在脉冲噪声中所占比例,范围为 0~100%,纵轴为去噪后图像的 PSNR 值。为全面起见,分别选择脉冲噪声密度为 30% 和 40% 时的 lena 和 cameraman 图像来比较。可以看出,两幅图像中 PSNR 变化都很微弱,而且总体呈下降趋势,说明当亮点比例较小而暗点比例较大时,算法性能更好。

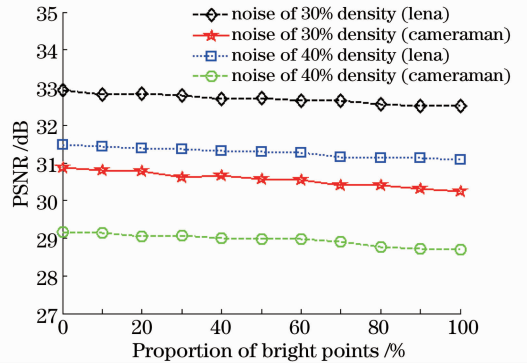


图 7 不同亮点比例下的 PSNR 变化

Fig. 7 PSNR variation with different proportion of bright points

经过仿真验证,算法 2 的收敛速度远远快于算法 1 和文献[13]中的算法。当其他条件相同时,算

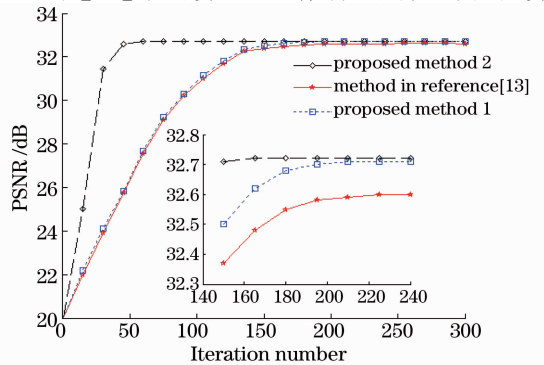


图 8 不同算法收敛速度比较

Fig. 8 Comparison of convergence rate of different algorithms

法 1 大概需要 200~300 次外部循环才能够得到稳定解,而算法 2 只需要 30~60 次外部循环就能够得到稳定解,极大提高了计算速度,且 PSNR 略高于算法 1(大约 0.1~0.3 dB),如图 8 所示。

6 结 论

提出了一种基于 Moreau 包络平滑 l_1 /TV 模型的有效去除图像脉冲噪声的方法。由于 l_1 范数和全变差范数均为不可微凸函数,无法求解,提出了利用 Moreau 包络对全变差范数进行平滑化处理,平滑后的全变差范数为可微凸函数,是原函数的可微紧下界,具有迭代形式的解析解,也是原函数的解,其梯度很容易计算。由于求解的外部循环属于收缩算子,提出了加速策略,给出了加速版的算法,详细阐述了问题的求解过程。仿真结果表明,该算法对脉冲噪声具有较强的去除能力,边缘和细节保持能力较强,即使在高密度噪声环境下,也能恢复出较高质量的图像。加速版的算法拥有非常高的收敛速度,是一种稳定高效的算法。文中假设噪声满足标准二项分布的脉冲噪声,而实际中脉冲噪声的强度并不一定是 255 或 0,下一步的工作就是建立更具一般性的噪声模型,并提出相应的解决方法。

参 考 文 献

- 1 Cheng Shubo, Zhang Huige, Liu Hao, *et al.*. Performance measurement of mechanical shutter and dark current for scientific-grade optical CCD [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(2): 0204001.
程书博, 张惠鸽, 刘 浩, 等. 科学级光学 CCD 暗电流及机械快门时间响应特性测试[J]. *光学学报*, 2012, 32(2): 0204001.
- 2 S Kumar, P Kumar, M Gupta, *et al.*. Performance comparison of median and Wiener filter in image de-noising [J]. *International Journal of Computer Applications*, 2010, 12(4): 27-31.
- 3 S Esakkirajan, T Veerakumar, A N Subramanyam, *et al.*. Removal of high density salt and pepper noise through modified decision based unsymmetric trimmed median filter [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(5): 287-290.
- 4 Zhao Ruizhen, Liu Xiaoyu, Li Chingchung, *et al.*. Wavelet domain image denoising via sparse representation [J]. *Scientia Sinica Information*, 2010, 40(1): 33-44.
赵瑞珍, 刘晓宇, Li Chingchung, 等. 基于稀疏表示的小波去噪[J]. *中国科学: 信息科学*, 2010, 40(1): 33-44.
- 5 Xue Qian, Yang Chengyi, Wang Huaxiang. Alternating direction method for salt-and-pepper denoising [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 2071-2076.
薛 倩, 杨程屹, 王化祥. 去除椒盐噪声的交替方向法[J]. *自动*

- 化学报, 2013, 39(12): 2071-2076.
- 6 Li Mengjie, Li Jing, Sun Yi. Sparse angular differential phase-contrast computed tomography reconstruction using l_1 -norm and curvelet constraints [J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(1): 0111003.
李梦婕, 李 镜, 孙 怡. 基于 l_1 范数和曲波系数双约束的稀疏角度微分相位衬度[J]. *光学学报*, 2014, 34(1): 0111003.
- 7 Li Xiuzhi, Yin Xiaolin, Jia Songmin, *et al.*. Improved TV- l_1 algorithm for smooth optical flow [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(10): 1015002.
李秀智, 尹晓琳, 贾松敏, 等. 改进的 TV- l_1 平滑光流估计[J]. *光学学报*, 2013, 33(10): 1015002.
- 8 Li Yongle, Lou Jingtao, Zhang Maojun, *et al.*. Image restoration for catadioptric defocus blur based on omni-total variation minimization [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(8): 0811006.
李永乐, 娄静涛, 张茂军, 等. 基于全向总变分最小化的折反射散焦模糊图像复原方法[J]. *光学学报*, 2013, 33(8): 0811006.
- 9 Wang Bin, Hu Liaolin, Xue Ruiyang. Image restoration based on degradation conversion and separable total variation model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(10): 1011002.
王 斌, 胡辽林, 薛瑞洋. 基于退化模型转换及可分离全变差模型的图像修复[J]. *光学学报*, 2014, 34(10): 1011002.
- 10 M Nikolova. A variational approach to remove outliers and impulsive noise [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 99-120.
- 11 J F Aujol, G Gilboa, T Chan, *et al.*. Structure-texture image decomposition-modeling, algorithm, and parameter selection [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2006, 67(1): 111-136.
- 12 C A Micchelli, L X Shen. Proximity algorithms for image models: Denoising [J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(4): 5009.
- 13 C A Micchelli, L X Shen, Y S Xu, *et al.*. Proximity algorithm for the l_1 /TV image model [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2013, 38(2): 401-426.
- 14 A Beck, M Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. *SIAM J Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 183-202.
- 15 A Beck, M Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation denoising and deblurring problems [J]. *IEEE Trans Image Processing*, 2009, 18(11): 2419-2434.
- 16 L Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, 60(1): 259-268.
- 17 F S Chen, L X Shen, Y S Xu, *et al.*. The Moreau envelope approach for the l_1 /TV image denoising model [J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2014, 8(1): 53-77.
- 18 Q Li, C A Miccheli, L X Shen, *et al.*. A proximity algorithm accelerated by Gauss-Seidel iterations for l_1 /TV denoising [J]. *Inverse Problem*, 2012, 28(9): 5033.
- 19 N Parikh, S Boyd. Proximal algorithms [J]. *Foundations and Trends in Optimization*, 2013, 1(3): 123-231.
- 20 R Rockafellar. *Convex Analysis* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1996.
- 21 C Clason, B Jin, K Kunisch. A duality-based splitting method for l_1 -TV image restoration with automatic regularization parameter choice [J]. *SIAM J Scientific Computing*, 2010, 32(3): 1484-1505.