

# 基于矩形的摄像机自标定几何方法

徐 嵩 孙秀霞 刘 希 蔡 鸣

(空军工程大学航空航天工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要** 基于矩形两组对边的消隐点特性和隐含的长宽比信息,提出了一种新的摄像机自标定几何方法。该方法仅依据同一个矩形的两次或三次成像,即可在摄像机传感器特性已知或未知时标定摄像机内参数并辨识矩形长宽比。利用空间中有限距离点与同一无穷远点的连线相互平行和完全四边形的调和分割特性,以及被多次成像的矩形长宽比相同的特点,建立了摄像机内参数约束方程。通过建立与直线段成像相关的代价函数,提出了畸变参数寻优与线性内参数标定相迭代的畸变校正方法,可获得与摄像机无畸变情况下相当的自标定精度。在确定矩形任意两个顶点坐标的情况下,即可求解摄像机所有外参数。仿真实验表明,该标定算法收敛快速,对图像噪声不敏感。实际图像实验表明,与传统平面靶标法相比,该方法不但减少了预知条件,而且提高了标定精度和效率。

**关键词** 图像处理;机器视觉;摄像机自标定;消隐点;完全四边形;畸变校正

**中图分类号** TP391.4 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.1115002

## Geometry Method of Camera Self-Calibration Based on a Rectangle

Xu Song Sun Xiuxia Liu Xi Cai Ming

(Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University,  
Xi'an, Shaanxi 710038, China)

**Abstract** A new camera self-calibration approach is proposed based on the property of the vanishing points and the aspect ratio of the rectangle's two groups of opposite sides. This method can calibrate the camera's intrinsic parameters and identify the aspect ratio of the rectangle, whether known or unknown the character of camera's sensor, according to twice or triple imaging for the same rectangle, respectively. The equations of the camera's intrinsic parameters are established via three properties: the first one is that the lines which connect finite points and the same infinite points are parallel; the second one is the harmonic division which consists in the complete quadrilateral; the third one is the identity length-width ratio of the rectangle which imaged sometimes. A correction method of the camera distortion, utilizing which the accuracy of self-calibration correspond to the no distortion situation, is proposed via iterative between the optimization of nonlinear distortion parameters and solving of linear intrinsic parameters, based on constructing a cost function of lines' imaging. Simulations prove that the calibration algorithm can converge sharply, and the results are not sensitive to image noise. Real imaging tests prove that, comparing with traditional calibration by flat surface drone, this method can reduce foreknowledge conditions, as well as promoting both precision and efficiency of the calibration results.

**Key words** image processing; machine vision; camera self-calibration; vanish point; complete quadrilateral; distortion correction

**OCIS codes** 150.0155; 150.1488; 150.6910

## 1 引 言

摄像机模型确定了三维世界到二维图像的映射关系,摄像机标定即为确定该模型中相关参数的过

程。标定方法按对标定所需参考物能提供的已知信息分为靶标标定与自标定两类<sup>[1]</sup>。

靶标标定须利用参考点坐标精确已知的靶标,

**收稿日期**: 2014-04-14; **收到修改稿日期**: 2014-06-23

**基金项目**: 国家自然科学基金(61273141)、航空科学基金(20121396008,20135896025)、陕西省自然科学基金(2014JM8332)

**作者简介**: 徐 嵩(1985—),男,博士研究生,主要从事视觉导航理论与应用方面的研究。E-mail: xusong\_pla@163.com

**导师简介**: 孙秀霞(1962—),女,博士,教授,博士生导师,主要从事无人机导航与控制方面的研究。

E-mail: gcxysxx@126.com

并根据其空间坐标与图像坐标的对应关系求内参数。其中 Tsai<sup>[2]</sup> 提出两步标定方法综合了线性内参数的标定与摄像机畸变参数的非线性寻优,实现了较高的标定精度,被广泛应用。

Faugeras 和 Maybank 于 1992 年提出利用图像自身信息的自标定方法<sup>[2-4]</sup>。目前,该方法可分为三类<sup>[1]</sup>:利用绝对二次曲线的摄像机自标定方法<sup>[5]</sup>、利用本质矩阵的自标定方法和基于主动视觉的自标定方法。前两种方法须求解 Kruppa 方程而导致标定结果对噪声敏感;基于主动视觉的标定需要高精度平台(如经纬仪)<sup>[6]</sup>,成本高且附加条件苛刻。

利用合作目标的标定方法,已被学者广泛研究。主要采用规定形状<sup>[7-9]</sup>的目标或利用消隐线特征<sup>[9-11]</sup>完成自标定,也可通过求解未标定相机  $n$  点透视(PnP)问题也能实现自标定<sup>[12]</sup>。由于消隐线或消隐点广泛存在,相关方法的应用价值较高<sup>[13]</sup>。

现有的利用消隐线或消隐点完成自标定的方法,主要经圆环点求解基本矩阵后由 Cholesky 分解以得到摄像机内参数矩阵<sup>[7,9,14]</sup>。而文献<sup>[10]</sup>提出直接利用摄像机几何模型和正交消隐点特性的自标定方法避免了 Cholesky 分解。文献<sup>[7]</sup>和<sup>[10]</sup>均利用正交平行线完成自标定,其中文献<sup>[7]</sup>要求四组正交平行线(即两个矩形)在同一平面内。而文献<sup>[10]</sup>虽在标定时无需两组正交的平行线在同一平面内,但至少需对两组正交平行线的三次和四次成像才能分别满足摄像机三参数和四参数模型标定的最低要求。另外,由文献<sup>[15]</sup>可知,若仅仅利用一组平行线段的多次成像,则需求解高次方程方可完成标定。

事实上,在实际自标定过程中,可针对一个矩形获取多幅图像,其中就隐含了“被成像的矩形是相同的”这一关键约束。所提方法利用了该约束中“矩形长宽比相同”这一特性,只需根据一个矩形的两次和三次成像即可分别标定相机的三参数和四参数模型,同样达到了文献<sup>[10]</sup>避免 Cholesky 分解的效果。该方法减少了所须捕获图像的数量,同时能得到该矩形的长宽比信息,实现了摄像机标定与外界信息获取的同步,该信息还利于采用其他基于单应矩阵的标定方法<sup>[16]</sup>完成后续的视觉量测。进一步,利用文献<sup>[17]</sup>的代价函数,由 Nelder-Mead(NM)非线性单纯型法<sup>[18]</sup>可实现畸变校正,基本消除畸变对线性参数标定精度的影响。另外,若预知该矩形两个顶点的空间坐标时即可求解摄像机的全部外参数(每次成像时摄像机所处的位置和姿态)。

## 2 摄像机模型

图 1 的摄像机模型描述了摄像机线性内外参数和畸变。其中,有两个三维坐标系:世界坐标系( $O_w x_w y_w z_w$ )、摄像机坐标系( $O_c x_c y_c z_c$ );两个二维坐标:图像坐标系( $O_u uv$ )、虚拟成像坐标系( $O_n x_n y_n$ )。空间中的点  $p_w = (x_w, y_w, z_w, 1)^T$  对应  $O_u uv$  中的  $p_u = (u, v, 1)^T$ ,  $O_c x_c y_c z_c$  中的  $p_c = (x_c, y_c, f, 1)^T$ , 和  $O_n x_n y_n$  中的  $p_n = (x_n, y_n, 1)^T$ 。

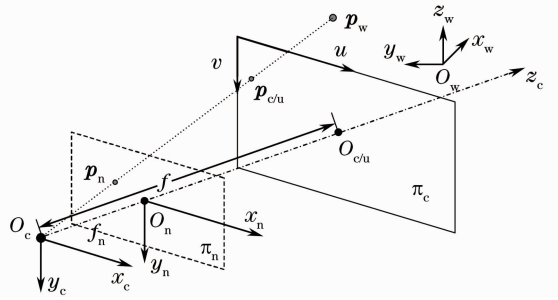


图 1 摄像机小孔几何模型

Fig. 1 Geometry model of the camera's pin-hole

### 2.1 摄像机线性投影模型

根据摄像机针孔投影模型<sup>[14]</sup>可得变换关系:

$$s p_u = s A p_n = A [I \ 0] p_c = A [R \ T] p_w, \quad (1)$$

式中  $s$  为齐次坐标的适应因子,  $A$  和  $[R \ T]$  分别为摄像机的内参数和外参数。

$$A = \begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} f_x = f/d_x \\ f_y = f/d_y \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $d_x$  和  $d_y$  分别为  $u$  和  $v$  方向上的像素间距,  $[u_0, v_0]$  为  $O_u$  的图像坐标。一般,感光单元为矩形,约定  $\gamma = 0$ , 同时,设  $d_x, d_y$  间关系:

$$d_y = \lambda d_x, \quad (3)$$

当(3)式中的参数  $\lambda$  已知时可构成摄像机三参数模型,否则将构成四参数模型<sup>[19]</sup>。

虚拟成像下的坐标  $p_n$  等价于在以焦距为  $f_n$  的虚拟成像面上的像点,即:

$$p_{n/t} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n/f_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_n/f_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} p_u, \quad (4)$$

特别地,当  $f_n = 1$  时,得到归一化坐标系(对应  $p_n$ ),以便建立与摄像机非线性畸变相关的模型(第 2.2 节);  $f_n = f_x$  时,可得到一个过渡成像坐标系  $O_u uv', v' = \lambda v, d_x = d_y$ , 即成像单元等效正方形,以便推导自标定算法(第 4 节)。

同时,由(1)式可引出无穷单应关系,即当  $\mathbf{p}_w$  为无穷远点  $[\mathbf{p}_w = (x_w, y_w, z_w, 0)^T]$  时可得:

$$\mathbf{sp}_u = \mathbf{A}[\mathbf{R} \quad \mathbf{T}]^T [x_w, y_w, z_w, 0]^T = \mathbf{AR} [x_w, y_w, z_w]^T, \quad (5)$$

并记,无穷远单应矩阵:  $\mathbf{H}_\infty = \mathbf{AR}$ .

## 2.2 摄像机非线性畸变模型

### 2.2.1 摄像机畸变校正模型

在虚拟成像坐标系  $O_n x_n y_n (f_n = 1)$  中定义畸变校正模型和参数[(6)式].该模型将易于处理当  $\lambda \neq 1$  时的情况,同时有利于采用非线性优化方法求解畸变参数.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \left(1 + \sum_{t_d=1}^q k_{t_d} r_{dn}^{2t_d}\right) \begin{bmatrix} (u_d - u_0) \\ (v_d - v_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ r_{dn} = \sqrt{x_{dn}^2 + y_{dn}^2} \\ \begin{bmatrix} x_{dn} \\ y_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n/f_x & 0 \\ 0 & f_n/f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_d - u_0) \\ (v_d - v_0) \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (6)$$

(6)式中,  $\mathbf{p}_u = (u, v, 1)^T$  为畸变校正后的图像坐标,  $\mathbf{p}_d = (u_d, v_d, 1)^T$  为考虑畸变时的图像坐标.  $k_{t_d}$  为第  $t_d$  阶径向畸变系数,一般取  $q \leq 2$ .

### 2.2.2 摄像机畸变仿真模型

为实现对自标定算法中的畸变校正的验证,设计与2.2.1节相对应的畸变仿真模型.求得图像点  $(u, v)$  在虚拟成像坐标系中相对中心  $O_n$  的位置  $(x_n, y_n)$  和距离  $r_n$ :

$$\begin{cases} r_n^2 = x_n^2 + y_n^2, \quad r_{nd(0)} = r_n \\ \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n/f_x & 0 \\ 0 & f_n/f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (7)$$

以  $r_{nd(0)}$  为初值,迭代求解畸变后成像点在  $O_n x_n y_n$  与  $O_n$  间的距离  $r_{nd(m)}$ ,取  $m = 15$ .

$$r_{nd(i)} = r_n \left[1 + \sum_{t_d=1}^q k_{t_d} r_{nd(i-1)}^{2t_d}\right]^{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (8)$$

由比例关系和(7)式得到畸变后的成像点:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ v_d \end{bmatrix} = \frac{r_{nd(m)}}{r_n} \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

综合2.1节、2.2.2节,将摄像机成像过程简记为

$$\mathbf{p}_u = F_{\text{image}}(\mathbf{c}_u, \mathbf{f}_u, \mathbf{k}, [\mathbf{R}, \mathbf{T}], \mathbf{p}_w), \quad (10)$$

式中  $\mathbf{c}_u = [u_0 \quad v_0]^T$ ,  $\mathbf{f}_u = [f_x, f_y]$ ,  $\mathbf{k} = [k_1, \dots, k_q]$ .

## 3 标定原理

### 3.1 矩形成像的平面几何特性

矩形的四个顶点  $(A, B, C, D)$  成像后能对应

$O_u w'$  中的  $(A_{u'}, B_{u'}, C_{u'}, D_{u'})$ , 并构成图2所示的完全四边形  $A_{u'}, B_{u'}, C_{u'}, D_{u'} P_{Fv} P_{Sv}$ .

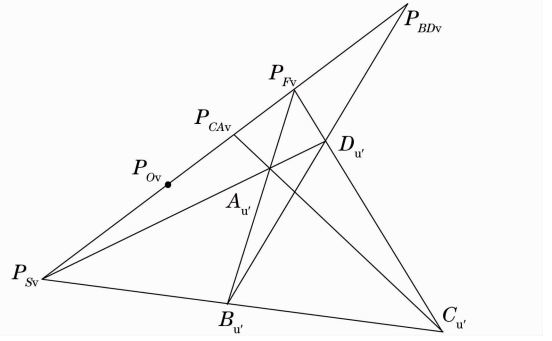


图2 矩形成像点几何关系

Fig. 2 Geometry relation of rectangle image points

**引理1:** 完全四边形调和分割特性(证明见文献[20])

如图2,  $A_{u'}B_{u'}C_{u'}D_{u'}$ ,  $A_{u'}B_{u'}$  与  $C_{u'}D_{u'}$  交于  $P_{Fv}$ ,  $A_{u'}D_{u'}$  与  $B_{u'}C_{u'}$  交于  $P_{Sv}$ ,  $A_{u'}C_{u'}$  和  $B_{u'}D_{u'}$  分别与  $P_{Fv}P_{Sv}$  交于  $P_{CAv}$  和  $P_{BDv}$ . 则  $P_{Fv}P_{Sv}$  被  $P_{CAv}$  和  $P_{BDv}$  调和分割, 即:

$$\frac{P_{Sv}P_{CAv}}{P_{Sv}P_{BDv}} = \frac{P_{Fv}P_{CAv}}{P_{Fv}P_{BDv}}. \quad (11)$$

**定理1:** 完全四边形中的反演点对

如图2, 以  $P_{Fv}P_{Sv}$  为直径并以其中心  $P_{Ov}$  为圆心的圆  $O_{Pov}$ , 则  $P_{CAv}$  和  $P_{BDv}$  关于  $O_{Pov}$  互为反演点, 即:

$$P_{Ov}P_{CAv} \cdot P_{Ov}P_{BDv} = (P_{Ov}P_{Fv})^2, \quad (12)$$

证明: 由(11)式, 并记:  $R_{POv} = P_{Ov}P_{Fv}$ , 可得:

$$\begin{aligned} P_{Sv}P_{CAv} \cdot P_{Fv}P_{BDv} &= P_{Fv}P_{CAv} \cdot P_{Sv}P_{BDv} \\ \Leftrightarrow (R_{POv} + P_{Ov}P_{CAv}) \cdot (P_{Ov}P_{BDv} - R_{POv}) &= \\ (R_{POv} - P_{Ov}P_{CAv}) \cdot (P_{Ov}P_{BDv} + R_{POv}) & \\ \Leftrightarrow R_{POv}^2 = P_{Ov}P_{CAv} \cdot P_{Ov}P_{BDv}. & \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.2 单次成像的摄像机光心约束

由于在欧几里得空间中, 若干有限距离点[设为  $P_{Fi} (i = 1, \dots, N)$ ] 与同一无穷远点  $(P_v)$  的连线相互平行<sup>[21]</sup>,  $[P_{Fi}P_v \parallel P_{Fk}P_v \quad (i \neq k)]$ .

因而, 如图3可得:

$$\begin{cases} O_cP_{Sv} \parallel BC, & O_cP_{Fv} \parallel AB \\ O_cP_{CAv} \parallel CA, & O_cP_{BDv} \parallel BD \end{cases} \quad (14)$$

对图3中通过光心与无穷远直线的平面上的信息进行解算可以得到光心  $O_c$  所在的圆  $C_{O_c}$ . 由平行线组之间保持夹角的性质可得:

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle P_{Sv}O_cP_{CAv} = \angle ACB \triangleq \alpha \\ \angle P_{Sv}O_cP_{BDv} = \pi - \alpha \\ \angle P_{Sv}O_cP_{Fv} = \pi/2 \end{cases}. \quad (15)$$

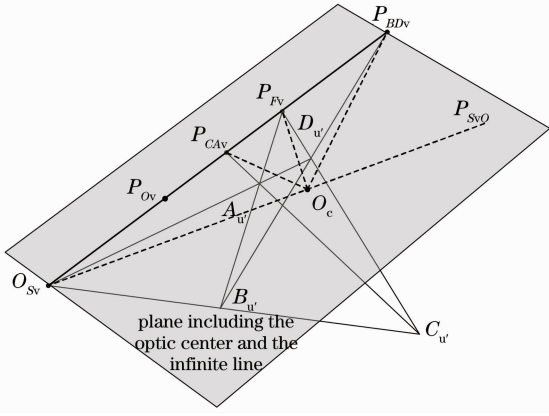


图 3 矩形成像与摄像机光心几何模型

Fig. 3 Geometry model of the rectangle image and camera's optical center

**推论 1:** 如图 4, 在圆  $O_{POv}$  上取两点  $P_{a1}$ 、 $P_{a2}$  满足  $\angle P_{Sv}P_{Ov}P_{a1} = \angle P_{Sv}P_{Ov}P_{a2}$ , 则:

- 1)  $P_{a1}P_{CAv}$  和  $P_{a2}P_{BDv}$  必交于  $P_{Ov}$  上;
- 2) 当  $\angle P_{Sv}P_{Ov}P_{a2} = 2\alpha$  时, 该交点  $O_{cp}$  满足 (15) 式对  $O_c$  的要求。

**证明:**

$$(12) \text{式} \Rightarrow \Delta P_{Ov}P_{BDv}P_{a1} \sim \Delta P_{Ov}P_{a1}P_{CAv}$$

$$\angle P_{Ov}P_{a1}P_{BDv} = \angle P_{Ov}P_{CAv}P_{a1} \triangleq \beta$$

设:  $P_{a2}P_{BDv}$  交圆  $O_{POv}$  于点  $O_c$

由定理 1,  $P_{CAv}$  与  $P_{BDv}$  关于圆  $O_{POv}$  反演

$$P_{BDv}P_{CAv} \cdot P_{BDv}P_{Ov} = P_{BDv}O_{cp} \cdot P_{BDv}P_{a2}$$

$$\angle P_{Ov}P_{a2}P_{BDv} = \angle O_{cp}P_{CAv}P_{BDv} = \beta$$

则  $P_{a1}$ 、 $P_{CAv}$ 、 $O_{cp}$  共线, 故 1) 得证。

由圆周角定理, 可得:

$$\begin{cases} \angle P_{a1}O_{cp}P_{Sv} = 0.5\angle P_{a1}P_{Ov}P_{Sv} = \alpha \\ \angle P_{a2}O_{cp}P_{Sv} = 0.5\angle P_{a2}P_{Ov}P_{Sv} = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle P_{BDv}O_{cp}P_{Sv} = \pi - \alpha$$

故  $O_{cp}$  满足 (15) 式的要求。

由推论 1 知, 如图 4, 作  $O_cC_c \perp P_{Sv}P_{Fv}$ , 则光心在以  $C_c$  为圆心,  $O_{cp}C_c$  为半径的圆  $C_{O_c}$  上。

为便于描述, 对第  $i$  个成像约定下述变量:

- (a)  $R_{Mi} = |P_{Ov}P_{Fv}|$ ;  $L_{Mi} = \min(P_{Ov}P_{CAv}, P_{Ov}P_{BDv})$ ;
- (b)  $P_{Ov}$  坐标  $(u_{Ov}, v_{Ov})$ ,  $d_{Ov} = |P_{Ov}C_c|$ ;
- (c) 向量  $P_{Sv}P_{Fv}$  在  $O_iuw$  坐标中的方向角为:  $\theta_i$ ;
- (d) 符号变量:

$$S_{Li} = \begin{cases} 1, & P_{Fv} \in P_{ACv}P_{BDv} \\ -1, & P_{Sv} \in P_{ACv}P_{BDv} \end{cases}$$

**定理 2:** 设被成像矩形  $ABCD$ ,  $\angle ACB = \alpha$ , 则成立:

$$\begin{cases} d_{Ov} = \frac{\bar{C}_{2\alpha}(L_{Mi}^2 + R_{Mi}^2) + 2R_{Mi}L_{Mi}}{2C_{2\alpha}L_{Mi} + R_{Mi} + L_{Mi}^2/R_{Mi}}, & (16) \\ \bar{C}_{2\alpha} = S_{Li}C_{2\alpha}, \quad C_{2\alpha} \triangleq \cos(2\alpha) \end{cases}$$

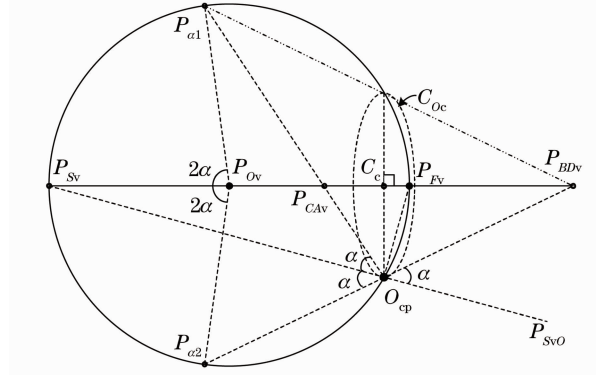


图 4 摄像机光心与成像矩形长宽比间的约束

Fig. 4 Constraint between the camera's optical center and the imaged rectangle's length-width ratio

式中  $C_{2\alpha}$  反映了矩形长宽比 [4.3 节 (66) 式]

**证明:**

设:

$$\Delta L_{Mi} = R_{Mi} \cos(2\alpha) = R_{Mi} C_{2\alpha}, \quad (17)$$

则:

$$\begin{aligned} |P_{a1}P_{BDv}|^2 &= R_{Mi}^2 - \Delta L_{Mi}^2 + (\Delta L_{Mi} + L_{Mi})^2 = \\ &2\Delta L_{Mi}L_{Mi} + R_{Mi}^2 + L_{Mi}^2, \end{aligned} \quad (18)$$

由圆的割线定理, 可得:

$$\begin{aligned} K_{Ti} &\triangleq \frac{O_{cp}P_{BDv}}{P_{a1}P_{BDv}} = \frac{O_{cp}P_{BDv} \cdot P_{a1}P_{BDv}}{|P_{a1}P_{BDv}|^2} = \\ &\frac{L_{Mi}^2 - R_{Mi}^2}{2\Delta L_{Mi}L_{Mi} + R_{Mi}^2 + L_{Mi}^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

最后, 由相似比例关系, 可得:

$$d_{Ov} = (\Delta L_{Mi} + L_{Mi})(1 - K_{Ti}) - \Delta L_{Mi}. \quad (20)$$

将 (17) 式和 (9) 式代入 (20) 式即得 (16) 式

### 3.3 两次成像的摄像机光心约束

获取两幅成像且已知成像单元特性  $\lambda$ , 根据两幅成像中对应的  $C_{2\alpha}$  反映同一个矩形的特点, 并根据  $\lambda$ , 可求得  $C_{2\alpha}$  和摄像机光心  $c'_i(u_0, v'_0)$ , 进而完成线性内参数标定。本节位置关系推导均在  $O_iuw'$  上进行。

由 3.2 节可知, 摄像机光心  $O_c$  同时通过球面  $P_{Ovi}$ , 即两球面交线 (圆  $C_{12}$ ) 和由 3.2 节中  $d_{Ov}$  确定的圆  $C_{ci}$  上。从而,  $O_c$  位于三个空间圆  $[C_{12}, C_{ci} (i = 1, 2)]$  的交点上。

由于球面  $P_{Ovi} (i = 1, 2)$  的直径均在  $O_iuw'$  平面上, 上述三个空间圆所在平面均垂直于  $O_iuw'$ , 而且若三个圆相交则交点一定在  $C_{12}$  上, 因而可将上述三个空间圆相交的立体问题等价于面  $O_iuw'$  上三线相交的问题。具体描述如下:

如图 5, 因两次成像对应同一个矩形, 故:

$$\angle P_{Sv1}O_{cp1}P_{CAv1} = \angle P_{Sv2}O_{cp2}P_{CAv2} = \alpha. \quad (21)$$

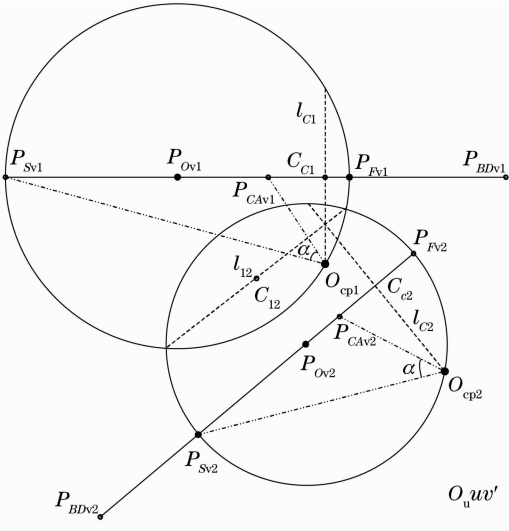


图5 摄像机光心位置解算

Fig. 5 Resolving of camera's optical center

由光心的唯一性,  $l_{C1}, l_{C2}, l_{12}$  应满足三线共点的特性, 从而在求得  $C_{2\alpha}$  后, 直接根据  $l_{12}, l_{C1}, l_{C2}$  的交点和球面  $P_{Ovi} (i = 1, 2)$  的交线可得光心的位置。

得到光心位置后依据坐标系  $O_uvw$  和  $O_uwv'$  间的转换关系 ( $v' = \lambda v$ ) 求得  $f_u, c_u$ 。

## 4 标定算法

第3节中重点描述了矩形成像、形状(长宽比)和摄像机光心的关系, 并基于此阐述求解摄像机线性内参数的方法。本节将阐述具体标定算法, 还将基于第3节中得到的几何关系, 推导  $\lambda$  未知时的标定算法。同时, 利用非线性优化方法, 设计能兼顾特征点优化估计的畸变校正算法。

### 4.1 摄像机线性内参数标定算法

首先, 根据矩形  $ABCD$  成像计算得到对应图像的  $(u_{\alpha}, v_{\alpha})$  和  $R_{M_i}, L_{M_i}, S_{L_i}, \theta_i$ 。

设矩形  $ABCD$  在第  $i$  幅图下成像为一般的凸四边形  $A_{ui}B_{ui}C_{ui}D_{ui}$ , 继而由

$$\begin{cases} \bar{P}_{Svi} = A_{ui}D_{ui} \times B_{ui}C_{ui} = (A_{ui} \times D_{ui}) \times (B_{ui} \times C_{ui}) \\ \bar{P}_{Fvi} = A_{ui}B_{ui} \times C_{ui}D_{ui} = (A_{ui} \times B_{ui}) \times (C_{ui} \times D_{ui}) \\ \bar{P}_{Svi}\bar{P}_{Fvi} = \bar{P}_{Svi} \times \bar{P}_{Fvi} \\ \bar{P}_{CAvi} = \bar{P}_{Svi}\bar{P}_{Fvi} \times A_{ui}C_{ui} = \bar{P}_{Svi}\bar{P}_{Fvi} \times (A_{ui} \times C_{ui}) \\ \bar{P}_{BDvi} = \bar{P}_{Svi}\bar{P}_{Fvi} \times B_{ui}D_{ui} = \bar{P}_{Svi}\bar{P}_{Fvi} \times (B_{ui} \times D_{ui}) \end{cases}, \quad (22)$$

得到各边延长线交点的齐次坐标后, 即可计算  $(u_{\alpha}, v_{\alpha})$  和  $R_{M_i}, L_{M_i}, S_{L_i}$ 。将方向角  $\theta_i$  表示为

$$\theta_i \sim \begin{cases} \sin \theta_i = [P_{Svi}(1) - P_{Fvi}(1)] / |P_{Svi}P_{Fvi}| \\ \cos \theta_i = [P_{Svi}(2) - P_{Fvi}(2)] / |P_{Svi}P_{Fvi}| \end{cases}, \quad (23)$$

$P_{Svi}P_{Fvi}$  所在直线的方程在  $O_uwv$  中可表示为

$$l_{Di}: \begin{cases} b_i(u - u_{\alpha}) - a_i(v - v_{\alpha}) = 0 \\ a_i = \cos \theta_i, \quad b_i = \sin \theta_i \end{cases}, \quad (24)$$

转换到  $O_uwv'$  中后为[参考(3)式]

$$l'_{Di}: \begin{cases} b_i(u - u_{\alpha}) - a_i\lambda^{-1}(v' - v'_{\alpha}) = 0 \\ v'_{\alpha} = \lambda v_{\alpha} \end{cases}, \quad (25)$$

则, 在  $O_uwv'$  中, 与  $l'_{Di}$  垂直于  $(u_{\alpha}, v'_{\alpha})$  的  $l'_{D\perp i}$  为

$$l'_{Di}: a_i(u - u_{\alpha}) + b_i\lambda(v' - v'_{\alpha}) = 0, \quad (26)$$

再次转换到  $O_uwv$  得  $l_{D\perp i}$ :

$$l_{D\perp i}: a_i(u - u_{\alpha}) + b_i\lambda^2(v - v_{\alpha}) = 0. \quad (27)$$

根据(16)式得到的  $d_{\alpha}$ , 可在  $O_uwv'$  中由  $l_{D\perp i}$  平移得到图5中的  $l_{Ci}$ :

$$l_{Ci}: a_i(u - u_{\alpha} - a_i d_{\alpha}) + b_i\lambda^2(v - v_{\alpha} - b_i d_{\alpha}) = 0, \quad (28)$$

即:

$$\begin{cases} a_i u + b_i v_{\Lambda} + c_{\alpha} + \eta_{\alpha} d_{\alpha} = 0 \\ \Lambda = \lambda^2, \quad c_{\alpha} = -a_i u_{\alpha} - b_i \Lambda v_{\alpha} \\ v_{\Lambda} = \Lambda v, \quad \eta_{\alpha} = -(a_i^2 + b_i^2 \Lambda) \end{cases}. \quad (29)$$

其次, 依据  $O_uwv$  上成像, 在过渡坐标系  $O_uwv'$  上, 求解圆  $P_{Ovi} (i = 1, 2)$  的交线  $l'_{12}$ 。

将坐标系  $O_uwv'$  中的圆  $P_{Ovi} (i = 1, 2)$ :

$$(u - u_{\alpha})^2 + (v' - v'_{\alpha})^2 = (a_i^2 + \lambda^2 b_i^2) R_i^2, \quad (30)$$

转换到  $O_uwv$  中为

$$(u - u_{\alpha})^2 + \lambda^2 (v - v_{\alpha})^2 = (a_i^2 + \lambda^2 b_i^2) R_i^2. \quad (31)$$

在  $O_uwv$  中求解两圆  $P_{Ovi} (i = 1, 2)$  的交线:

$$\begin{aligned} & 2(v_{\alpha} - v_{\alpha}')\lambda^2 v + \lambda^2 [(v_{\alpha}'^2 - b_i^2 R_i^2) - (v_{\alpha}^2 - b_j^2 R_j^2)] + \\ & 2(u_{\alpha} - u_{\alpha}')u + [(u_{\alpha}'^2 - a_i^2 R_i^2) - (u_{\alpha}^2 - a_j^2 R_j^2)] = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

即:

$$\begin{cases} \eta_{Uij} u + \eta_{Vij} v_{\Lambda} + \eta_{Aij} + \eta_{Bij} \Lambda = 0 \\ \eta_{Uij} = 2(u_{\alpha}' - u_{\alpha}), \quad \eta_{Vij} = 2(v_{\alpha}' - v_{\alpha}) \\ \eta_{Aij} = (u_{\alpha}'^2 - a_i^2 R_i^2) - (u_{\alpha}^2 - a_j^2 R_j^2) \\ v_{\Lambda} = \Lambda v, \quad \eta_{Bij} = (v_{\alpha}'^2 - b_i^2 R_i^2) - (v_{\alpha}^2 - b_j^2 R_j^2) \end{cases}. \quad (33)$$

#### 4.1.1 预知传感器单元特性的标定算法

当传感器单元参数  $\lambda$  已知时, 通过两次成像即可得到摄像机内参数。通过(29)式和(33)式(可设  $i = 1, 2$ ) 联立构建关于  $u, v_{\Lambda}$  的方程组:

$$\begin{bmatrix} \eta_{Uij} & \eta_{Vij} & \eta_{Aij} & \eta_{Bij} \Lambda \\ a_i & b_i & c_{\alpha} + \eta_{\alpha} d_{\alpha} \\ a_j & b_j & c_{\alpha} + \eta_{\alpha} d_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v_{\Lambda} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

若  $l_C, l_{C'}, l_{ij}$  三线共点, 则方程[(34) 式] 有解。也等价于系数矩阵  $\Psi$  的行列式值为 0:

$$\Psi \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{Uij} & \eta_{Vij} & \eta_{Aij} + \eta_{Bij}\Lambda \\ a_i & b_i & c_{Ox} + \eta_{Od}d_{Ox} \\ a_j & b_j & c_{Oy} + \eta_{Od}d_{Oy} \end{bmatrix}, \quad |\Psi| = 0, \quad (35)$$

$$\begin{cases} E_{\bar{u}ij} = \eta_{Od} \begin{vmatrix} \eta_{Uij} & \eta_{Vij} \\ a_j & b_j \end{vmatrix}, & E_{\bar{v}ij} = -\eta_{Od} \begin{vmatrix} \eta_{Uij} & \eta_{Vij} \\ a_i & b_i \end{vmatrix} \\ E_{cij} = \begin{vmatrix} \eta_{Uij} & \eta_{Vij} & \eta_{Aij} + \eta_{Bij}\Lambda \\ a_i & b_i & c_{Ox} \\ a_j & b_j & c_{Oy} \end{vmatrix} \end{cases}, \quad (36)$$

令:

得:

$$E_{\bar{u}ij}d_{O1} + E_{\bar{v}ij}d_{O2} + E_{cij} = 0, \quad (37)$$

将(16)式简化为

$$\begin{cases} d_{Ox} = (L_{Sq\bar{i}}\bar{C}_{2a} + L_{Pri}) / (L_{di}\bar{C}_{2a} + L_{Dvi}) \\ \begin{cases} L_{Sq\bar{i}} = L_{Mi}^2 + R_{Mi}^2, & L_{Pri} = 2R_{Mi}L_{Mi} \\ L_{Dvi} = R_{Mi} + L_{Mi}^2/R_{Mi}, & L_{di} = 2L_{Mi} \end{cases} \end{cases}. \quad (38)$$

将(38)式代入(37)式后经过通分处理可得(40)式, 由(40)式中的一元二次方程可解得:

$$C_{2a} = \frac{-\eta_{lij} \pm \sqrt{\eta_{2ij}^2 - 4\eta_{2ij}\eta_{0ij}}}{2\eta_{2ij}}, \quad (39)$$

$$\begin{cases} \eta_{2ij}C_{2a}^2 + \eta_{lij}C_{2a} + \eta_{0ij} = 0 \\ \begin{cases} \eta_{2ij} = S_{Li}S_{Lj}(E_{\bar{u}ij}L_{dj}L_{Sq\bar{i}} + E_{\bar{v}ij}L_{di}L_{Sq\bar{j}} + E_{cij}L_{di}L_{dj}) \\ \eta_{lij} = E_{\bar{u}ij}[S_{Li}L_{Sq\bar{i}}L_{Dvj} + S_{Lj}R_{M\bar{i}}L_{di}L_{dj}] + E_{\bar{v}ij}[S_{Lj}L_{Sq\bar{j}}L_{Dvi} + S_{Li}R_{M\bar{j}}L_{di}L_{dj}] + E_{cij}[S_{Li}L_{Dvi}L_{dj} + S_{Lj}L_{Dvj}L_{di}] \\ \eta_{0ij} = E_{\bar{u}ij}R_{M\bar{i}}L_{di}L_{Dvj} + E_{\bar{v}ij}R_{M\bar{j}}L_{dj}L_{Dvi} + E_{cij}L_{Dvi}L_{Dvj} \end{cases} \end{cases}, \quad (40)$$

记:  $C_{2a,\tau}$ , ( $\tau = 1, 2$ ) 为(39) 式中的两个解

将  $C_{2a,\tau}$  代入(38) 式求得  $d_{Ox,\tau}$  并代入(34) 式后求解得  $u, v_A$ , 即得图像中心  $(u_{0,\tau}, v_{A0,\tau})$ :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_{0,\tau} \\ v_{A0,\tau} \end{bmatrix} = -(\mathbf{H}_{Nij}^T \mathbf{H}_{Nij})^{-1} \mathbf{H}_{Nij}^T \mathbf{Y}_{Nij,\tau}, \quad v_{0,\tau} = v_{A0,\tau} / \Lambda \\ \mathbf{H}_{Nij} = \begin{bmatrix} \eta_{Uij} & \eta_{Vij} \\ a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{Nij} = \begin{bmatrix} \eta_{Aij} + \eta_{Bij}\Lambda \\ c_{Ox} + \eta_{Od}d_{Ox,\tau} \\ c_{Oy} + \eta_{Od}d_{Oy,\tau} \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (41)$$

然后, 选取在  $l_{12}$  处于圆  $P_{Ox1}, P_{Ox2}$  内的  $(u_{0,\tau}, v_{A0,\tau})$  为正式解 ( $\tau = 1, 2$ )。

最后, 由坐标系  $O_u w v'$  中两个球面的交线圆  $C_{12}$  即可确定焦距  $f$  值:

$$\begin{cases} f^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i^2 - D_i^2) \\ \begin{cases} R_i^2 = (a_i^2 + \Delta b_i^2) R_i^2 \\ D_i^2 = (u_{Ox} - u_0)^2 + (v_{Ox} - v_0')^2 \end{cases} \end{cases}, \quad (42)$$

在(42)式中取  $n=2$  即可求得  $u_0, v_0, f$ 。

#### 4.1.2 未知传感器单元特性的标定算法

当传感器单元参数  $\lambda$  未知时, 可自由设定  $\Lambda$  并

代入 4.1.1 节的算法而得到一组标定值, 这组标定值满足两次成像的矩形相似。而由投影性质可知在视线方向能按比例找到两个相同的矩形符合代入  $\Lambda$  后的摄像机标定。因而, 无法通过两次成像来完成摄像机四参数标定, 这里推导利用三次成像完成标定的算法。

可先由交线(37)式得到  $\Lambda$  与  $(u_0, v_{A0})$  的关系

令:  $\mathbf{H}_\gamma = [[\eta_{Uij}]_{n \times 1}^T \quad [\eta_{Vij}]_{n \times 1}^T]$ , 其中  $n=3$ , 并由:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\gamma^T \mathbf{H}_\gamma = \begin{bmatrix} \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} \\ \bar{h}_{12} & \bar{h}_{22} \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{H}_\gamma^T \mathbf{H}_\gamma)^{-1} = \frac{-1}{\bar{h}_{Dv}} \begin{bmatrix} \bar{h}_{22} & -\bar{h}_{12} \\ -\bar{h}_{12} & \bar{h}_{11} \end{bmatrix}, \\ \begin{cases} \bar{h}_{11} = \sum_{i \neq j} \eta_{Uij}^2, & \bar{h}_{12} = \sum_{i \neq j} \eta_{Uij} \eta_{Vij} \\ \bar{h}_{22} = \sum_{i \neq j} \eta_{Vij}^2, & \bar{h}_{Dv} = \bar{h}_{12}^2 - \bar{h}_{11} \bar{h}_{22} \end{cases} \end{cases}, \quad (43)$$

得:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_{A0} \end{bmatrix} = -(\mathbf{H}_\gamma^T \mathbf{H}_\gamma)^{-1} \mathbf{H}_\gamma^T \begin{bmatrix} \eta_{Aij} + \eta_{Bij}\lambda^2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (44)$$

令:



$$\begin{cases} \mathbf{H}_\gamma^T \begin{bmatrix} \eta_{Aij} + \eta_{Bij}\lambda^2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_u + B_u\lambda^2 \\ A_v + B_v\lambda^2 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} A_u = \sum \eta_{Uij} \eta_{Aij}, & B_u = \sum \eta_{Uij} \eta_{Bij} \\ A_v = \sum \eta_{Vij} \eta_{Aij}, & B_v = \sum \eta_{Vij} \eta_{Bij} \end{cases} \end{cases}, \quad (45)$$

据此可计算得到：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_{\Delta 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_U + B_U\lambda^2 \\ A_V + B_V\lambda^2 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} A_U = (\bar{h}_{22}A_u - \bar{h}_{12}A_v)/\bar{h}_{Dv} \\ B_U = (\bar{h}_{22}B_u - \bar{h}_{12}B_v)/\bar{h}_{Dv} \\ A_V = (\bar{h}_{11}A_u - \bar{h}_{12}A_v)/\bar{h}_{Dv} \\ B_V = (\bar{h}_{11}B_u - \bar{h}_{12}B_v)/\bar{h}_{Dv} \end{cases} \end{cases}, \quad (46)$$

代入直线  $l_{C_i}$  方程[(29)式]可得：

$$\begin{cases} A_{\Delta i} + B_{\Delta i}\Delta - (a_i^2 + \Delta b_i^2)d_{O_i} = 0 \\ \begin{cases} A_{\Delta i} = a_iA_U + b_iA_V - a_iu_{O_i} \\ B_{\Delta i} = a_iB_U + b_iB_V - b_iv_{O_i} \end{cases} \end{cases}, \quad (47)$$

将(38)式代入(47)式并通分后可得：

$$\begin{cases} \eta_{\Delta i}C_{2\alpha} + \eta_{\Delta i}\Delta + \eta_{\Delta i}(C_{2\alpha}\Delta) + \eta_{\Delta i} = 0 \\ \begin{cases} \eta_{\Delta i} = S_{Li}(A_{\Delta i}L_{di} - a_i^2L_{Sq_i}) \\ \eta_{\Delta i} = (B_{\Delta i}L_{Dvi} - b_i^2L_{Pr_i}) \\ \eta_{\Delta i} = S_{Li}(B_{\Delta i}L_{di} - b_i^2L_{Sq_i}) \\ \eta_{\Delta i} = (A_{\Delta i}L_{Dvi} - a_i^2L_{Pr_i}) \end{cases} \end{cases}, \quad (48)$$

三次成像在(48)式中对应( $i=1,2,3$ ),且记：

$$C_{\Delta 2\alpha} = \Delta C_{2\alpha}. \quad (49)$$

联立求解可得： $C_{2\alpha(0)}$  和  $\Delta(0)$ ,  $C_{\Delta 2\alpha(0)}$ ；但当图像

成像有噪声或畸变时,所得线性方程的解并不满足(49)式的约束,即： $C_{\Delta 2\alpha(0)} \neq \Delta(0)C_{2\alpha(0)}$ 。因而,本节采用非线性最小二乘算法(NLS),以  $C_{2\alpha(0)}$ ,  $\Delta(0)$  为初值寻优得解：

$$\min_{C_{2\alpha}, \Delta} \left\{ \sum_{i=1}^3 (\eta_{\Delta i}C_{2\alpha} + \eta_{\Delta i}\Delta + \eta_{\Delta i}C_{2\alpha}\Delta + \eta_{\Delta i})^2 \right\}. \quad (50)$$

进一步由(46)式可得到( $u_0, v_0$ )

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_U + B_U\Delta \\ A_V/\Delta + B_V \end{bmatrix}. \quad (51)$$

最后,设(42)式中的参数  $n=3$  即可求得摄像机焦距  $f$ ,至此完成对  $u_0, v_0, f, \lambda$  的标定。这里也可等价地将  $f, \lambda$  表示为： $f_x = f$ ;  $f_y = \lambda^{-1}f$ 。

## 4.2 畸变参数标定与成像特征点优化估计

### 4.2.1 摄像机畸变参数标定方法

摄像机成像畸变将引入线性内参数自标定偏差,由于采用了矩形(或正交平行线组)作为自标定的参照物。因而,当畸变较大且  $\lambda$  已知时,可以采用文献[17]对目标矩形成像进行校正。

当畸变较小且  $\lambda$  未知时,可先完成线性内参数的自标定,而后基于文献[17]中的 3.3.2 节提出的关于图像中心和畸变参数的局部非线性优化方法,针对所提出的分段求和指标[(52)式],完成畸变校正参数求解[其中,函数  $F_i$  采用(6)式的畸变校正模型,而非文献[17]的畸变模型]。

$$\begin{cases} \begin{cases} F_D(\mathbf{c}_{O(t-1)}, \mathbf{f}_{c(t-1)}, \mathbf{k}_{S(t-1)}) = \sum_{i=1}^N F_i[\mathbf{c}_{O(t-1)}, \mathbf{f}_{c(t-1)}, \mathbf{k}_{S(t-1)}] \\ \mathbf{k}_{S_{Opt}(t)} = \min_{\mathbf{k}_S} \{ F_D[\mathbf{c}_{O(t-1)}, \mathbf{f}_{c(t-1)}, \mathbf{k}_{S(t-1)}] \} \\ \mathbf{k}_{S(t-1)} = [k_1, \dots, k_m]_{(t-1)}, \quad \mathbf{f}_{c(t)} = [f_{x(t)} \quad f_{y(t)}]^T \\ \mathbf{k}_{S_{Opt}(t-1)} = [k_{Opt1}, \dots, k_{Optm}]_{(t-1)}, \quad \mathbf{c}_{O(t)} = [u_{0(t)} \quad v_{0(t)}]^T \end{cases} \end{cases}. \quad (52)$$

结合本文的自标定算法,通过第  $t-1$  次线性标定结果  $\mathbf{c}_{O(t-1)}, \mathbf{f}_{c(t-1)}$  寻优得到畸变参数  $\mathbf{k}_{S_{Opt}(t)}$ 。

### 4.2.2 成像特征点优化估计

完成第  $t$  次非线性优化的畸变校正后(当  $t=0$  时不做畸变校正,  $\mathbf{k}_{S_{Opt}(0)} = \mathbf{k}_{S(0)} = 0$ ),对第  $i$  个矩形的第  $j$  条( $1 \leq j \leq 4$ ) 边的第  $\kappa$  段( $1 \leq \kappa \leq N$ ) 成像也进行拟合得直线： $\bar{l}_{R_i L_j \kappa(t)}$  [(53)式]。则,(22)式中顶点  $A_{ui} B_{ui} C_{ui} D_{ui}$  可采用优化估计值[(54)式]。

$$\begin{aligned} \bar{l}_{R_i L_j \kappa(t)} &= [\bar{a}_{R_i L_j \kappa(t)} \quad \bar{b}_{R_i L_j \kappa(t)} \quad \bar{c}_{R_i L_j \kappa(t)}]^T \\ &= \begin{cases} \bar{a}_{R_i L_j \kappa(t)} x + \bar{b}_{R_i L_j \kappa(t)} y + \bar{c}_{R_i L_j \kappa(t)} = 0 \\ \bar{a}_{R_i L_j \kappa(t)}^2 + \bar{b}_{R_i L_j \kappa(t)}^2 = 1 \end{cases}, \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{P}_{R_i L_{j_1} L_{j_2}(t)} = \bar{l}_{R_i L_{j_1} N(t)} \times \bar{l}_{R_i L_{j_2} 1(t)} \\ j_2 = j_1 + 1 \text{ or } j_1 = j_2 + 3 \\ \begin{cases} A_{ui(t)} \triangleq \bar{P}_{R_i L_1 L_1(t)}, & B_{ui(t)} \triangleq \bar{P}_{R_i L_1 L_2(t)} \\ C_{ui(t)} \triangleq \bar{P}_{R_i L_2 L_3(t)}, & D_{ui(t)} \triangleq \bar{P}_{R_i L_3 L_4(t)} \end{cases} \end{cases}. \quad (54)$$

从而完成线性内参数自标定(4.1节)得到第  $t$  次迭代的标定结果  $\mathbf{c}_{O(t)}$ 、 $\mathbf{f}_{c(t)}$ 。当满足(55)式时停止迭代( $\xi, \Delta_{\text{Pst}} > 0$  为待设参数), 得标定结果。

$$\frac{(\|\mathbf{c}_{O(t-1)} - \mathbf{c}_{O(t)}\| + \|\mathbf{f}_{c(t-1)} - \mathbf{f}_{c(t)}\|)}{\|\mathbf{c}_{O(t)}\| + \|\mathbf{f}_{c(t)}\|} + \frac{\|\mathbf{k}_{S_{\text{Opt}}(t-1)} - \mathbf{k}_{S_{\text{Opt}}(t)}\|}{\|\mathbf{k}_{S_{\text{Opt}}(t)}\| + \Delta_{\text{Pst}}} < \xi, \quad (55)$$

对于 4.2.1 节和 4.2.2 节中的算法均取  $N=4$ 。

文献[10]中的畸变校正算法仅利用光心和正交消隐点的连线在几何上的正交关系, 需要不少于 5 幅成像, 并利用 NM 非线性优化方法实现畸变参数求解。但其难以同步实现对自标定参考特征点的优化估计, 增大了标定误差。同时, 文献[10]提供的畸变标定仿真结果也体现了其求解不稳定的问题。

### 4.3 摄像机外参数与矩形长宽比的求解

如图 6, 按矩形  $ABCD$  设定坐标系  $O_r, x_r, y_r, z_r$ 。延  $x_r, y_r$  坐标轴正负方向的消隐点分别记为  $X_u, Y_u$  和  $X_{u-}, Y_{u-}$  (实际中仅出现其一)。

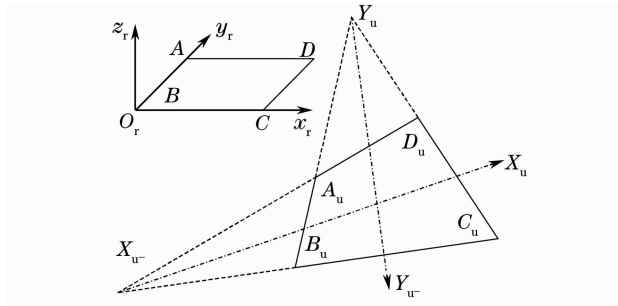


图 6 摄像机外参数求解模型

Fig. 6 Model of resolving external parameters

这四个点分别对应  $O_r, x_r, y_r, z_r$  下的齐次坐标:

$$X_u \rightarrow [1, 0, 0, 0], \quad Y_u \rightarrow [0, 1, 0, 0]$$

$$X_{u-} \rightarrow [-1, 0, 0, 0], \quad Y_{u-} \rightarrow [0, -1, 0, 0], \quad (56)$$

在由(5)式描述的无穷单应关系, 可得:

$$s_i \mathbf{p}_{ui} = \mathbf{H}_\infty \mathbf{p}_{wi} = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{p}_{wi}, \quad (57)$$

在求得摄像机内参数  $\mathbf{A}$  后可得:

$$s_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_{ui} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] \mathbf{p}_{wi}, \quad (58)$$

由消隐点位置关系选择(56)式中坐标点, 可得:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (-)s_1 \mathbf{A}^{-1} X_{u(-)} \mathbf{a} \\ \mathbf{r}_2 = (-)s_2 \mathbf{A}^{-1} Y_{u(-)} \mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \mathbf{c}, \quad (59)$$

(58)、(59)式均满足:  $\|\mathbf{r}_1\|_2 = \|\mathbf{r}_2\|_2 = 1$ 。

因受噪声影响, 需要对  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  进行调整:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{R}_{1\sim 2}^* - \mathbf{R}_{1\sim 2}\|_F^2, \mathbf{R}_{1\sim 2} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \\ \text{st. } (\mathbf{R}_{1\sim 2}^*)^T \mathbf{R}_{1\sim 2}^* = \mathbf{I}_2 \end{cases}, \quad (60)$$

根据文献[16]、[22], 通过奇异值分解求  $\mathbf{R}_{1\sim 2}^*$ 。

$$\mathbf{R}_{1\sim 2} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \Rightarrow \mathbf{R}_{1\sim 2}^* = \mathbf{U} \mathbf{V}^T, \quad (61)$$

再通过(59)式-c求取完整的  $\mathbf{R}^*$ 。然后, 根据  $\mathbf{R}^*$  和空间中两个点的坐标即可求得  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} s \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_u &= [\mathbf{R}^*, \mathbf{T}] [\mathbf{p}_{\text{nhl}}^T, 1]^T \\ \Rightarrow \mathbf{T} &= s \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_{ui} - \mathbf{R}^* \mathbf{p}_{\text{nhl}} = s \mathbf{p}_{ci} - \mathbf{R}^* \mathbf{p}_{\text{nhl}}, \end{aligned} \quad (62)$$

(62)式中, 取  $\mathbf{p}_{\text{nhl}}^T$  为  $O_r$  时:

$$\mathbf{T} = s [u_B/f_x, \lambda v_B/f_x, 1]^T, \quad (63)$$

通过另一点坐标, 可由(1)、(2)式解出  $s$ , 进而解出  $\mathbf{T}$ , 也可以采用下述线性方程优化求解:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{ui} [\mathbf{T}^T, s_1, \dots, s_m]^T = \mathbf{R}^* \mathbf{p}_{\text{nhl}} \\ \mathbf{H}_{ui} = [\mathbf{I}_3, \mathbf{O}_{3 \times (i-1)}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_{ui}] \end{cases}, \quad (64)$$

则利用矩形平面内  $m_p$  个独立点 ( $m_p \geq 2$ ) 的空间坐标和图像坐标可得(取  $A, B$  两点):

$$\begin{cases} [\mathbf{T}^T, s_1, \dots, s_{m_p}]^T = (\mathbf{H}_u^T \mathbf{H}_u)^{-1} \mathbf{H}_u^T \mathbf{Y}_r \\ \mathbf{H}_u = [\mathbf{H}_{u1}^T, \mathbf{H}_{u2}^T, \dots, \mathbf{H}_{um_p}^T]^T \\ \mathbf{Y}_r = [\mathbf{R}^* \mathbf{p}_{\text{nhl}1}, \dots, \mathbf{R}^* \mathbf{p}_{\text{nhl}m_p}]^T \end{cases}, \quad (65)$$

根据(40)、(49)式得  $C_{2a}$ , 可计算矩形长宽比:

$$\mu_{\text{Rect}} = (1 - C_{2a}) / \sqrt{1 - C_{2a}^2}. \quad (66)$$

## 5 仿真实验与分析

### 5.1 无噪声情况下的算法收敛性仿真验证

如 4.2.1 节所述, 所提算法在解决畸变标定时采用迭代方法, 这里验证无噪声时的收敛性。

#### 5.1.1 已知成像单元特性 $\lambda=1$ 时的收敛性验证

设定相机传感器尺寸为  $800 \text{ pixel} \times 600 \text{ pixel}$ , 光心为  $(u_0, v_0)$ , 焦距为  $f_{x,y} = f_x = f_y$ , 以及矩形顶点坐标值和摄像机平移  $\mathbf{T}_i$ , 和摄像机依次绕  $(z, y, x)$  旋转角度  $(\varphi_j, \psi_j, \alpha_j)$ :

$$\begin{cases} A(-4, 3, 0), B(-4, -3, 0), C(4, -3, 0), D(4, 3, 0) \\ \mathbf{c}_0 = [450 \quad 320]^T, \mathbf{f}_0 = [600 \quad 600]^T, \mathbf{k}_s = [0.25 \quad 0.04]^T \\ \varphi_1 = 105^\circ, \psi_1 = 35^\circ, \alpha_1 = -45^\circ, \mathbf{T}_1 = (0, 0.25, 10) \\ \varphi_2 = 65^\circ, \psi_2 = -35^\circ, \alpha_2 = 40^\circ, \mathbf{T}_2 = (0, -1, 9) \end{cases}$$



记：

$$\Phi_i \triangleq [\varphi_i, \psi_i, \alpha_i], \quad \mathbf{T}_i \triangleq [x_i, y_i, z_i], \quad (i = 1, 2). \quad (67)$$

两次成像如图 7 所示(每边取 501 个采样点经畸变成像得到)。

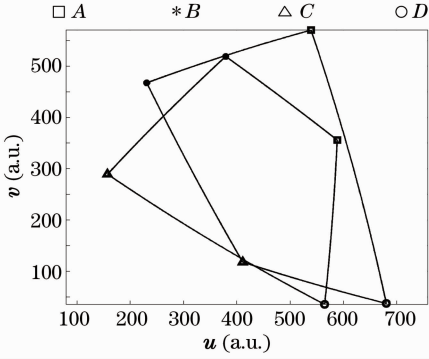


图 7 对矩形两次成像的图形

Fig. 7 Twice imaging for a rectangle

由 4.2.1 中方法经 15 次迭代,得标定结果：

$$\begin{cases} u_{0(15)} = 450.000827 \\ v_{0(15)} = 319.999124 \\ f_{x,y(15)} = 600.000128 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_{1(15)} = 0.249998322 \\ k_{2(15)} = 0.040006469 \end{cases}, \quad (68)$$

定义完成第  $t$  次迭代后的标定偏差：

$$\begin{cases} \Delta_m c_{O(t)} = \| \mathbf{c}_{O(t)} - \mathbf{c}_O \|, \Delta_m f_{c(t)} = \| \mathbf{f}_{c(t)} - \mathbf{f}_O \| \\ \Delta_m k_{S(t)} = \| \mathbf{k}_{S(t)} - \mathbf{k}_S \|, \mathbf{c}_O, \mathbf{f}_O, \mathbf{k}_S \text{ are real values} \end{cases}, \quad (69)$$

前 15 次迭代结果按(69)式计算偏差后,得图 8,从而可知该迭代算法按指数收敛。

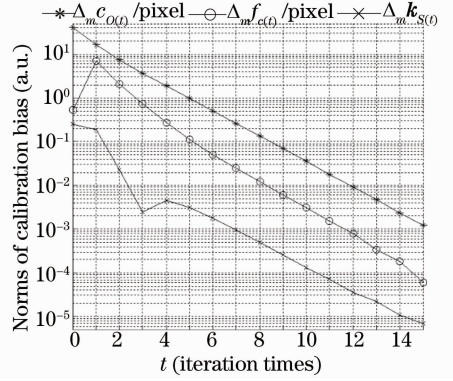


图 8 对矩形两次成像的标定仿真的收敛过程

Fig. 8 Convergence progress of calibration simulation for twice imaging for a rectangle

### 5.1.2 成像单元特性 $\lambda$ 未知时的收敛性验证

保留 5.1.1 中的矩形坐标,将摄像机参数设定

为

$$\begin{cases} \mathbf{c}_O = [435 \quad 310]^T, \mathbf{f}_O = [600 \quad 500]^T, \mathbf{k}_S = [0.2 \quad 0.04] \\ \varphi_1 = 100^\circ, \psi_1 = 40^\circ, \alpha_1 = 35^\circ, \mathbf{T}_1 = (0, -0.5, 9) \\ \varphi_2 = -65^\circ, \psi_2 = 40^\circ, \alpha_2 = -30^\circ, \mathbf{T}_2 = (0, 0, 9.5) \\ \varphi_3 = -160^\circ, \psi_3 = -45^\circ, \alpha_3 = 25^\circ, \mathbf{T}_3 = (-1.25, -0.5, 8.5) \\ \Phi_i \triangleq [\varphi_i, \psi_i, \alpha_i], \mathbf{T}_i \triangleq [x_i, y_i, z_i], (i = 1, 2, 3) \end{cases}, \quad (70)$$

可得到相关成像(图 9)。

由 4.2.1 中方法经 15 次迭代,得标定结果：

$$\begin{cases} u_{0(15)} = 435.000018, \quad v_{0(15)} = 309.999829 \\ f_{x(15)} = 600.000029, \quad f_{y(15)} = 499.999988, \\ k_{1(15)} = 0.19999889, \quad k_{2(15)} = 0.040002528 \end{cases}, \quad (71)$$

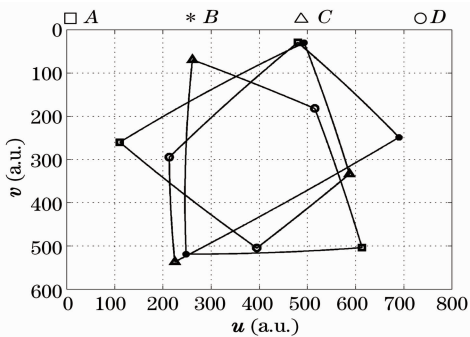


图 9 对矩形三次成像的图形

Fig. 9 Triple imaging for a rectangle

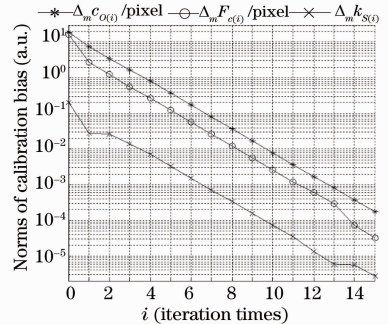


图 10 对矩形三次成像的标定仿真的收敛过程

Fig. 10 Convergence progress of calibration simulation for triple imaging for a rectangle

前 15 次迭代结果 ( $t \leq 15$ ) 按 (69) 式计算偏差后, 得图 10, 从而可知该迭代算法按指数收敛。

根据  $N_M = 100$  次实验结果, 采用均方偏差  $\bar{v}_M$  度量 (MSD) 参数误差 [(72) 式], 其中  $v_{testi}$  为待标定参数的第  $i$  次实验值,  $v_{real}$  为待标定参数的真实值,  $N_T$  为 MC 实验次数)。

$$\bar{v}_M = \sqrt{\frac{\sum_{k_T=1}^{N_M} (v_{test\ k_T} - v_{real})^2}{N_M}} \quad (72)$$

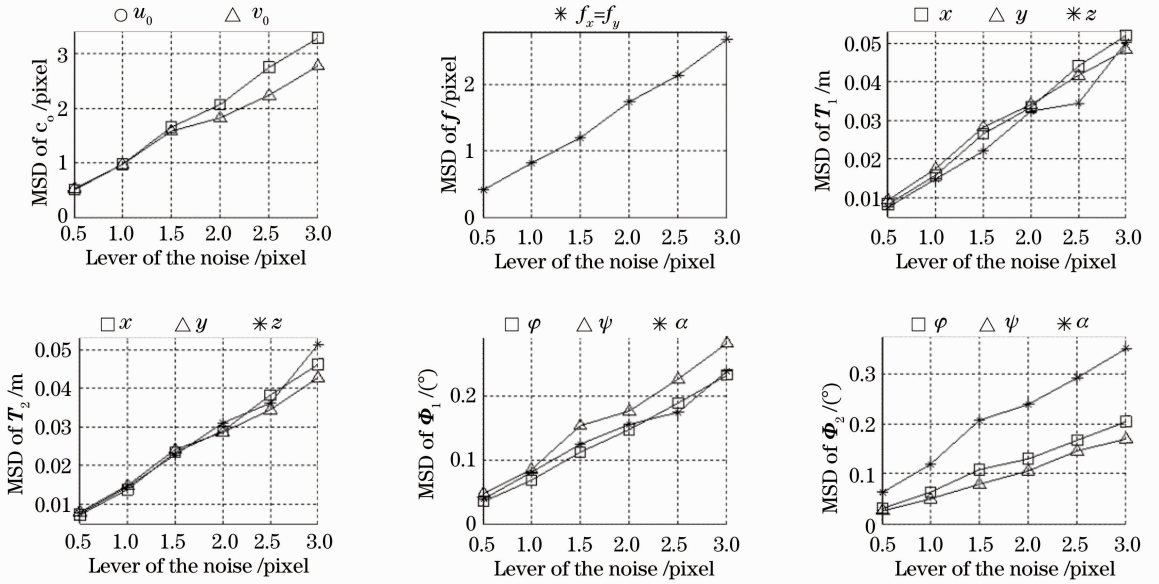


图 11 无畸变情况下, 已知成像单元特性  $\lambda=1$  时的标定仿真结果

Fig. 11 Simulation results of calibration, without distortion, knowing imaging cell character  $\lambda=1$

由于采样点提取中一般采用子像素级的估计方法, 因而噪声水平应不高于  $\pm 0.5$  pixel。这里为说

## 5.2 有噪声情况下的标定精度分析

### 5.2.1 已知成像单元特性 $\lambda=1$ 时的标定精度

#### 1) 不考虑成像畸变的仿真验证

矩形  $ABCD$  和摄像机姿态及线性内参数的设置同 5.1.1 节, 畸变参数设定为  $k_s = [0, 0]$ 。仿真结果见图 11, 其 MSD 结果随噪声水平线性增长, 并且即使当噪声水平为  $\pm 3$  pixel 时, 也能获得良好的标定精度。

明标定结果对噪声不敏感, 采用  $\pm 3$  pixel。

#### 2) 考虑成像畸变的仿真验证

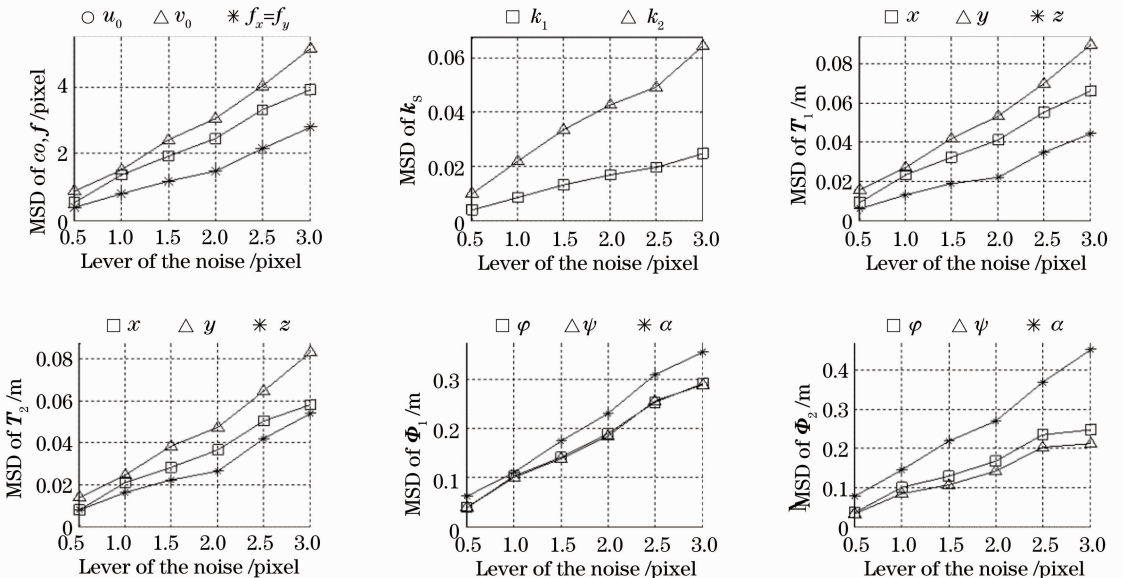


图 12 有畸变情况下, 已知成像单元特性  $\lambda=1$  时的标定仿真结果

Fig. 12 Simulation results of calibration, with distortion, knowing imaging cell character  $\lambda=1$

矩形  $ABCD$  和摄像机姿态及线性内参数的设置同 5.1.1 节,畸变参数设定为  $k_s=[0.25, 0.1]$ 。

仿真结果见图 12,其 MSD 值同样随噪声水平线性增长,并当噪声水平为  $\pm 3$  pixel 时,也能获得良好的标定精度。由于二阶畸变受噪声影响明显,因而其 MSD 值较大。但对比图 11 和图 12 可见考虑畸变时,其余参数的标定偏差并未显著增加。

当  $\lambda$  未知时的仿真同样表明,对标定结果的仿真误差(MSD)同样符合随噪声水平的提升而线性增长的特点,且 MSD 的数值与图 12 中的近似。由于考虑篇幅限制且 6.2 节中对  $\lambda$  未知时的情况进行

了实物实验,并与张正友平面标定方法<sup>[16]</sup>进行了详细对比,因而这里不再详述当  $\lambda$  未知时的仿真结果。

### 5.2.2 噪声对矩形长宽比估计的影响

所提算法的特点除体现在减少成像次数(降低求解条件)外,能在标定相内外参数的同时确定参照物的形状信息[矩形长宽比  $\mu_{\text{Rect}}$ , (66)式]。

$\mu_{\text{Rect}}$  的准确值为 0.75,由图 13 可见在噪声水平  $\pm 3$  pixel 内辨识偏差随噪声线性增长,且当电荷耦合器件(CCD)特征未知时采用三次成像得到的结果精度更高,所提畸变校正算法使辨识精度不受畸变影响。

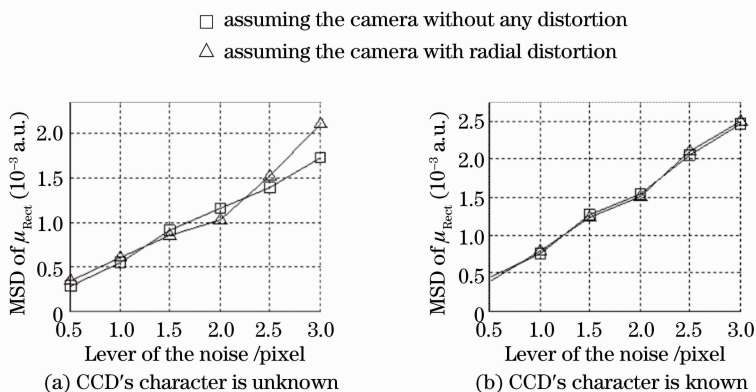


图 13 对矩形长宽比辨识的仿真结果

Fig. 13 Simulation results of identifying the rectangle's wide-length rate

### 5.2.3 噪声对畸变标定迭代次数的影响

在 5.1 中分析了考虑畸变校正情况下通过迭代方法求解畸变时的标定算法收敛性。

在 5.2.1 和对  $\lambda$  未知时标定算法的仿真中,为控制迭代次数设置了迭代截止参数[对应(55)式中的  $\xi, \Delta_{\text{Pst}}$ ]:  $\xi=1 \times 10^{-3}, \Delta_{\text{Pst}}=1$ 。

在传感器特性  $\lambda$  是否已知情况下所需平均迭代次数如图 14 所示。两种情况下标定所需迭代次数相当,这也表明两种情况下的标定效率相当。没有出现文献[10]中的不稳定现象。

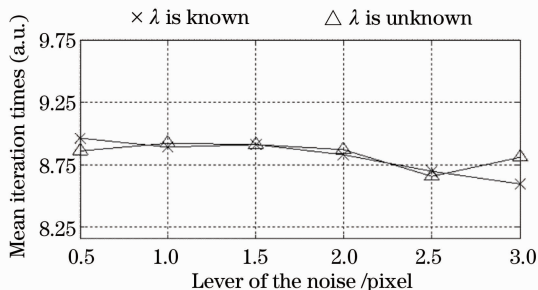


图 14 考虑畸变校正时,自标定算法的平均迭代次数

Fig. 14 Mean iteration times of self-calibration algorithm, within distortion calibration

## 6 实际图像实验与分析

### 6.1 标定实验条件

采用微视公司的 MVC-II-3M-S00 相机(分辨率设定为  $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ )和 Computar 公司的 T2Z3514CS-2 镜头(焦距:  $3.5 \sim 8.0 \text{ mm}$ )。对液晶屏上靶标进行实验(锁定焦距、光圈和对焦)。本实验所涉及的靶标如图 15 所示。

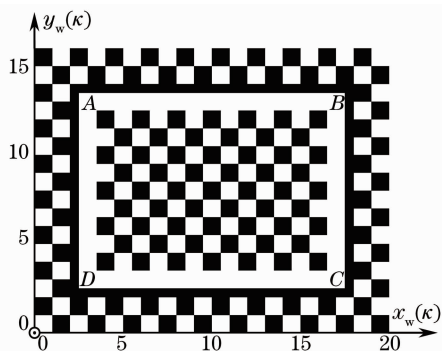


图 15 实际图像实验的靶标

Fig. 15 Marker picture for the real image test

图 15 中标注了本实验的目标矩形( $ABCD$  内边缘矩形)。规定了世界坐标系( $x_w y_w z_w$ ),并在尺

度因子( $\kappa$ )的意义下规定了坐标值:

$$\begin{cases} A(2.5, 13.5), B(17.5, 13.5) \\ C(17.5, 2.5), D(2.5, 2.5) \end{cases} \quad (73)$$

图 15 中的棋盘格用于进行重投影验证,所采用的特征点集  $\Psi_{\text{vid}}[(x_w, y_w, z_w)]$  中为

$$\Psi_{\text{vid}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} i\kappa \\ j\kappa \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{i = 1, 2, \dots, 19\} \otimes \{j = 1, 15\} \\ \{i = 1, 19\} \otimes \{j = 2, 3, \dots, 14\} \\ \{i = 3.5, 4.5, \dots, 16.5\} \otimes \\ \{j = 3.5, 4.5, \dots, 12.5\} \end{array} \right\} \end{cases} \quad (74)$$

## 6.2 假设未知成像单元特性时的标定实验

为验证 CCD 特性  $\lambda$  未知时的情况(由于  $\lambda$  已知时,算法更为简单,为节省篇幅本文仅针对  $\lambda$  未知的情形完成验证),如图 16,完成三次成像,并提取 ABCD 上的特征点<sup>[23]</sup>。用所提算法(4.1.2,4.2,4.3节)经 15 次迭代(3.76 s)即可完成标定。对(74)式中的点进行重投影可得图 17。内外参数的标定结果见表 1。

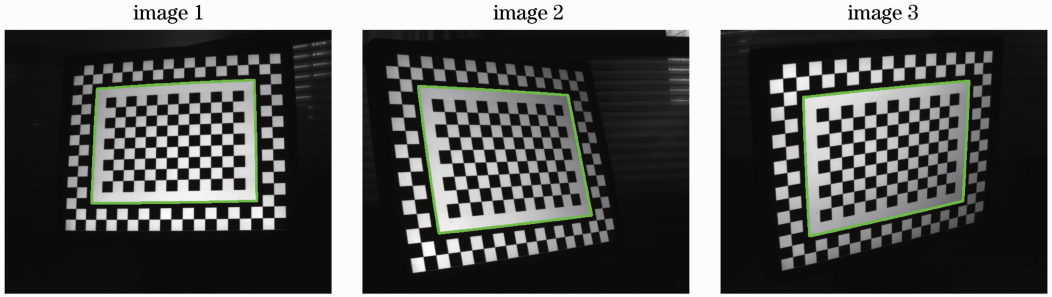


图 16 特征目标成像及矩形边缘提取

Fig. 16 Imaging of characteristic target and extracting of the rectangle's edges

表 1 摄像机参数标定与重投影结果

Table 1 Calibration of camera parameters and re-projection

Sn.	Pr.	Proposed method	Zhang's method in Ref. [16]
Intrinsic	$c_u$	$[708.2468 \quad 532.1922]^T$	$[664.9373 \quad 441.5316]^T$
	$f_u$	$[2129.388 \quad 2127.954]^T$	$[2112.649 \quad 2110.659]^T$
	$k$	$[0.377445 \quad 0.161412]^T$	$[0.256382 \quad 1.386033]^T$
Image 1	$R$	$\begin{bmatrix} 0.9834 & 0.0097 & -0.1812 \\ -0.0267 & -0.9799 & -0.1979 \\ -0.1794 & 0.1994 & -0.9633 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9800 & 0.0136 & -0.1984 \\ -0.0345 & -0.9709 & -0.2371 \\ -0.1958 & 0.2392 & -0.9510 \end{bmatrix}$
	$T$	$[-11.045 \quad 5.8404 \quad 49.263]^T$	$[-10.031 \quad 7.9584 \quad 48.831]^T$
	$e_{rp}$	115.4768014	130.69604741
Image 2	$R$	$\begin{bmatrix} 0.7718 & -0.1803 & 0.6098 \\ -0.0310 & -0.9685 & -0.2472 \\ 0.6352 & 0.1719 & -0.7530 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.7842 & -0.1764 & 0.5949 \\ -0.0056 & -0.9607 & -0.2774 \\ 0.6205 & 0.2142 & -0.7544 \end{bmatrix}$
	$T$	$[-8.8011 \quad 7.1648 \quad 35.645]^T$	$[-8.0649 \quad 8.7137 \quad 35.225]^T$
	$e_{rp}$	87.45466715	111.11590722
Image 3	$R$	$\begin{bmatrix} 0.8568 & 0.0149 & 0.5154 \\ -0.1548 & -0.9461 & 0.2846 \\ 0.4918 & -0.3236 & -0.8083 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8675 & 0.0079 & 0.4974 \\ -0.1342 & -0.9591 & 0.2493 \\ 0.4791 & -0.2830 & -0.8309 \end{bmatrix}$
	$T$	$[-9.3554 \quad 8.1850 \quad 41.632]^T$	$[-8.5010 \quad 9.9706 \quad 41.191]^T$
	$e_{rp}$	64.39525750	117.90131310

表 1 中的重投影指标为

$$e_{rp}([\mathbf{c}_u, \mathbf{f}_u, \mathbf{k}], [R_i, T_i], \Psi_{\text{vid}}) = \sum_{p_w \in \Psi_{\text{vid}}} \| F_{\text{Image}i}([\mathbf{c}_u, \mathbf{f}_u, \mathbf{k}], [R_i, T_i], p_w) - F_{\text{Dci}}(p_w) \|_2, \quad (75)$$

式中  $i$  对应图 16 中的 image  $i$ ,  $F_{\text{Dci}}(p_w)$  表示通过 Harris 角点检测方法得到的  $p_w$  的成像点。由于  $\Psi_{\text{vid}}$

中共有 204 个点,所提方法的平均重投影误差均小于 0.6 pixel;求解得  $\lambda = 1.00067$ (厂家提供的参数



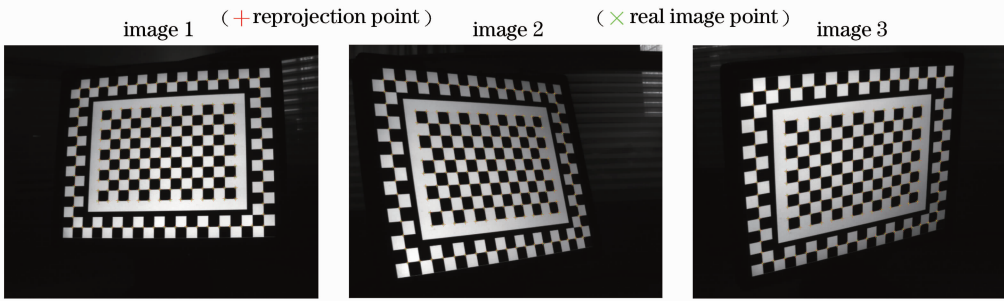


图 17 特征目标成像及特征点重投影验证

Fig. 17 Imaging of characteristic target and validating by reprojections of characteristic points

$\lambda=1$ ),  $\mu_{\text{Rect}}=1.36398$ (图 15 中对应  $\mu_{\text{Rect}}=15/11=1.36364$ ),从而验证算法准确性。

同时,根据  $\Psi_{\text{vld}}$  和  $F_{Dc}(\mathbf{p}_w)$ ,  $\mathbf{p}_w \in \Psi_{\text{vld}}$ ,采用张正友的平面靶标定法<sup>[16]</sup>,所得数据见表 1。

对比可知,所提方法在未利用  $\Psi_{\text{vld}}$  中成像点的情况下所得到的重投影误差[(75)式]仍能小于文献[16]标定后的重投影误差。

另外,如文献[16]所述,平面靶标定法在处理畸变标定时,收敛速度慢,进行 10 次迭代后,按文献[16]优化全参数指标函数:

$$\min_{\mathbf{c}_u, \mathbf{f}_u, \mathbf{k}, R_j, T_j, (j=1,2,3)} \sum_i^3 e_{rp}([\mathbf{c}_u, \mathbf{f}_u, \mathbf{k}], [R_i, T_i], \Psi_{\text{vld}}), \quad (76)$$

利用 NM 非线性优化方法寻优,共耗时 25.45 s 才能得到表 1 中的标定结果,明显多于所提算法所需的 3.76 s。

## 7 结 论

提出的摄像机自标定方法,不但利用了正交消隐点在摄像机成像模型中的几何特性,还充分利用了作为标定参照物的矩形的长宽比在多次成像中固定不变这一隐含特性。因而,该方法仅利用单个矩阵的两次和三次成像信息即可分别完成摄像机的三参数和四参数模型的标定,并得到矩形长宽比信息。同时,在预知矩形两个顶点的空间和图像信息的基础上即可求解摄像机在每次拍摄时的全部外参数(六自由度)。当摄像机存在畸变时,通过所设计的等价平面上的畸变校正模型并利用基于非线性优化的畸变校正参数寻优方法,该算法能在标定畸变校正参数的同时,对矩形顶点进行优化估计,提高了自标定精度。

仿真表明所提算法对摄像机线性内外参数和畸变的标定结果对噪声干扰不敏感,适合于高精度标定。而且,利用所提的迭代畸变校正方法可基本消

除畸变对自标定精度的影响。实际图像实验表明所提算法相对传统平面靶标定法,在减少了预知条件且不增加成像数的情况下,提高了标定精度和效率。

另外,所采用的将立体解算问题转化为相应平面问题的方法,以及利用参照物多次成像但其自身形状不变(或形状相似)等隐含信息的思路,可为研究其他与摄像机自标定相关的视觉测量问题所借鉴。

## 参 考 文 献

- 1 Qiu Maolin, Ma Songde, Li Yi. Overview of camera calibration for computer vision [J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(1): 43-54.
- 2 邱茂林, 马颂德, 李毅. 计算机视觉中定标综述[J]. 自动化学报, 2000, 26(1): 43-54.
- 3 R Y Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses [J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1987, 3(4): 323-344.
- 4 O D Faugeras, Q T Luong, S J Maybank. Camera self-calibration: theory and experiments [C]. Proceeding of the 2nd European Conference on Computer Vision Berlin: Springer, 1992, 588: 321-334.
- 5 S J Maybank, O D Faugeras. A theory of self-calibration of a moving camera [J]. Int J Comput Vision, 1992, 8(2): 123-151.
- 6 A Heyden, D Q Huynh. Auto-calibration via the absolute quadric and scene constraints [C]. Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition, 2002, 2: 631-634.
- 7 Jiang Guangwen, Chao Zhichao, Fu Sihua, et al.. High-accurate camera calibration technique based on controllable rotation [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(5): 1308-1314.  
姜广文, 晁志超, 伏兴华, 等. 基于可控旋转的像机高精度标定技术[J]. 光学学报, 2010, 30(5): 1308-1314.
- 8 Wu Fuchao, Wang Guanghui, Hu Zhanyi. A linear approach for determining intrinsic parameters and pose of cameras from rectangles [J]. Journal of Software, 2003, 14(3): 703-802.  
吴福朝, 王光辉, 胡占义. 由矩形确定摄像机内参数与位置的线性方法[J]. 软件学报, 2003, 14(3): 703-802.
- 9 Zhang Guangjun, Zhou Fuqiang. Position and orientation estimation method for landing of unmanned aerial vehicle with two circle based computer vision [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2005, 26(3): 344-348.  
张广军, 周富强. 基于双圆特征的无人机着陆位置姿态视觉测量方法[J]. 航空学报, 2005, 26(3): 344-348.

- 9 Wang Rui, Li Xin, Zang Guangjun. A linear algorithm for determining intrinsic parameters of zoomed monocular camera in the vision based landing of an UAV [J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2006, 27(4): 666–672.  
王睿, 李欣, 张广军. 单目主动视觉无人机导引中摄像机内参数标定的线性方法[J]. *航空学报*, 2006, 27(4): 666–672.
- 10 Huo Ju, Yang Wei, Yang Ming. A self-calibration technique based on the geometry property of the vanish point [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(2): 465–472.  
霍炬, 杨卫, 杨明. 基于消失点几何特性的摄像机自标定方法[J]. *光学学报*, 2010, 30(2): 465–472.
- 11 J Sun, H B Gu, X L Qin, *et al.*. A new camera calibration based on vanishing point [C]. *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2008, 2371–2376.
- 12 Guo Yang, Zhang Xiangde, Xu Xinhe. An analytic solution for the noncoplanar P4P problem with an uncalibrated camera [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2011, 34(4): 748–754.  
郭阳, 张祥德, 徐心和. 未标定摄像机非共面 P4P 问题的一种解析解[J]. *计算机学报*, 2011, 34(4): 748–754.
- 13 L Wua, X C Cao, Hassan Foroosh. Camera calibration and geolocation estimation from two shadow trajectories [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2010, 114(8): 915–927.
- 14 Wu Fuchao. *Mathematical Methods in Computer Vision* [M]. Beijing: Science Press, 2008. 79–91.  
吴福朝. *计算机视觉中的数学方法* [M]. 北京: 科学出版社, 2008. 79–91.
- 15 Zhu Haijiang, Wu Fuzhao, Hu Zhanyi. Camera calibration based on two parallel line segments [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(6): 853–864.  
祝海江, 吴福朝, 胡占义. 基于两条平行线段的摄像机标定[J]. *自动化学报*, 2005, 31(6): 853–864.
- 16 Z Zhang. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations [C]. *International Conference on Computer Vision (ICCV'99)*, 1999, 1: 666–673.
- 17 Xu Song, Sun Xiuxia, Liu Shuguang, *et al.*. Model reference approaching method of camera distortion calibration [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(7): 0715001.  
徐嵩, 孙秀霞, 刘树光, 等. 摄像机畸变标定的模型参考逼近方法[J]. *光学学报*, 2013, 33(7): 0715001.
- 18 J C Lagarias, J A Reeds, M H Wright, *et al.*. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 1998, 9(1): 112–147.
- 19 M Sonka, V Hlavac, R Boyle. *Image Processing, Analysis, and Machine Vision* [M]. Canada: Thomson Learning Press, 2008. 561–565.
- 20 Shen Wenxuan. The perfect properties of a complete quadrilateral [J]. *Chinese Journal of Secondary Mathematical*, 2006, (8): 17–22.  
沈文选. 完全四边形的优美性质[J]. *中等数学*, 2006, (8): 17–22.
- 21 R Hartley. *Multiple View Geometry in Computer Vision* [M]. London: Cambridge University Press, 2003. 153–177, 213–219.
- 22 G H Golub, C F Van Loan. *Matrix Computations* [M]. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1996. 69–74.
- 23 Sheng Zunbing, Cui Xianyu, Gao Guoan. A universal algorithm for subpixel edge detection [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2007, 41(6): 911–915.  
盛遵冰, 崔贤玉, 高国安. 通用亚像素边缘检测算法[J]. *上海交通大学学报*, 2007, 41(6): 911–915.

栏目编辑: 张浩佳