

基于光开关和图论的多主体协作光纤传感网络 自修复方法研究

曾 田¹ 梁大开¹ 曾 捷¹ 张晓丽² 孟 静¹

(¹ 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 江苏 南京 210016)
² 信阳师范学院物理电子工程学院, 河南 信阳 464000)

摘要 针对多主体协作健康监测系统中光纤传感网络链路故障, 提出了一种基于光开关和图论的光纤传感网络自修复方法。研究采用图论相关理论表述含光开关光纤传感器网络链路的连通情况, 据此研究了光纤传感网络出现链路故障时光开关的切换策略, 实现对失效光纤布拉格光栅(FBG)传感器信号的自修复。以航空铝板结构试验件为实验对象, 针对光纤传感网络典型链路故障, 对基于光开关和多主体协作的光纤传感网络自修复效果进行了对比实验。实验结果表明: 在光开关和主体协作下, 识别精度较没有修复时识别精度提高 10.02 mm, 仅比网络结构完好时识别精度降低 3.61 mm, 有效提高了载荷识别精度以及光纤传感网络的可靠性。

关键词 光纤光学; 光开关; 图论; 多主体协作; 自修复

中图分类号 TN711.6; O157.5 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.1206002

Research on Self-Healing Method of Multi-Agent Collaboration Fiber Optic Sensor Network Based on Optical Switch and Graph Theory

Zeng Tian¹ Liang Dakai¹ Zeng Jie¹ Zhang Xiaoli² Meng Jing¹

¹ State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of
Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China

² College of Physics and Electronic Engineering, Xinyang Normal University, Xinyang, Henan 464000, China

Abstract Regarding to the link failure of fiber optic sensor network in multi-agent collaboration health monitoring system, a self-healing method of fiber optic sensing network based on optical switch and graph theory is proposed. Using the graph theory, the connectivity of fiber optic sensor network link with optical switches is expressed, the switching strategy when link failures happen in fiber optic sensor network is studied, and the self-healing of failure fiber Bragg grating (FBG) sensor' signals is realized. Using the aviation aluminum structure as the experimental object and aiming at the typical link failures of fiber optic sensor network, its self-healing effect based on optical switch and multi-agent collaboration through contrast experiment is studied. The experimental results show that, with optical switch and multi-agent collaboration, the recognition accuracy is improved by 10.02 mm compared with that of unrepaired model, which is only lower 3.61 mm compared with that of health model, showing that optical switch and multi-agent collaboration can effectively improve the loading recognition accuracy and the reliability of fiber optic sensor network.

Key words fiber optics; optical switch; graph theory; multi-agent collaboration; self-healing

OCIS codes 060.2300; 060.4251; 060.4257; 060.4258

1 引 言

光纤布拉格光栅(FBG)传感器由于体积小、重

量轻、耐腐蚀、复用性好、抗电磁干扰能力强等优点, 在结构健康监测中得到广泛应用^[1-3]。随着监测结

收稿日期: 2014-06-09; 收到修改稿日期: 2014-07-27

基金项目: 国家自然科学基金(51275239)、国家自然科学基金项目国际交流(51161120326)、航空科学基金(20125652055)、航天 CAST 创新基金、国家重点实验室自主课题团队项目(0513G01)、博士学科点专项科研基金(20123218110003)、江苏省产学研联合创新资金项目(BY2014003-01)、河南省科技公关计划项目(142102210482)、河南省教育厅科学技术研究重点项目(13A510770)、江苏高校优势学科建设工程资助项目

作者简介: 曾 田(1990—), 男, 硕士研究生, 主要从事光纤传感及健康监测等方面的研究。E-mail: zengtiannuaa@163.com

导师简介: 梁大开(1956—), 男, 博士, 教授, 主要从事智能材料与结构中的光纤传感及表面等离子体共振传感的应用等方面的研究。E-mail: liangdk@nuaa.edu.cn(通信联系人)

构如航空航天器、桥梁隧道等结构形式、功能设计及智能化控制日趋复杂化和多样化,加上服役环境中所受损伤隐蔽性强,失效机理复杂,损伤类型和程度难以判断,导致结构健康监测系统所需的 FBG 传感器数量急剧增加,将其组网所构成的准分布式光纤传感网络规模也变得日益庞大。如美国波音公司在波音 787 的机翼蒙皮上布置了数百根 FBG 传感器,对机翼疲劳、受力分布以及结构损伤进行实时监测^[4]。为了有效地协调和管理结构中的光纤传感网络,将人工智能领域的多主体协作技术应用到结构健康监测中^[5],建立多主体协作光纤智能监测系统对结构进行相应的健康监测。

在准分布式光纤传感网络实际测量中,普遍采用波分复用(WDM)技术^[6]。随着网络规模的日益庞大,基于 WDM 技术的光纤传感网络从点对点网络,到环形网,再到网状网型的发展方向,网络拓扑结构变得更加复杂和灵活化。由于光纤传感网络多埋置或粘贴在被测结构中,对于高温高压、性能蜕化时可能出现的网络故障^[7],如要更换日趋庞大和复杂的光纤传感网络,势必会造成较大的经济损失。研究在不更换光纤传感网络情况下如何实现对传感信号的有效提取,达到网络的自修复目的,对于结构健康监测具有重要意义。国内外多个研究小组已开展相关研究工作。2010 年,韩国全北国立大学的 Peng 等^[8]提出了一种高可靠性和扩展性的 FBG 传感器多层网络拓扑结构,从理论上分析了传感子网中出现一个或多个传输节点失效时整个网络的自修复。2011 年, Yeh 等^[9]提出了一种基于三角形-星形拓扑结构的高可靠性光纤传感网络,当网络中某个或某些光纤失效时,通过切换环形子网中的光开关重新寻找解调路径,实现整个网络的自修复。上述研究仅通过光开关从硬件角度分析了网络的自修复性,并没有从软件角度对其失效传感器进行进一步的修复。在国内,本课题组长期致力于光纤传感网络可靠性的研究,前期工作已通过引入光开关设计了具有更高可靠性的传感器网络拓扑结构,并对网络可靠性进行了理论分析^[10]。但该研究没有进一步设计组网更为灵活的自修复光纤传感网络,将其与图论相结合,并对网络自修复性进行相关实验验证。

基于此,本文以航空铝板结构试验件作为研究对象,结合多主体协作技术建立了光纤智能监测系统,针对多主体协作系统中大型传感器网络可能出现的不可靠性,提出了基于光开关的网状网型光纤传感网络,通过图论的方法规划光开关切换,对失效

FBG 传感信号的自修复性能进行研究。对于无法通过光开关切换技术实现失效传感器信号修复的情况,通过软件修复的方法研究了光开关和主体协作对航空铝板结构静态载荷的识别,以此来评估光纤传感网络的自修复性能。

2 多主体协作光纤传感网络自修复原理

2.1 基于多主体协作光纤智能监测系统

针对大型复杂结构的健康监测需求,以航空铝板结构试验件为监测对象,构建如图 1 所示的多主体协作光纤智能监测系统。

该多主体协作光纤智能监测系统主要包括传感层和数据处理层以及人机显示界面三部分。

其中传感层由 N 个光纤传感主体组构成,传感主体中根据监测对象的参量属性、承载特性,优化布置 FBG 传感器,构成光纤传感网络,感知结构的状态信息。

数据处理层包括传感性能自诊断/自修复主体、智能评估主体、系统协作主体。

传感性能自诊断/自修复主体中根据 FBG 传感器的性能退化规律、失效机理以及损伤对传感信号的衰变模型,检测网络是否出现链路故障以及确定链路故障的位置。若出现链路故障,通过光开关实现光纤传感网络的自修复。

智能评估主体中利用支持向量机、遗传算法等智能评估算法,对结构健康状况进行综合评估。当无法通过光开关切换从硬件角度对局部失效 FBG 传感器进行自修复时,智能评估主体通过模型重构的方法从软件角度实现对结构损伤信息的有效提取。

系统协作主体负责主体间的协调、协商机制及相互通信。若某个传感主体发生故障,协同其他主体共同对故障主体的结构健康状况进行监测和评估。

人机界面显示结构损伤信息,进行健康监测工作。

2.2 基于光开关和图论的光纤传感网络自修复

2.2.1 基于光开关的光纤传感网络拓扑结构

光开关是一种具有一个或多个可选的传输端口,可以对光传输线路或集成光路中的光信号进行逻辑操作与物理转换,在光纤通信系统、光纤传感网络自愈保护、光器件测量等方面有广泛的应用^[11]。为了提高网络的自修复性,将光开关嵌入到常用的 WDM 网络拓扑结构中构成如图 2 所示的网状网型光纤传感网络。该网络包含 N 个光纤传感主体,每

个光纤传感主体通过一个 1×2 的光开关连接到解调仪上,主体间通过两个 1×2 的光开关(光纤传感

主体 1 和 N)以及 $N-2$ 个 2×2 的光开关(其他光纤传感主体)相连接。

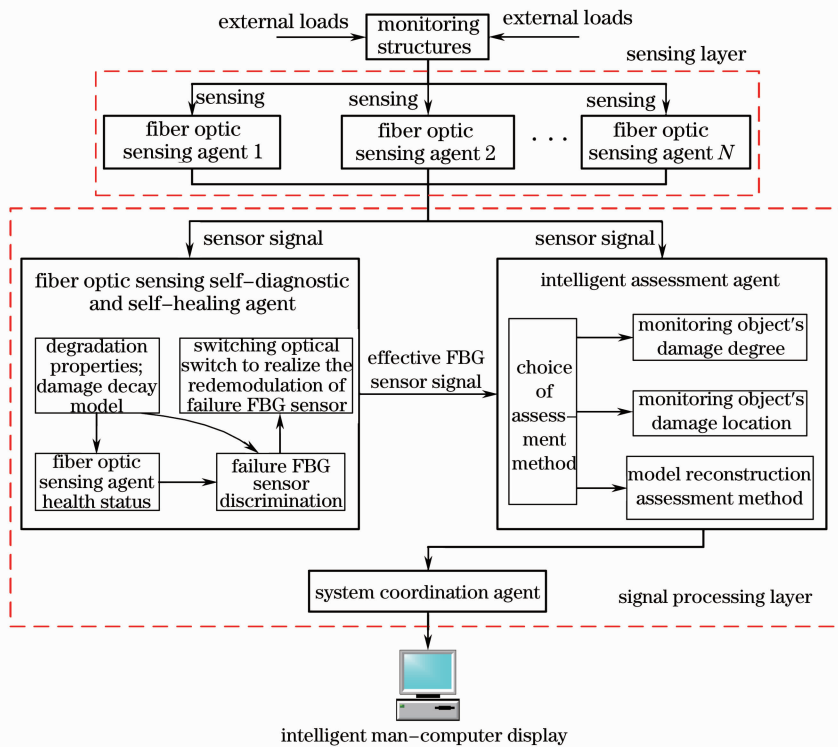


图 1 多主体协作光纤智能监测系统结构示意图

Fig. 1 Structure of multi-agent collaboration fiber intelligent monitoring system

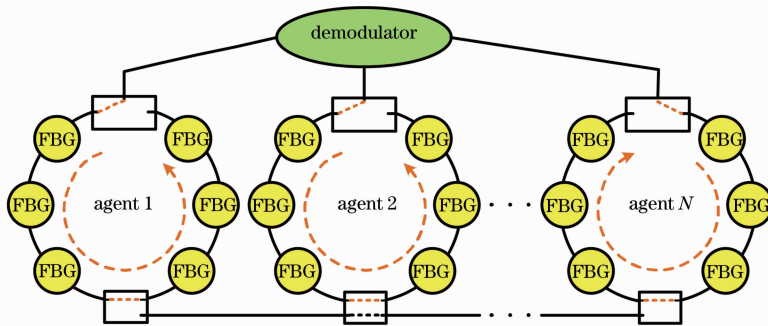


图 2 光纤传感网络拓扑结构

Fig. 2 Topology of fiber optic sensor network

当传感网络中出现链路故障时,通过动态切换光开关来改变光传输路径,采用分时采集法为网络中可修复的失效 FBG 传感器提供新的解调路径。这种方法能够有效减少网络中由于发生链路故障而受影响的 FBG 传感器数量,从而在不替换网络的前提下实现网络的自修复。

2.2.2 图论在光纤传感网络自修复中的应用

图论是数学的一个分支,以图为研究对象,在通信网络、交通运输等领域有着广泛应用。在图论中,图可表示为 $G = G(V, E)$,其中 $V = V(G)$ 是 G 的顶点集, $E = E(G)$ 是 G 的边集,如果图中的边有方向,

则被称为有向图。对于有向图,顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,边集 $E(G) = \{\langle v_i, v_j \rangle \dots \langle v_k, v_m \rangle\}$, $\langle v_i, v_j \rangle \in E(G)$ 表示顶点 v_i 到顶点 v_j 的有向边^[12]。

对于图 2 所示的光纤传感器网络拓扑结构,可将其抽象成一个图的形式。传感网络中光纤光栅解调仪和 FBG 传感器的集合就是图论中的顶点集,传输光纤即图论中的边集。网络中 FBG 传感器信号到达解调仪的方向看作是单向的,而传感器之间的信号传播是双向的。

设 $G(V, E)$ 是一个具有 n 个顶点的有向图,顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,则 G 的邻接矩阵 $A =$

对邻接矩阵小于等于 k 的各个次方进行运算，其中 k 为连接到光纤光栅解调仪上的每一光路中所含 FBG 传感器最大数目值。 \mathbf{A} 的 k 次幂 $\mathbf{A}^{(k)}$ 中元素 $a_{i1}^{(k)}$ 表示光纤传感网络中第 $i-1$ 个 FBG (即 FBG $i-1$) 同光纤光栅解调仪的连接情况， $a_{i1}^{(k)} = 0$ 代表 FBG $i-1$ 到光纤光栅解调仪之间长度为 k 的解调路径不存在， $a_{i1}^{(k)} = L (L=1, 2, \dots)$ 代表 FBG $i-1$ 到光纤光栅解调仪之间长度为 k 的解调路径有 L 条。

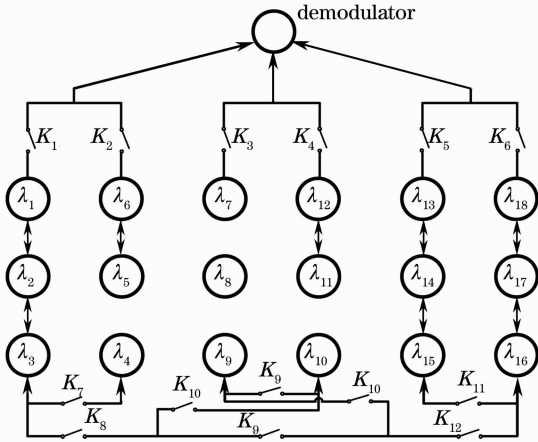


图 4 光纤传感网络链路故障简化图

Fig. 4 Simplified diagram of fiber optic sensor network link failure

对于图 3 所示的光纤传感网络，可知 $k=6$ 。对邻接矩阵 $\mathbf{A} \leq 6$ 的各个次方进行运算，依次搜索失效传感器所对应的 $a_{i1}^{(k)} \neq 0$ 时 K_s 的取值，并结合 Floyd 路由算法^[15]，得到失效 FBG 传感器重新解调时光开关的切换状态、最短解调路径长度和相应的

解调路径，如表 1 所示。通过表中所得的修复信息，动态切换光开关实现对光纤传感网络中失效 FBG 传感器的自修复。

综上所述，在光纤传感网络监测外部损伤系统中，基于光开关和图论的光纤传感网络自诊断/自修复具体的流程如图 5 所示。

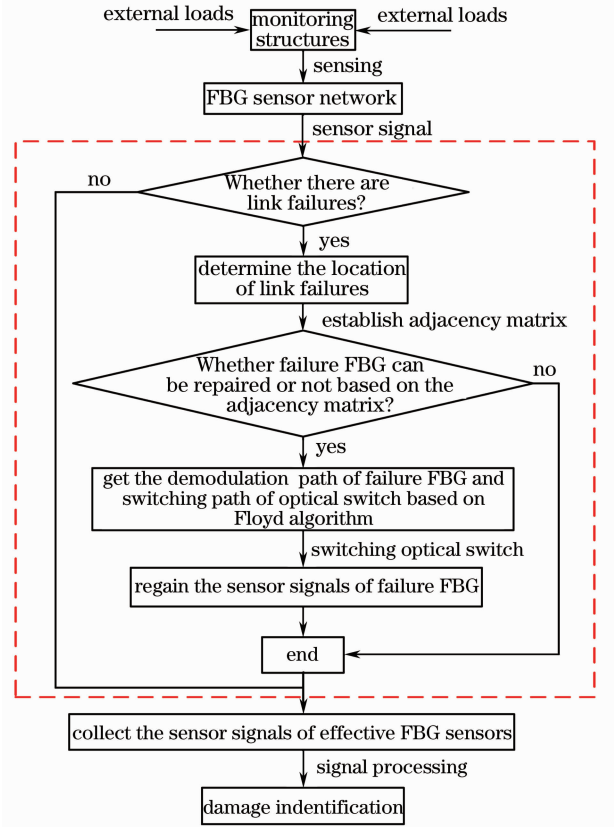


图 5 系统损伤监测流程图

Fig. 5 Flow chart of damage monitoring system

表 1 失效 FBG 传感器解调路径及光开关状态

Table 1 Demodulation path and optical switch status of failure FBG sensors

Failure FBG sensors	Optical switch switching state	Shortest path length	Demodulation path
FBG 5	$K_2 = 1$	2	FBG 5 → FBG 6 → demodulator
FBG 6	$K_2 = 1$	1	FBG 6 → demodulator
FBG 8	None	∞	None
FBG 9	$K_6 = K_{10} = K_{12} = 1$	4	FBG 9 → FBG 16 → FBG 17 → FBG 18 → demodulator
FBG 10	$K_1 = K_8 = K_{10} = 1$	4	FBG 10 → FBG 3 → FBG 2 → FBG 1 → demodulator
FBG 11	$K_4 = 1$	2	FBG 11 → FBG 12 → demodulator
FBG 12	$K_4 = 1$	1	FBG 12 → demodulator

3 仿真分析与实验验证

3.1 自修复模型建立

以航空铝板结构试验件作为研究对象，其材料为航空硬铝 LY12，其基本尺寸为 $1800 \text{ mm} \times 1200 \text{ mm} \times$

3 mm 。结构以四边固支的形式固定在支架上，支架垂直放置以支撑铝板结构。结构共划分为 6 块监测子区域，除去边缘部分，每块子区域尺寸为 $500 \text{ mm} \times 540 \text{ mm}$ 。在每个子区域内布置 6 个 FBG 传感器，形成

一个光纤传感网络主体。选择最上面的两个光纤传感主体作为实验区域,假设光纤传感网络出现如图 6 所示的链路故障(图中×所示),FBG 4、FBG 5、FBG 6 的传感信号不能得到解调。

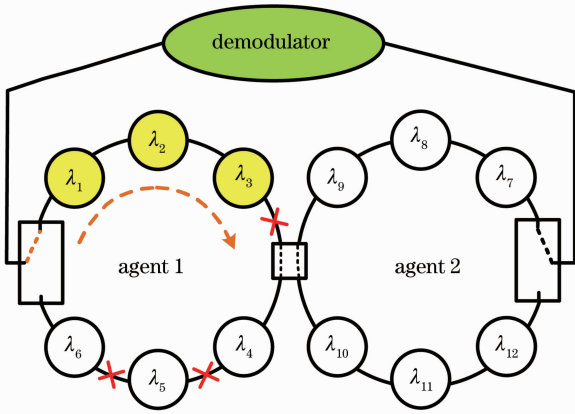


图 6 光纤传感网络链路故障图

Fig. 6 Diagram of fiber optic sensor network link failure

采用 2.2 节所阐述的修复方法,得到主体一中 FBG 4、FBG 6 传感信号可重新解调,FBG 5 传感信号不能通过任何路径得到解调。根据该修复信息建立自修复模型一(含光开关的单个主体自修复)、自修复模型二(含光开关和主体协作的自修复)两种修复模型。计算两种模型对该区域的载荷位置识别精度,并与没有修复和网络结构完好时作对比,以此来评估多主体协作系统中传感网络的自修复性和可靠性。

没有修复时,主体一能得到 FBG 1~FBG 3 的传感信号,如图 6 所示。仅含光开关时,主体一能得到 FBG 1~FBG 3、FBG 6 的传感信号,如图 7(a)所示。在含光开关和主体协作时,主体一能得到 FBG 1~FBG 4、FBG 6 的传感信号,如图 7(b)所示。

3.2 仿真分析

为验证自修复模型修复时对静态载荷的识别精度,采用基于 Ansys 的有限元仿真进行分析。建模时铝板的四边固支,在主体一区域加载点 Z 方向施加 200 N 的载荷,并采集布置传感器位置的应变值。仿真时选取 132 个加载点,对于采集到的 132 组数据,随机选择 110 组作为训练数据,另外的 22 组作为测试数据。

假设有 n 个预测点,第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 个预测点位置坐标的理论值与预测值分别为 (X, Y) 、 (X_i, Y_i) ,距离误差 $r_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2}$,令距离误差平均值为 p ,则有

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i. \quad (3)$$

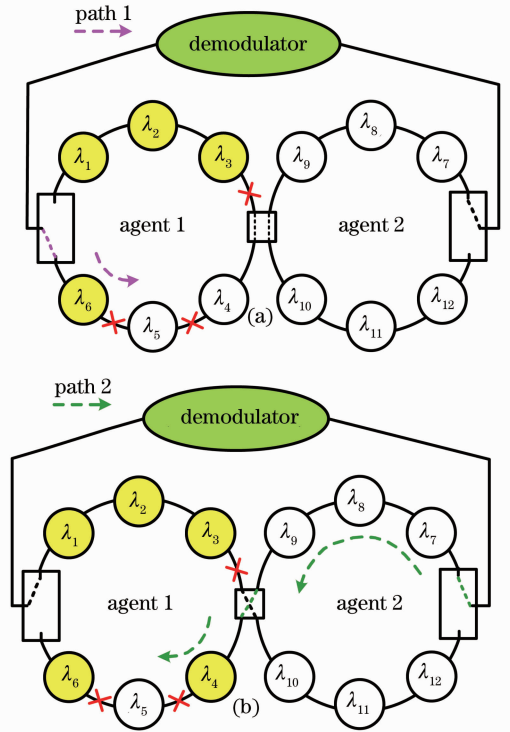


图 7 (a) 自修复模型一示意图; (b) 自修复模型二示意图

Fig. 7 (a) Schematic of self-healing model 1; (b) schematic of self-healing model 2

根据仿真数据,采用模型重构的方法对网络结构完好、自修复模型一、自修复模型二和没有修复中有效的 FBG 传感器信号数据进行训练,建立相应的学习机模型,通过支持向量机算法进行载荷位置识别,得到预测点实际位置与预测位置的距离误差值如图 8 所示。

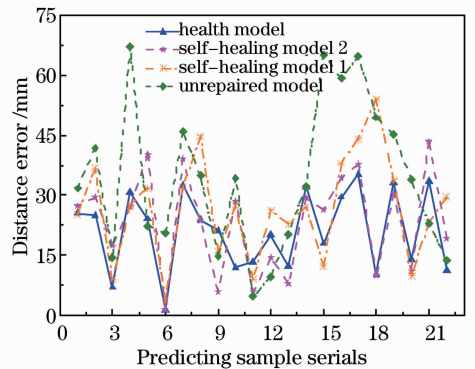


图 8 预测误差对比图

Fig. 8 Comparison of prediction error

由图 8 可知,自修复模型一、二的距离误差小于没有修复时的距离误差,略高于网络结构完好时的距离误差。进一步对自修复模型一、二的距离误差进行比较,可知自修复模型二的识别精度高于自修

复模型一的识别精度。因此,在光开关和主体协作下,能够提高载荷位置的识别精度以及光纤传感网络的可靠性。

3.3 实验验证

如图 9 所示,整个静载定位实验系统由大型航空铝板及支架、加载装置、数字测力仪、FBG 传感器、稳压电源、光开关、Si425 光纤光栅解调仪以及计算机等组成。

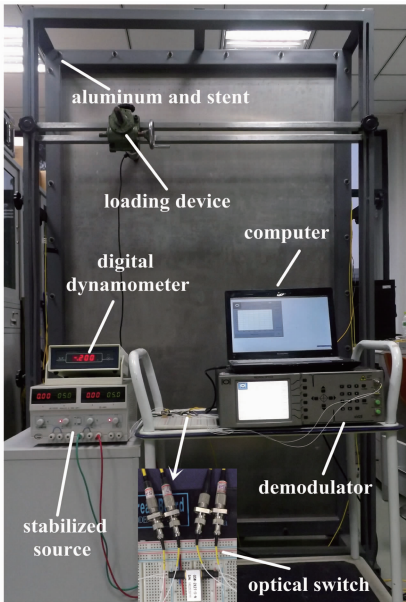


图 9 多主体光纤传感网络实验系统图

Fig. 9 Figure of multi-agent fiber sensor network experimental system

在传感主体一、二各布置 6 个 FBG 传感器,通过光开关相连接,稳压电源为光开关提供 5 V 的切换电压。同时增加一个的 FBG 传感器,作为温度补偿。

实验时模拟图 6 所示的链路故障,通过切换光开关实现对 FBG 4 和 FBG 6 传感器信号的修复。在实验区域选取了 196 个加载点,利用加载装置在每个加载点依次进行加载,加载力大小为 200 N,同时记录加载点坐标及 FBG 传感器中心波长值。将采集到的 196 组数据随机抽取 168 组作为训练数据,另外的 28 组作为测试数据。同理采用模型重构的方法和支持向量机算法进行载荷位置识别,得到预测点实际位置与预测位置的距离误差值如图 10 所示。

将距离误差值代入到(3)式中,可得到仿真和实验的距离误差平均值如表 2 所示。

由表 2 可知,在光开关和主体协作下,识别精度较没有修复时识别精度提高 10.02 mm,仅比结构

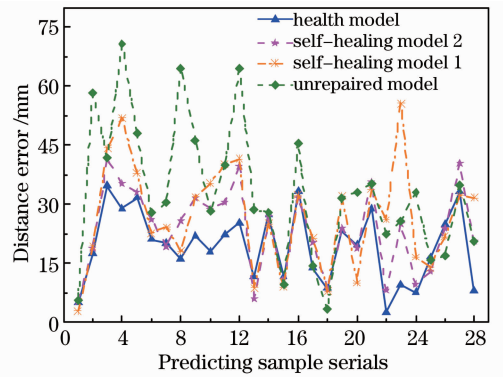


图 10 预测误差对比图

Fig. 10 Comparison of prediction error

完好时的预测精度降低 3.61 mm,通过表中数据还可看出,实验结果与仿真结果相符合。

表 2 距离误差平均值

Table 2 Average distance error

Model	Average distance error /mm	
	Simulation	Experiment
Health model	21.12	19.41
Self-healing model 2	23.16	23.02
Self-healing model 1	26.51	26.76
Unrepaired model	34.05	33.04

综上所述,当传感网络中发生故障时,网络对结构载荷位置识别效果会大幅度降低,从而影响整个光纤传感网络的可靠性。通过引入光开关和多主体协作技术,对网络进行最大程度上的修复,有效提高了网络对结构载荷位置的识别精度,进而提高整个多主体协作光纤智能监测系统的可靠性。

4 结 论

提出了一种基于光开关和图论的光纤传感网络自修复方法。通过图论的方法规划光开关的切换,实现对失效 FBG 传感信号的自修复。并以航空铝板结构试验件作为研究对象,通过仿真和实验,验证了在光纤传感网络中引入光开关和多主体协作技术,能有效提高载荷识别精度以及光纤传感网络的可靠性。本文所提出的基于光开关和图论的多主体协作光纤传感网络自修复方法特点如下:

1) 引入多主体协作技术构建多主体协作光纤智能监测系统,实现对航空铝板结构试验件的健康监测。

2) 将图论相关理论应用到光纤传感网络中,规划光开关的切换,实现对失效 FBG 传感信号的自修复。

3) 通过航空铝板结构试验件静载定位实验,结

果表明:在光开关和主体协作下,识别精度较没有修复时识别精度提高 10.02 mm,仅比结构完好时的预测精度降低 3.61 mm,有效提高了载荷识别精度以及光纤传感网络的可靠性。

参 考 文 献

- 1 Hongnan Li, Dongsheng Li, Gangbing Song. Recent applications of fiber optic sensors to health monitoring in civil engineering [J]. *Engineering Structures*, 2004, 26(11): 1647–1657.
- 2 Zhou Yabin, Zeng Jie, Zhang Qianyun, *et al.*. Measurement of the thermal diffusivity of carbon composite by water-heat balance method [J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(11): 1108001.
周雅斌, 曾捷, 张倩昀, 等. 基于光纤传感水热平衡法测量碳纤维圆筒结构的热扩散系数[J]. *中国激光*, 2013, 40(11): 1108001.
- 3 Tian Shizhu, Cao Changcheng, Wang Dapeng. Experiment study on fiber grating sensor monitoring the crack of concrete [J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(1): 0114001.
田石柱, 曹长城, 王大鹏. 光纤光栅传感器监测混凝土筒支梁裂缝的实验研究[J]. *中国激光*, 2013, 40(1): 0114001.
- 4 Alan Baker, Nik Rajic, Claire Davis. Towards a practical structural health monitoring technology for patched cracks in aircraft structure [J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2009, 40(9): 1340–1352.
- 5 Yichuan Jiang, J C Jiang. A multi-agent coordination model for the variation of underlying network topology [J]. *Expert Systems with Applications*, 2005, 29(2): 372–382.
- 6 Wang Yubao, Lan Haijun. Study of fiber Bragg grating sensor system based on wavelength-division multiplexing/time-division multiplexing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(8): 2196–2201.
王玉宝, 兰海军. 基于光纤布拉格光栅波/时分复用传感网络研究[J]. *光学学报*, 2010, 30(8): 2196–2201.
- 7 Zhou Li, Liang Dakai, Zeng Jie, *et al.*. Mechanism and experimental research on performance degeneration of fiber Bragg grating affected by temperature [J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(4): 0405007.
周丽, 梁大开, 曾捷, 等. 温度影响光纤光栅传感器性能退化机理及实验研究[J]. *中国激光*, 2012, 39(4): 0405007.
- 8 Limei Peng, Xinwan Li, Wonhyuk Yang, *et al.*. Investigation on reliability and scalability of an FBG-based hierarchical AOFNSN [J]. *Sensors*, 2010, 10(4): 2901–2918.
- 9 Chienhung Yeh, Chiwei Chow, Pingchun Wu, *et al.*. A simple fiber Bragg grating-based sensor network architecture with self-protecting and monitoring functions [J]. *Sensors*, 2011, 11(2): 1375–1382.
- 10 Zhang Xiaoli, Liang Dakai, Lu Jiyun, *et al.*. A high reliable optic fiber Bragg grating sensor network design [J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(1): 0105004.
张晓丽, 梁大开, 芦吉云, 等. 高可靠光纤布拉格光栅传感器网络设计[J]. *中国激光*, 2011, 38(1): 0105004.
- 11 Dong Zuoren, Xia Zhiping, Qin Shibo, *et al.*. Analyses and experimental study of a $N \times N$ optical switch using two facet reflective mirrors [J]. *Chinese J Lasers*, 2007, 34(2): 234–238.
董作人, 夏志平, 秦世博, 等. 基于双面反射镜的 $N \times N$ 光开关的特性分析和实验研究[J]. *中国激光*, 2007, 34(2): 234–238.
- 12 Tan Xuegong, Yu Shunzheng, Zhang Hongbin. Manycast routing in sparse splitting wavelength division multiplex networks [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(7): 0706022.
谭学功, 余顺争, 张宏滨. 波分复用网络中稀疏分光的选播路由[J]. *光学学报*, 2013, 33(7): 0706022.
- 13 Liu Yaguo. Adjacent matrix application in graph theory [J]. *Journal of Zhangjiakou Vocational College of Technology*, 2007, 20(4): 78–80.
刘亚国. 图论中邻接矩阵的应用[J]. *张家口职业技术学院学报*, 2007, 20(4): 78–80.
- 14 Zhang Xiaoli, Qiao Yuefeng, Liang Dakai. Studies on the reliability of the optic fiber self-diagnosing network based on the graph theory and strain rosette [J]. *Journal of Xinyang Normal University*, 2013, 26(4): 581–586.
张晓丽, 乔月凤, 梁大开. 基于图论及应变花的光纤自诊断网络可靠性研究[J]. *信阳师范学院学报*, 2013, 26(4): 581–586.
- 15 Wang Guiping, Wang Yan, Ren Jiachen. *Graph Algorithms Theory, Implementation and Applications* [M]. Beijing: Peking University Press, 2011. 180–188.
王桂平, 王衍, 任嘉辰. *图论算法理论、实现及应用*[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011. 180–188.

栏目编辑: 王晓琰