

# 基于相位调制的单次曝光压缩感知成像

吴建荣 沈 夏 喻 虹 陈 喆 刘震涛 谭诗语 韩申生

(中国科学院上海光学精密机械研究所量子光学重点实验室, 上海 201800)

**摘要** 随着对成像分辨率的要求日益提高, 成像所需采集的数据量不断增大, 亟需发展一种具有更高图像信息获取效率的压缩成像方式。压缩感知信息理论的兴起使压缩成像研究得到了快速的发展。提出了一种基于空间随机相位调制的单次曝光压缩感知成像方案, 通过压缩成像实验验证了该成像方案在原理上的可行性。理论分析并实验验证了系统的空间分辨能力、信噪比随系统参数变化的相互制约关系。

**关键词** 成像系统; 压缩感知; 空间相位调制; 信噪比; 空间分辨能力

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.1011005

## Snapshot Compressive Imaging by Phase Modulation

Wu Jianrong Shen Xia Yu Hong Chen Zhe Liu Zhentao Tan Shiyu Han Shensheng

(Key Laboratory for Quantum Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,

Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)

**Abstract** With the increasing need for higher image resolution and amount of data for imaging, it is imperative to develop novel compressive imaging technology with higher information acquiring efficiency. The rise of compressive sensing theory paves the way for compressive imaging. A snapshot compressive imaging strategy by spatial phase modulation is proposed. The feasibility for the imaging strategy is testified by compressive imaging experiment. The spatial resolution and signal noise ratio are analyzed by theory and testified by the experiments, the restrictive relation between them is released.

**Key words** imaging system; compressive sensing; spatial phase modulation; signal noise ratio; spatial resolution

**OCIS codes** 110.1758; 030.6600; 050.1220

## 1 引 言

压缩感知 (CS) 是一种新的信息获取理论<sup>[1]</sup>。它利用信号的稀疏先验信息, 通过对信号进行整体随机采样, 由稀疏重构算法准确恢复或以很大概率恢复原始信号。它所需的信号采样数目远少于奈奎斯特采样定律所规定的信号采样数目。自 CS 采样理论提出以来, 它已经在成像领域取得了大量应用。这些应用覆盖了医学上的计算机层析扫描 (CT) 成像<sup>[2-3]</sup> 和核磁共振成像 (MRI)<sup>[4]</sup>、雷达成像<sup>[5-6]</sup>、可见及红外波段成像等<sup>[7-11]</sup>, 取得了一些在传统信息获取方式下难以达到的性能。

其中, 在可见及红外波段被动式压缩感知成像

方面, 2008 年, 美国 Rice 大学的 Duarte 等<sup>[12]</sup> 利用数字微镜器件 (DMD) 这一可对图像实现空间随机幅度调制的器件, 实验演示了“压缩感知单像素相机”成像。随后, 陆明海等<sup>[13]</sup> 将该方案与光谱分光结合, 提出了基于 DMD 的压缩感知光谱成像方案。“单像素相机”压缩感知成像方案需要多次测量, 对运动目标成像时, 由于总曝光时间有限, 多次测量使单次曝光时间缩短, 并且幅度调制导致损失一半光能量, 从而导致信噪比降低。Duke 大学 Kittle 等<sup>[14]</sup> 将压缩感知与光谱成像结合, 实现了基于幅度掩模板的准单次曝光压缩光谱成像。该方案的单次曝光成像质量较低, 必须通过少数次曝光来实现高

收稿日期: 2014-03-26; 收到修改稿日期: 2014-06-15

基金项目: 国家 863 计划 (2011AA120100)

作者简介: 吴建荣 (1981—), 男, 博士, 主要从事压缩感知成像方面的研究。E-mail: jrwu@siom.ac.cn

导师简介: 韩申生 (1960—), 男, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要从事量子成像及强耦合等离子体方面的研究。

E-mail: sshan@mail.shnc.ac.cn

分辨率成像;并且同样采用幅度调制,导致损失一半光能,从而导致信噪比下降。2007年, stern等<sup>[15]</sup>提出了基于相位调制的准单色热光单次曝光压缩成像方案,但只给出了模拟结果。2011年,张成等<sup>[16]</sup>在 stern小组方案的基础上,将系统的测量矩阵由随机矩阵改为循环托普利兹块相位掩膜矩阵进行数值模拟。Fergus等<sup>[17]</sup>采用反射式随机表面作为空间随机相位调制器,进行了初步的单次曝光压缩感知成像实验。上述关于相位调制型单次曝光压缩感知成像方面的研究,都没有对成像系统的空间分辨能力及原始信号的信噪比进行分析,对于空间分辨能力与信噪比的相互制约关系尚不明确。

提出了一种准单色热光相位调制单次曝光压缩感知成像方案,通过原理实验验证该方案进行单次曝光压缩成像的可行性。理论分析和实验验证了系统的空间分辨能力及原始信号的信噪比随系统参数的变化规律,对信噪比与空间分辨能力的关系进行了讨论。

## 2 压缩感知基本原理

信息获取系统,如成像系统,对信号  $f \in \mathbf{R}^n$  的采样可以用矩阵表示成

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} + \mathbf{N}, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  为采样信号矢量,  $\Phi \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为测量矩阵,  $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^m$  为噪声矢量。当  $m < n$  时,对信号进行欠采样,(1)式是一个欠定方程组,不加入约束条件时,方程组的解不唯一,因而无法确定原始信号  $f$ 。

压缩感知采样理论基于信号的稀疏表达和非相干测量,在欠采样情况下通过求解最稀疏的解从而实现原始信号的恢复。信号的稀疏表达是指选用合适的表达基矩阵  $\Psi$  使

$$\mathbf{y} = \Psi \mathbf{x}, \quad (2)$$

而展开系数矢量  $\mathbf{x}$  仅有  $s$  ( $s \ll n$ ) 项为非零元素,其余项都为零(这时称矢量  $\mathbf{x}$  为  $s$  稀疏的);或者  $\mathbf{x}$  仅有  $s$  ( $s \ll n$ ) 项元素取值较大,其余项元素远小于这  $s$  项元素(这时称矢量  $\mathbf{x}$  为可压缩的)。随机矩阵是指矩阵的元素值在统计上满足一定分布(如高斯分布)的矩阵。它几乎与所有的固定表达基矩阵是非相干的。将它作为测量矩阵  $\Phi$ ,可以获得较高的信息获取效率。令  $\mathbf{A} = \Phi \Psi$ ,则(1)式变为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{N}, \quad (3)$$

假定噪声上界为  $\epsilon$ ,当

$$M \geq C \cdot \text{slog}(n/s), \quad (4)$$

时(其中  $C$  为常数),通过求解凸优化问题

$$\min \|\mathbf{x}\|_{l_1}, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{Y}_{l_2} \leq \epsilon, \quad (5)$$

可以得到(3)式的稀疏解  $\mathbf{x}^*$ 。定义矩阵  $\mathbf{A}$  的等距常数  $\delta_s$  为:使所有  $s$  稀疏矢量都满足不等式

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_{l_2}^2 \leq \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_{l_2}^2, \quad (6)$$

的最小的数。假定  $\delta_{2s} \leq \sqrt{2} - 1$ ,则(5)式的解  $\mathbf{x}^*$  的误差为<sup>[1]</sup>

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_{l_2} \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{l_1} / \sqrt{s} + C_1 \cdot \epsilon, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{x}_s$  是保留  $\mathbf{x}$  中取值最大的  $s$  个元素并将其余元素置零得到的矢量,  $C_0$  和  $C_1$  为常数。

(5)式所示的凸优化问题的解是(3)式的所有解中最稀疏的解。比较常用的稀疏重构算法有梯度投影算法(GPSR)<sup>[18]</sup>、正交匹配追踪算法(OMP)<sup>[19]</sup>等。

综上所述,不同于传统的“逐点准确”测量模式,压缩感知采用“整体随机”的测量模式对信号进行探测,在合适的信号稀疏表达域中,通过稀疏重构算法,用远小于信号元素数目的采样信号以一定精度恢复出原始信号。它在信号采集阶段实现了数据压缩。

## 3 准单色热光相位调制压缩感知成像原理

如图1所示,准单色热光相位调制压缩感知成像系统可以分为三个模块,分别是:前置成像模块、调制、探测模块和解调、重构模块。前置成像模块中,窄带滤波片2对目标物体1发出的宽带热光进行窄带滤波,前置成像透镜3将目标物体1按点到点方式成像于前置成像面4上。成像面4上每一点发出的光场经过自由传输后,由调制、探测模块中的空间随机相位调制器5对它进行空间随机相位调制,最终在5之后的探测面6上形成散斑场。由于面4上各点光源可近似为空间不相干,这些点光源形成的散斑场在探测面上按强度叠加。多个光电探测单元在探测面上随机排布形成阵列,对光子数分布进行随机采样探测。数据采集完之后,通过稀疏重构算法由探测到的原始信号恢复出目标物体的图像。

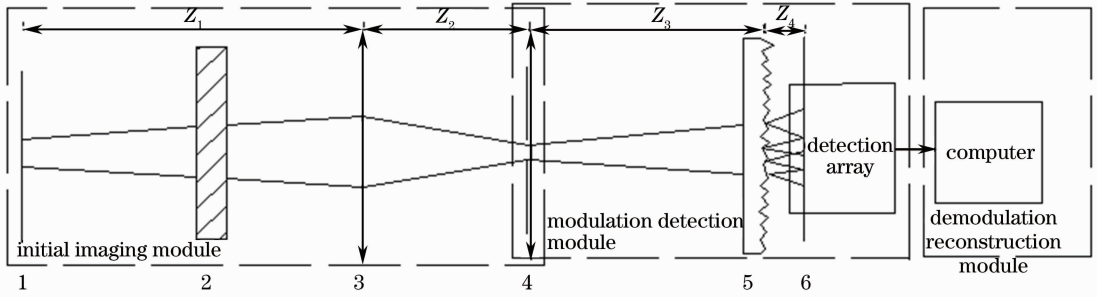


图1 系统原理图(1. 目标; 2. 窄带滤波片; 3. 前置成像透镜; 4. 前置成像面; 5. 空间随机相位调制器; 6. 探测面)

Fig.1 Schematic diagram (1. object plane; 2. narrow banded filter; 3. initial imaging lens; 4. initial image plane; 5. spatially random phase modulator; 6. detection plane)

如图2所示,将前置成像面的视场区域划分成 $N$ 个小面元。按照小面元位置先横向后纵向的次序,将 $N$ 个光子数值排成一个列矢量,作为图像矢量 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N)^T$ 。如图3所示,将探测面的视场区域划分成多个小面元,随机选择 $M$ 个小面元,每个小面元各放置一个光电探测器探测该点的光子数,按照位置先横向后纵向的次序,将 $M$ 个光子数值排列成一个列矢量,作为原始探测信号矢量 $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M)^T$ 。从前置成像面上第 $m$ 个面元出射的单位强度的窄带热光,经过一段距离传输后,在空间随机相位调制器表面变为具有一定空间相干长度的窄带部分相干光,该窄带部分相干光最终在探测面上形成散斑场。此时,探测面上的 $M$ 个探测面元所记录的 $M$ 个光子数值构成测量矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 $m$ 列元素 $\mathbf{A}_m = (A_{1m} \ A_{2m} \ \dots \ A_{Mm})^T, (m = 1, \dots, N)$ 。

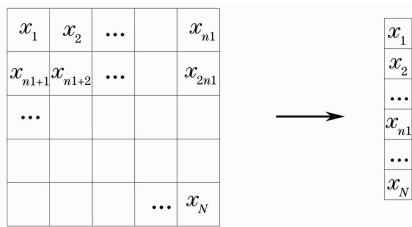

 图2 图像矢量 $\mathbf{x}$ 的产生

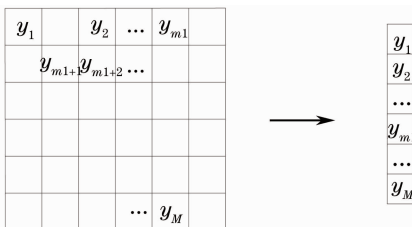
 Fig.2 Generation for the image vector  $\mathbf{x}$ 

 图3 原始信号矢量 $\mathbf{y}$ 的产生

 Fig.3 generation for the initial signal vector  $\mathbf{y}$ 

于是,调制、探测模块的输入、输出关系就可以用矩阵描述如下:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \vdots & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \vdots & A_{MN} \end{pmatrix}_{M \times N} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}_N, \quad (8)$$

由于测量矩阵的每一列元素对应的是散斑场光子数分布,散斑场光子数值满足随机分布,所以测量矩阵是随机矩阵,该系统的信息获取方式满足压缩感知理论。测量矩阵 $\mathbf{A}$ 可以预先通过标定测量获得,原始信号矢量 $\mathbf{y}$ 在成像时测量得到。由 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{y}$ ,通过CS稀疏重构算法就得到 $\mathbf{x}$ ,按照与图2所示相反的次序,将一维矢量 $\mathbf{x}$ 排列成二维矩阵,即得到前置成像面上的物体图像。由于物面物体和前置成像面上的物体图像是点对点成像关系,得到了 $\mathbf{x}$ ,即得到了物体图像。

## 4 准单色热光相位调制压缩感知成像实验

实验光路如图4所示。省去了图1所示的前置成像模块,物体直接位于前置成像面1上。选用普通商品毛玻璃作为空间随机相位调制器。光电探测阵列为电荷耦合器件(CCD),其单个像素大小为 $4.65 \mu\text{m} \times 4.65 \mu\text{m}$ 。前置成像面到空间随机相位调制器表面的距离 $d_1 = 12.90 \text{ mm}$ ,空间随机相位调制器表面到探测面的距离 $d_2 = 0.60 \text{ mm}$ 。先通过标定测量得到测量矩阵 $\mathbf{A}$ 的每列元素。然后在前置成像面上放置如图5所示的物体,采用经过中心波长为 $532 \text{ nm}$ 、线宽为 $2 \text{ nm}$ 的带通滤波片滤波后的卤素灯光源照射。用CCD记录下原始探测信号,将该二维信号排列成一维矢量,作为原始信号 $\mathbf{y}$ 。CCD记录的原始图像信号如图6所示。得到测

量矩阵  $\mathbf{A}$  和原始探测信号  $\mathbf{y}$  之后,采用 CS 重构算法<sup>[20]</sup>进行图像恢复。

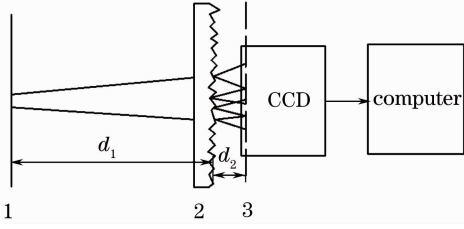


图 4 成像光路示意图 (1. 前置成像面; 2. 空间随机相位调制器; 3. 探测面)

Fig. 4 Schematic diagram for the imaging system (1. initial image plane; 2. spatially random phase modulator; 3. detection plane)

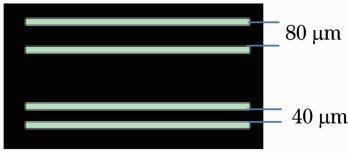


图 5 物体  
Fig. 5 Object

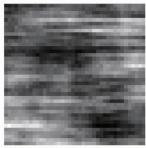


图 6 CCD 记录到的原始图像

Fig. 6 Initial image detected by CCD

定义成像系统的采样率为信号采样数目与图像像素个数之比。当采样率小于 1 时,称成像为压缩成像。图 7 是在不同采样率下的图像恢复结果。可以看出,在实空间基表象下采样率为 50% 时的图像恢复结果和全采样情况下的恢复结果接近,随着采样率的进一步下降,图像恢复质量逐渐下降。

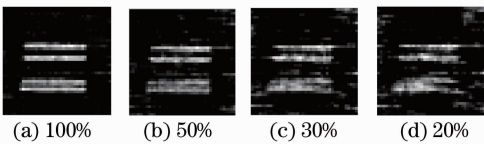


图 7 不同采样率下的图像重构结果

Fig. 7 Image reconstruction result under different sampling rates

## 5 准单色热光相位调制压缩感知成像空间分辨能力、信噪比分析

压缩感知成像系统实际的空间分辨能力除了和系统参数有关外,和图像重构算法也有关,这里只考虑由系统参数决定的理论上的空间分辨能力。系统

理论上的空间分辨能力和信噪比可以借助对图 8 所示的“调制、探测模块”的分析得到。

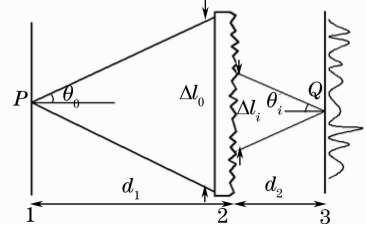


图 8 由调制探测模块分析空间分辨能力和信噪比示意图 (1. 前置成像面; 2. 空间随机相位调制器; 3. 探测面)

Fig. 8 Schematic diagram for analysis of spatial resolution and signal to noise rate (1. initial imaging plane; 2. spatial random phase modulator; 3. detection plane)

图 8 中,假定前置成像面上光场的发散角为  $\theta_0$ ,它可由图 1 所示的前置成像透镜口径  $D$  和前置成像像距  $Z_2$  估计:

$$\tan \theta_0 = \frac{D}{2Z_2}, \quad (9)$$

从前置成像面上任一点  $P$  出射的光场经过传输距离  $d_1$  之后,在空间随机相位调制器表面形成的光斑线性尺度为

$$\Delta l_0 = 2d_1 \tan \theta_0, \quad (10)$$

这部分光场经空间随机相位调制器的相位调制,再传输距离  $d_2$  后在探测面上形成一幅散斑图样。令空间随机相位调制器对光场的发散角为  $\theta_i$ ,则对于探测面上任一点  $Q$ ,到达该点的光场回溯到空间随机相位调制器表面的光斑的线性尺度为

$$\Delta l_i = 2d_2 \tan \theta_i, \quad (11)$$

当  $\Delta l_i > \Delta l_0$  时,从区域  $\Delta I_0$  出射的光场都能到达  $Q$  点进行叠加;当  $\Delta l_i \leq \Delta l_0$  时,只有从区域  $\Delta l_i$  出射的光场能到达  $Q$  点进行叠加。根据范西特-泽尼克定律<sup>[21]</sup>,从点  $P$  出射的光场在探测面上形成的散斑平均尺寸为

$$l_s = \frac{1.22\lambda d_2}{\min(\Delta l_0, \Delta l_i)}, \quad (12)$$

式中  $\lambda$  为光波长。将(10)、(11)式代入(12)式,得

$$l_s = \frac{0.61\lambda d_2}{\min(d_1 \tan \theta_0, d_2 \tan \theta_i)}. \quad (13)$$

假定系统满足傍轴近似条件,则当前置成像面上两个点光源间距  $\Delta x_0$  较小时,两个点光源形成的散斑场满足空间平移不变性,即其中任一幅散斑光强分布可以由另一幅散斑的光强分布在空间上平移得到。 $\Delta x_0$  和探测面上的散斑场的横向平移距离  $\Delta x_i$  之间满足

$$\frac{\Delta x_o}{\Delta x_i} = \frac{d_1}{d_2}, \quad (14)$$

根据散斑平均尺寸的定义,对同一个点源在探测面上生成的散斑场进行采样探测时,当两个采样点间隔大于等于散斑平均尺寸  $l_s$  时,这两个采样信号是不相关的。由(5)式,前置成像面上间隔  $\Delta x_o = l_s d_1/d_2$  的两个点光源在探测面上所产生的散斑场相互横向偏移距离  $\Delta x_i \geq l_s$ ,因此两幅散斑场之间是不相关的,前置成像面上间隔  $\Delta x_o \geq l_s d_1/d_2$  的两个点是可分辨的。所以,系统在前置成像面上最小可分辨距离为

$$x_r = l_s \frac{d_1}{d_2}, \quad (15)$$

将(13)式代入(15)式得

$$x_r = \frac{0.61\lambda d_1}{\min(d_1 \tan \theta_o, d_2 \tan \theta_i)}, \quad (16)$$

用  $1/x_r$  来度量系统的空间分辨能力。

令前置成像面线视场大小为  $L_o$ ,以  $x_r$  为单元线性尺度,将前置成像面划分成  $N$  个单元

$$N = \left(\frac{L_o}{x_r}\right)^2, \quad (17)$$

将(16)式代入(17)式

$$N = \left[\frac{L_o \min(d_1 \tan \theta_o, d_2 \tan \theta_i)}{0.61\lambda d_1}\right]^2. \quad (18)$$

所得到的结论概述如下。

信号强度用探测面上光子数空间分布的均方根  $\sigma_y$  表示。每个探测像元的噪声包括与信号强度无关的噪声  $\sigma_d$ ,以及由信号光子数涨落引起的散粒噪声  $\sigma_{\text{shot}}$ 。系统总的噪声  $\sigma_n$  是各个像元的噪声方差的均值的平方根。

当  $\sigma_{\text{shot}} \geq \sigma_d$  时,信噪比

$$S_{\text{nr}} \approx \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{shot}}} \approx \frac{(0.37\lambda^2 d_1 d_2) L_o}{[2(d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i)][\min(d_1 \tan \theta_o, d_2 \tan \theta_i)]^2} \cdot \sqrt{\frac{Ht\eta}{h\nu}}, \quad (19)$$

式中  $H$  为前置成像面上的光照度, $\nu$  为光频率, $\lambda$  为光波长, $\eta$  为探测器的量子效率, $G$  为探测器的增益, $h$  为普朗克常数。

当  $\sigma_{\text{shot}} \gg \sigma_d$  时,

$$S_{\text{nr}} \approx \frac{0.06H\lambda^3 d_1 d_2^2}{(d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i)^2 [\min(d_1 \tan \theta_o, d_2 \tan \theta_i)]^3} \frac{\eta L_o}{h\nu G \sigma_o}, \quad (20)$$

当  $\sigma_{\text{shot}} \approx \sigma_d$  时,

$$S_{\text{nr}} \approx \frac{\sigma_y}{\sqrt{2}\sigma_{\text{shot}}} \approx \frac{(0.26\lambda^2 d_1 d_2) L_o}{[2(d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i)][\min(d_1 \tan \theta_o, d_2 \tan \theta_i)]^2} \cdot \sqrt{\frac{H\eta}{h\nu}}, \quad (21)$$

下面根据(16)、(19)和(20)式来讨论前置成像面空间分辨能力  $1/x_r$  和信噪比  $R_{\text{SN}}$  随  $d_1$  和  $d_2$  的变化关系。

1) 当  $d_2 \leq \frac{d_1 \tan \theta_o}{\tan \theta_i}$  时,由(16)式得

$$1/x_r = \frac{d_2 \tan \theta_i}{0.61\lambda d_1}, \quad (22)$$

固定  $d_1$  不变,当  $d_2$  减小时,前置成像面空间分辨能力  $1/x_r$  随之降低。固定  $d_2$  不变,当  $d_1$  减小时,前置成像面空间分辨能力  $1/x_r$  随之提高。

由(19)式可知,当  $\sigma_{\text{shot}} \gg \sigma_d$  时,

$$S_{\text{nr}} \approx \frac{0.37\lambda^2 d_1 L_o}{2d_2 (d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i) (\tan \theta_i)^2} \cdot \sqrt{\frac{H\eta}{h\nu}}, \quad (23)$$

固定  $d_1$  不变,当  $d_2$  减小时,信噪比  $R_{\text{SN}}$  随之提高;固定  $d_2$  不变,当  $d_1$  减小时,信噪比  $R_{\text{SN}}$  随之降低。

由(20)式可知,当  $\sigma_{\text{shot}} \ll \sigma_d$  时,

$$S_{\text{nr}} \approx \frac{\eta L_o}{h\nu G \sigma_o} \frac{0.06H\lambda^3 d_1}{d_2 (d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i)^2 (\tan \theta_i)^3}, \quad (24)$$

固定  $d_1$  不变,当  $d_2$  减小时,信噪比  $R_{\text{SN}}$  随之提高;固定  $d_2$  不变,当  $d_1$  减小时,信噪比  $R_{\text{SN}}$  随之降低。

对比上述空间分辨能力和信噪比关于  $d_1$ 、 $d_2$  的变化规律的讨论,可以看出,当  $d_2 \leq \frac{d_1 \tan \theta_o}{\tan \theta_i}$  时,当改变参数  $d_1$  或  $d_2$  时,不能同时提高空间分辨能力和信噪比,空间分辨能力和信噪比两者是相互制约的。

2) 当  $d_2 > d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时,由(16)式得

$$1/x_r = \frac{\tan \theta_o}{0.61\lambda}, \quad (25)$$

式中  $\tan \theta_o = D/(2z_2)$ ,所以前置成像面空间分辨能力  $1/x_r$  与  $d_1$ 、 $d_2$  无关,它由前置成像系统的成像透镜的口径和像距决定。

由(19)式可知,当  $\sigma_{\text{shot}} \gg \sigma_d$  时,

$$S_{nr} \approx \frac{\sigma_y}{\sigma_{shot}} \approx \frac{0.37\lambda^2 d_2 L_0}{2d_1(d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i)(\tan \theta_o)^2} \cdot \sqrt{\frac{H\eta}{h\nu}}, \quad (26)$$

固定  $d_2$  不变, 当  $d_1$  减小时, 信噪比  $R_{SN}$  随之提高; 固定  $d_1$  不变, 当  $d_2$  增大时, 信噪比  $R_{SN}$  随之提高。当  $d_2 \gg d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时,

$$S_{nr} \approx \frac{\sigma_y}{\sigma_{shot}} \approx \frac{0.37\lambda^2 L_0}{2d_1 \tan \theta_i (\tan \theta_o)^2} \cdot \sqrt{\frac{H\eta}{h\nu}}, \quad (27)$$

信噪比趋近于一个与  $d_2$  无关的常数, 它等于当  $d_2 = d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时的信噪比的 2 倍。

由(20)式可知, 当  $\sigma_{shot} \ll \sigma_d$  时,

$$S_{nr} \approx \frac{0.06H\lambda^3 d_2^2}{d_1^2(d_1 \tan \theta_o + d_2 \tan \theta_i)^2 (\tan \theta_o)^3} \frac{\eta L_0}{h\nu G \sigma_0}, \quad (28)$$

固定  $d_2$  不变, 当  $d_1$  减小时, 信噪比  $R_{SN}$  随之提高; 固定  $d_1$  不变, 当  $d_2$  增大时, 信噪比  $R_{SN}$  随之提高。当  $d_2 \gg d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时,

$$S_{nr} \approx \frac{0.06H\lambda^3}{d_1^2 (\tan \theta_i)^2 (\tan \theta_o)^3} \frac{\eta L_0}{h\nu G \sigma_0}, \quad (29)$$

信噪比趋近于一个与  $d_2$  无关的常数, 它等于当

$d_2 = d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时的信噪比的 2 倍。

由上可知, 当  $d_2 > d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时, 空间分辨能力保持不变。在假定每个探测面元的尺寸等于探测面元所在位置处的散斑平均尺寸的条件下, 信噪比随着  $d_2$  的增大而提高, 当  $d_2 \gg d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时的信噪比趋近于当  $d_2 = d_1 \tan \theta_o / \tan \theta_i$  时的信噪比的 2 倍。

## 6 空间分辨能力、信噪比随 $d_1$ 、 $d_2$ 变化的实验验证

空间分辨能力的测量方法如下:

采用图 7 所示的光路, 在前置成像面上的不同位置处放置直径为  $10 \mu\text{m}$  的针孔光阑。采用中心波长为  $532 \text{ nm}$  线宽为  $2 \text{ nm}$  的均匀热光源照射, 在前置成像面的不同位置处生成点光源。假设从前置成像面上坐标为  $x_i$  的点光源发出的光入射到坐标为  $\xi_s$  的 CCD 像元上的光子数为  $n_p(\xi_s, x_i)$ , 则不同位置的点光源对应的散斑场的散斑强度的归一化协方差函数

$$C_{n_p}(x_i, x_j) = C_{n_p}(\Delta x) = \frac{\langle n_p(\xi_s, x_i) n_p(\xi_s, x_j) \rangle - \langle n_p(\xi_s, x_i) \rangle \langle n_p(\xi_s, x_j) \rangle}{\langle n_p(\xi_s, x_i) \rangle \langle n_p(\xi_s, x_j) \rangle}, \quad (30)$$

CCD 各像元的输出值  $y$  与入射到该像元的散斑光子数  $n_p$  满足

$$y = G\eta n_p, \quad (31)$$

则

$$C_{n_p}(\Delta x) = \frac{\langle y(\xi_s, x_i) y(\xi_s, x_j) \rangle - \langle y(\xi_s, x_i) \rangle \langle y(\xi_s, x_j) \rangle}{\langle y(\xi_s, x_i) \rangle \langle y(\xi_s, x_j) \rangle}. \quad (32)$$

由于散斑场具有空间遍历特性, 用空间统计平均代替系综平均。则

$$C_{n_p}(\Delta x) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(\xi_s, x_i) y(\xi_s, x_j) - \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(\xi_s, x_i) \cdot \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(\xi_s, x_j)}{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(\xi_s, x_i) \cdot \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(\xi_s, x_j)}. \quad (33)$$

规定归一化协方差函数等于  $1/2$  时对应的点光源间距  $\Delta x$  为前置成像面上的空间分辨能力, 由此得到前置成像面上的空间分辨能力。

信噪比的测量方法如下:

采用图 7 所示的光路, 在前置成像面上放置  $1 \text{ mm}$  的圆孔, 作为待成像物体。采用中心波长为  $532 \text{ nm}$  线宽为  $2 \text{ nm}$  的均匀热光源照射。CCD 连续曝光 500 次, 得到 500 幅原始信号图像  $y^k(i, j)$ ,  $k = 1, \dots, 500, i, j = 1, \dots, 400$ , 其中  $k$  代表曝光次数,  $i, j$  分别代表探测像元横向和纵向的序号。对这

500 幅信号光子数分布求时间平均后得到

$$\bar{y}(i, j) = \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} y^k(i, j), \quad (34)$$

根据附录中对信号强度的定义, 得到信号强度

$$\sigma_y = \left\{ \frac{1}{160000} \sum_{i,j=1}^{400} \left[ \bar{y}(i, j) - \frac{1}{160000} \sum_{i',j'=1}^{400} \bar{y}(i', j') \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (35)$$

CCD 各像元的输出值随时间涨落的方差

$$\sigma_n^2(i, j) = \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} \left[ y^k(i, j) - \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} y^k(i, j) \right]^2, \quad (36)$$

该方差包括由于光源的不稳定性带来的光源整体的光强涨落以及该像元的噪声。实验采用的卤素灯光源具有很好的稳定性,经功率计测定在 500 次测量

时间内光源整体的光强涨落可以忽略。根据附录中对噪声强度的定义,得到系统总的噪声强度

$$\sigma_n = \left\{ \frac{1}{160000} \sum_{i,j=1}^{400} \sigma_n^2(i, j) \right\}^{1/2}. \quad (37)$$

由上,得到信噪比的表达式:

$$R_{SN} = \frac{\sigma_y}{\sigma_n} = \frac{\left\{ \frac{1}{160000} \sum_{i,j=1}^{400} \left[ \bar{y}(i, j) - \frac{1}{160000} \sum_{i',j'=1}^{400} \bar{y}(i', j') \right]^2 \right\}^{1/2}}{\left\{ \frac{1}{160000} \sum_{i,j=1}^{400} \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} \left[ y^k(i, j) - \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} y^k(i, j) \right]^2 \right\}^{1/2}}, \quad (38)$$

实验采用图 8 所示的光路,测量了当  $d_2 \leq d_1 \tan \theta_0 / \tan \theta_i$  时,空间分辨能力  $1/x_r$  和信噪比  $R_{SN}$

随  $d_1, d_2$  的变化。实验结果与(22)、(23)式的理论结果的对比如下列图所示。

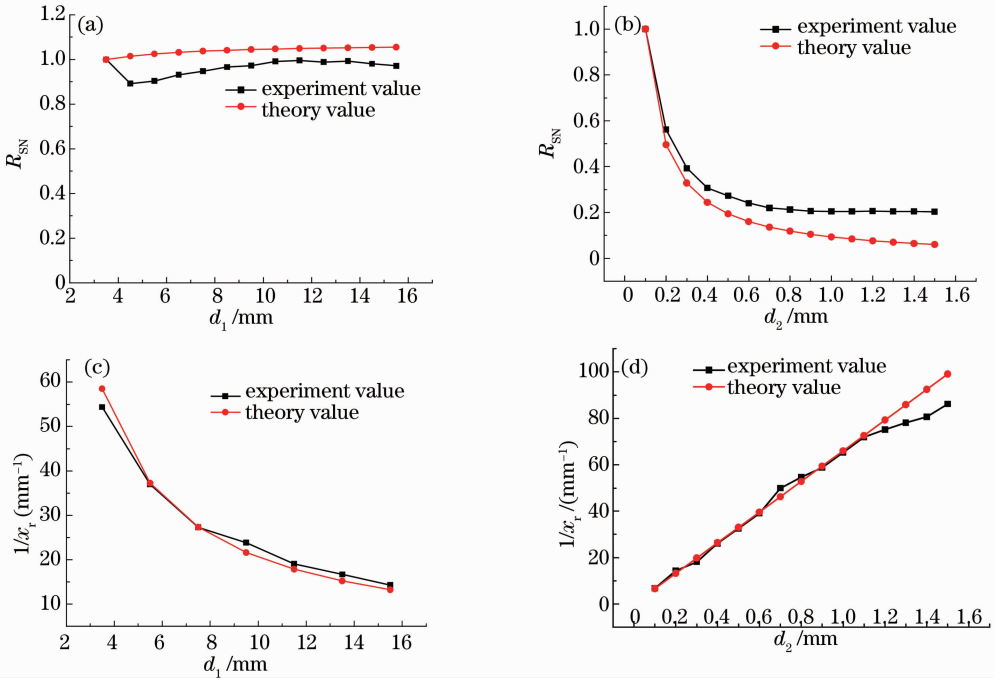


图 9 实验结果与理论结果对比。(a)  $d_2 = 0.2$  mm,  $R_{SN}$  随  $d_1$  的变化; (b)  $d_1 = 15.5$  mm  $R_{SN}$  随  $d_2$  的变化;  
(c)  $d_2 = 0.2$  mm,  $1/x_r$  随  $d_1$  的变化; (d)  $d_1 = 15.5$  mm,  $1/x_r$  随  $d_2$  的变化

Fig. 9 Comparison between experimental results and theoretical results. (a)  $R_{SN}$  changes with  $d_1$  when  $d_2 = 0.2$  mm; (b)  $R_{SN}$  changes with  $d_2$  when  $d_1 = 15.5$  mm; (c)  $1/x_r$  changes with  $d_1$  when  $d_2 = 0.2$  mm; (d)  $1/x_r$  changes with  $d_2$  when  $d_1 = 15.5$  mm

由上图可知,实验结果与理论结果基本符合,验证了前文理论分析的正确性。在  $d_2 \leq d_1 \tan \theta_0 / \tan \theta_i$  的情况下,信噪比随着  $d_1$  的增大变化不明显,随着  $d_2$  的增大而减小,当  $d_2$  增大到一定程度之后,信噪比基本保持不变。空间分辨能力随着  $d_1$  的增大而降低,随着  $d_2$  的增大而呈线性提高。

## 7 结 论

提出了一种准单色热光基于相位调制的单次曝光压缩感知成像方案,通过压缩成像实验验证了该方案在原理上的可行性。理论分析了系统的空间分辨能力和信噪比,讨论了两者的相互制约关系。且通过实验验证了当  $d_2 \leq d_1 \tan \theta_0 / \tan \theta_i$  时空间分辨能力和信噪比随  $d_1, d_2$  变化的理论分析结果。



从成像的优缺点来看,与传统点到点成像相比,提出的压缩成像方案由于基于压缩感知采样理论而具有更高的图像获取效率;与现有的基于幅度调制的压缩成像方案相比,由于采用相位调制不损失光能,具有更高的能量利用率。另一方面,在提出的压缩感知成像系统中,空间随机相位调制器使前置成像面上波长相同、空间位置相距一定间隔的任意两个准单色点光源产生两幅互不相关的散斑场,通过对不同位置点光强信息进行解调,实现准单色热光成像。对于前置成像面上同一位置处、具有一定波长间隔的任意两个窄带点光源,由于不同波长的光场经过空间随机相位调制器后,经历的相位延迟不同,两个点光源所形成的散斑场也具有非相关性,因此也可以对不同波长信息进行解调,通过单次曝光实现光谱成像探测的功能。因此,该系统通过单次曝光就能实现压缩感知光谱成像,有望解决传统光谱成像方式必须在某一个维度上进行扫描所带来的成像速度低、在高光谱高空间分辨率情况下探测灵敏度低的问题。当然,由于该光谱成像方案对 $(x, y, \lambda)$ 三维光谱图像数据用二维探测器进行探测,要求探测器具有大动态范围和大像素数目。

## 参 考 文 献

- 1 E J Candès, M B Wakin. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21–30.
- 2 G H Chen, J Tang, S Leng. Prior image constrained compressed sensing (PICCS): a method to accurately reconstruct dynamic CT images from highly undersampled projection data sets [J]. Medical Physics, 2008, 35(2): 660–663.
- 3 Li Jing, Sun Yi.  $L_1$ -norm-based differential phase-contrast computerized tomography reconstruction algorithm with sparse angular resolution [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(3): 0311002.  
李 镜, 孙 怡. 基于  $L_1$  范数的微分相位衬度 CT 稀疏角度重建算法[J]. 光学学报, 2012, 32(3): 0311002.
- 4 M Lustig, D Donoho, J Pauly. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182–1195.
- 5 M A Herman, T Strohmer. High-resolution radar via compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6): 2275–2284.
- 6 L C Potter, E Ertin, J T Parker, *et al.*. Sparsity and compressed sensing in radar imaging [J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98

- (6): 1006–1020.
- 7 O Katz, Y Bromberg, Y Silberberg. Compressive ghost imaging [J]. Appl Phys Lett, 2009, 95(13): 131110.
- 8 J Y Liu, J B Zhu, C Lu, *et al.*. High-quality quantum-imaging algorithm and experiment based on compressive sensing [J]. Opt Lett, 2010, 35(8): 1206–1208.
- 9 W Gong, S Han. Super-resolution far-field ghost imaging via compressive sampling [J]. arXiv preprint, 2010, arXiv: 0911.4750.
- 10 W Gong, S Han. Experimental investigation of the quality of lensless super-resolution ghost imaging via sparsity constraints [J]. Phys Lett A, 2012, 376(17): 1519–1522.
- 11 Zhang Shuo, Wang Jie, Wang Jincheng, *et al.*. Simple calculation method for three-dimensional imaging based on compressed sensing [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(1): 0111004.  
张 硕, 王 杰, 王金成, 等. 基于压缩感知的三维物体成像的简单计算方法[J]. 光学学报, 2013, 33(1): 0111004.
- 12 M F Duarte, M A Davenport, D Takhar, *et al.*. Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83–91.
- 13 Lu Minghai, Shen Xia, Han Shensheng. Ghost imaging via compressive sampling based on digital micromirror device [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(7): 0711002.  
陆明海, 沈 夏, 韩申生. 基于数字微镜器件的压缩感知关联成像研究[J]. 光学学报, 2011, 31(7): 0711002.
- 14 D Kittle, K Choi, A Wagadarikar, *et al.*. Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers [J]. Appl Opt, 2010, 49(36): 6824–6833.
- 15 A Stern, Y Rivenson, B Javidi. Single-shot compressive imaging [C]. SPIE, 2007, 6778: 6778J.
- 16 Zhang Cheng, Yang Hairong, Wei Sui. Compressive double-lens imaging using circulant-toeplitz-block phase mask [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(8): 0811001.  
张 成, 杨海蓉, 韦 穗. 循环托普利兹块相位掩模可压缩双透镜成像[J]. 光学学报, 2011, 31(8): 0811001.
- 17 R Fergus, A Torralba, W T Freeman. Random Lens Imaging [R]. Massachusetts: MIT CSAIL Technical Report, 2006.
- 18 M A T Figueiredo, R D Nowak, S J Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586–597.
- 19 J Tropp, A Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655–4666.
- 20 E Li, M Chen, W Gong, *et al.*. A fast converging sparse reconstruction algorithm in ghost imaging [J]. Journal of Electronics, 2012, 29(6): 617–620.
- 21 J W Goodman. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications [M]. Cao Qizhi, Chen Jiabi, Transl., Beijing: Science Press, 2009. 23–24.  
古德曼. 光学中的散斑现象: 理论与应用 [M]. 曹其智, 陈家璧译. 北京: 科学出版社, 2009. 23–24.

栏目编辑: 张浩佳