

# 基于退化转换及可分离全变差模型的图像修复

王 斌 胡辽林 薛瑞洋

(西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048)

**摘要** 空域重叠的模糊和噪声引起图像退化,修复通常比较复杂。为简化图像修复,提高修复质量,提出利用二阶逼近算子将传统图像修复中既含噪声又含模糊的双退化模型转化为只含“动态噪声”的单退化模型。在传统全变差模型的基础上,提出了一种利用低维差分投影的思想,建立元素可分离的全变差模型,利用一阶梯度下降算法解决“动态噪声”问题。仿真结果表明,该方法适用于多种退化模型,即使在强退化环境下,依然可以有效地去除噪声和模糊,保留图像边缘和细节信息,使退化图像恢复到较理想的状态。

**关键词** 图像处理;退化模型;逼近算子;动态噪声;全变差模型

**中图分类号** TP391.4; TP751.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.1011002

## Image Restoration Based on Degradation Conversion and Seperable Total Variation Model

Wang Bin Hu Liaolin Xue Ruiyang

(Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology,  
Xi'an, Shaanxi 710048, China)

**Abstract** Image restoration is actually complicated because of the spatial-domain overlapping of noise and blur which can cause image degradation. In order to simplify restoration and improve recovery quality, it is proposed that the original double degradation model being translated into a single degradation model which contains only dynamic noise by utilizing proximal operator. Based on traditional total variation model, the seperable version is proposed by introducing low-dimension differential projection. The dynamic noise can be removed through first-order gradient descent algorithm. The results show that this method is applicable to a variety of degradation models, which effectively remove noise and blur with edges and details kept, even in a strong degradation environment. This makes degraded image recover to ideal status.

**Key words** image processing; degradation model; proximal operator; dynamic noise; total variation model

**OCIS codes** 110.4280; 110.2960; 110.3000; 110.2960

## 1 引 言

随着数码产品的普及,图像修复成为一个重要的研究方向。造成图像降质的主要因素是模糊和噪声。由于模糊和噪声在空间上的重叠,去模糊和去噪声通常是分开进行的,实现方法多种多样,如Richardson-Lucy类方法<sup>[1-2]</sup>,此方法对退化过程先验知识要求少,但恢复效果一般,由于采用迭代逼近思想,耗时较长;正则化方法<sup>[3-4]</sup>,此类方法恢复

效果较好,但算法复杂,正则化参数难以估计,往往需要配合参数估计算法,较为繁琐;小波类方法<sup>[5-6]</sup>,此类算法以多分辨率分析为基础,往往需要结合Wiener或Gabor滤波器,且存在“振铃”现象,需要引入消除“振铃”的辅助措施;全变差范数类方法<sup>[7-8]</sup>,此类方法构建于能量均衡原则,与优化理论结合可以收到非常好的效果,可有效保留边缘细节信息,但模糊核与全变差范数很难分离,需引入特殊的

**收稿日期**: 2014-03-13; **收到修改稿日期**: 2014-04-14X

**基金项目**: 陕西省自然科学基金(2014JM7273)

**作者简介**: 王 斌(1989—),男,硕士研究生,主要从事信号与图像处理方面的研究。E-mail: 454288852@qq.com

**导师简介**: 胡辽林(1968—),男,博士,副教授,主要从事传感技术与信号处理方面的研究。E-mail: huliaolin@163.com

(通信联系人)

分裂方法,如 Spilt-Bregman 和 Linearized-Bregman 方法;另外还有一些不太常用的方法如神经网络法<sup>[9]</sup>。

针对以上方法存在的问题,本文提出利用二阶逼近算子将传统图像修复中既含噪声又含模糊的双退化模型转化为只含“动态噪声”的单退化模型,从而将复杂的图像修复问题转换为一个相对简单的去噪问题。在传统全变差模型的基础上,通过低维差分投影和线性算子理论,建立了元素可分离的全变差模型,从而大大简化了传统的全变差去噪模型。

## 2 图像修复模型及转换

### 2.1 图像修复模型

图像修复模型可表示为

$$\mathcal{A} * \mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

式中矩阵  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$  和  $\mathbf{b}$  分别表示尺寸为  $n_1 \text{ pixel} \times n_2 \text{ pixel}$  的无噪声图像、噪声和退化图像,  $\mathcal{A}$  为模糊算子,  $*$  表示卷积。为方便起见,(1)式可写成

$$\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{H}$  是模糊算子  $\mathcal{A}$  对应的 Block-Toeplitz 矩阵。因此图像修复的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}, \\ \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$  为  $\mathbf{x}$  的全变差范数,其物理意义是图像横纵两个方向前向(或后向)差分的和,即  $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} =$

$$\sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} \|\mathbf{B}_{ij}\mathbf{x}\|_2, \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i+1,j} - x_{i,j} \\ x_{i,j+1} - x_{i,j} \end{bmatrix}.$$

由于图像具有冗余性,无噪声图像的全变差范数值非常小,而有噪声时则很大,因此最小化  $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$  就是降低噪声的影响。

$\|\mathbf{x}\|_{\text{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} x_{ij}^2}$  为  $\mathbf{x}$  的 F-范数,  $\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon$  表征了原图像与待修复图像的能量相似程度。对(3)式进行正则化处理得

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}, \\ \mathbf{x} = \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\lambda$  为拉格朗日乘子,表示  $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$  在  $\min F(\mathbf{x})$  中的权重。若  $\lambda$  较大,表示重视噪声的去除,恢复后的图像保真度稍差;  $\lambda$  较小,表示重视保真度,噪声去除效果稍差。由于  $\lambda$  本质上体现的是  $\mathbf{H}\mathbf{x}$  与  $\mathbf{w}$  的能量对比,而不是  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{w}$  的能量对比,所以传统的正则化方法难以处理模糊图像。约束条件表示将像素值归一化,以减少运算量。(4)式中目标函数第一项  $\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2$  为可微凸函数,第二项  $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$  为不可微凸函数,所以无法直接求解。

### 2.2 修复模型的转换

根据文献[10],设  $G(a) = f(a) + g(a)$ ,  $f(a)$  为可微凸函数,  $g(a)$  为任意凸函数,  $L(f)$  为  $f(a)$  的 Lipschitz 常数,  $\text{dom}(f)$  为函数  $f$  定义域,即  $\text{domain}(f)$ ,对于  $\forall a, a_{k-1} \in \text{dom}(f)$  都有下式成立:

$$f(a_{k-1}) + \langle f'(a_{k-1}), a - a_{k-1} \rangle \leq f(a) \leq f(a_{k-1}) + \langle f'(a_{k-1}), a - a_{k-1} \rangle + \frac{L(f)}{2} \|a - a_{k-1}\|_2^2, \quad (5)$$

式中  $\langle f'(a_{k-1}), a - a_{k-1} \rangle$  是  $f'(a_{k-1})$  与  $a - a_{k-1}$  的内积。设不等式的右边为  $T(a)$ ,根据逼近算子理论<sup>[10]</sup>,当  $a_{k-1} \rightarrow a$  时,  $T(a)$  是  $f(a)$  的紧上界,所以

$$\min G(a) = f(a) + g(a) \stackrel{a_{k-1} \rightarrow a}{\Leftrightarrow} \min [T(a) + g(a)], \quad (6)$$

所以(5)式的解变为逼近迭代问题:

$$a_k = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(a_{k-1}) + \langle f'(a_{k-1}), a - a_{k-1} \rangle + \frac{L(f)}{2} \|a - a_{k-1}\|_2^2 + g(a) \right\}, \quad (7)$$

对(7)式进行合并化简得

$$a_k = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{L(f)}{2} \|a - e_k\|_2^2 + g(a) \right], \quad (8)$$

式中  $e_k = a_{k-1} - L^{-1}(f)f'(a_{k-1})$ 。

对于(4)式,可微凸函数  $\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2$  替换  $f(a)$ ,不可微凸函数  $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$  替换  $g(a)$ ,得到等价形式

$$\mathbf{x}_k = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{L(f)}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_{k-1}\|_{\text{F}}^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \right\}, \quad \mathbf{x} = \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\}, \quad (9)$$

式中  $\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{x}_{k-1} - \frac{\nabla \|\mathbf{H}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2}{L(f)}$ 。(9)式是将既有模糊又有噪声的问题转化为只有噪声问题,只是

“噪声” $\mathbf{d}_{k-1}$  在这里是一种动态噪声,即每一次迭代后都需要重新计算  $\mathbf{d}_{k-1}$ 。这样复杂的图像修复问题就转换为一个单纯的去噪问题。

### 3 元素可分离的全变差模型

全变差范数分为各向同性和各向异性范数两种,本文采用前者,即

$$\| \mathbf{x} \|_{\text{TV}_1} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} \sqrt{(x_{i,j} - x_{i+1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j+1})^2} + \sum_{i=1}^{n_1-1} |x_{i,n_2} - x_{i+1,n_2}| + \sum_{j=1}^{n_2-1} |x_{n_1,j} - x_{n_1,j+1}|, \quad (10)$$

式中  $x_{i,n_2}, x_{n_1,j}$  为图像的边界像素。由于  $\| \mathbf{x} \|_{\text{TV}_1}$  中含有 4 个两两相关的变量  $x_{i,j} - x_{i+1,j}$  和  $x_{i,j} - x_{i,j+1}$ , 且有根号、绝对值的限制,所以需要将  $\| \mathbf{x} \|_{\text{TV}_1}$  可分离化。为此,采用文献[11]中的模型,构造集合  $\mathcal{R}$ , 其元素由矩阵  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$  组成,即  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{p} \in R^{(n_1-1) \times n_2}, \mathbf{q} \in R^{n_1 \times (n_2-1)}$ , 且满足

$$\begin{cases} |p_{i,n_2}| \leq 1 \\ |q_{n_1,j}| \leq 1 \\ p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2 \leq 1 \end{cases}, 1 \leq i \leq n_1 - 1, 1 \leq j \leq n_2 - 1, \quad (11)$$

同时满足边界条件  $p_{0,j} = p_{n_1,j} = q_{i,0} = q_{i,n_2} = 0$ 。对于  $n_1 \times n_2$  的矩阵,定义线性算子  $\psi$  为

$$[\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{i,j} = p_{i,j} - p_{i-1,j} + q_{i,j} - q_{i,j-1}, \quad 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2, \quad (12)$$

(12)式说明  $\psi$  是指向  $n_1 \text{ pixel} \times n_2 \text{ pixel}$  图像空间的投影,根据文献[11],其伴随算子  $\psi^*$  为

$$\psi^*(x_{i,j}) = (p_{i,j}, q_{i,j}), \quad (13)$$

它由图像空间指向  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  空间,式中

$$p_{i,j} = x_{i,j} - x_{i+1,j}, 1 \leq i \leq n_1 - 1, 1 \leq j \leq n_2, \quad (14)$$

$$q_{i,j} = x_{i,j} - x_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2 - 1, \quad (15)$$

(13)式表明图像空间中元素  $x_{i,j}$ , 可通过  $\psi^*(x)$  得到它在  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  空间下的原象  $(p_{i,j}, q_{i,j})$ ,  $p_{i,j}$  和  $q_{i,j}$  是  $x_{i,j}$  在纵横方向上的差分。通过构造线性算子和其伴随算子,图像差分  $x_{i,j} - x_{i+1,j}$  和  $x_{i,j} - x_{i,j+1}$  转化为两个互不相关的变量  $p_{i,j}$  和  $q_{i,j}$ 。

下面推导如何解决全变差范数中的开根问题。由范数的性质,  $\forall z, y \in R$  的  $l_2$  和  $l_1$  范数可写为

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + y^2} = \max\{p_1 z + p_2 y : p_1^2 + p_2^2 \leq 1\} \\ |z| = \max\{p z : |p| \leq 1\} \end{cases}, \quad (16)$$

由(16)式类推(10)式,  $\| \mathbf{x} \|_{\text{TV}_1}$  可写成

$$\| \mathbf{x} \|_{\text{TV}_1} = \max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \psi} T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (17)$$

式中

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} [p_{i,j}(x_{i,j} - x_{i+1,j}) + q_{i,j}(x_{i,j} - x_{i,j+1})] + \sum_{i=1}^{n_1-1} p_{i,n_2}(x_{i,n_2} - x_{i+1,n_2}) + \sum_{j=1}^{n_2-1} q_{n_1,j}(x_{n_1,j} - x_{n_1,j+1}), \quad (18)$$

利用矩阵迹的性质有  $T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{Tr}[\psi^T(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}]$ ,  $\text{Tr}$  为矩阵的迹,  $\psi^T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  是  $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  的转置。于是(9)式可写成

$$\mathbf{x}_k = \min_{x_{i,j} \in [0,1]} \max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{R}} \left\{ \frac{L(f)}{2} \| \mathbf{x} - \mathbf{d}_{k-1} \|_F^2 + 2\lambda \text{Tr}[\psi^T(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}] \right\}, \quad (19)$$

这样就将全变差范数的开根转化为求最大值问题。

根据文献[12],若目标函数对求最小化的变量是凸函数,对求最大值的变量是凹函数,则求  $\min$  和  $\max$  可以对调。在(19)式中,  $\| \mathbf{x} - \mathbf{d}_{k-1} \|_F^2$  是凸函数,  $2\lambda \text{Tr}[\psi^T(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}]$  是线性函数(既可看成是凸函数,也可视为凹函数),满足对调条件,调换次序得

$$\mathbf{x}_k = \arg \max_x \min_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{R}, x_{i,j} \in [0,1]} \left\{ \frac{L(f)}{2} \| \mathbf{x} - \mathbf{d}_{k-1} \|_F^2 + 2\lambda \text{Tr}[\psi^T(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}] \right\}, \quad (20)$$

利用迹的性质,即  $\text{Tr}[\mathbf{A}^T \mathbf{B}] = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$ , (20)式的  $\max \min$  部分可改写为

$$\max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{R}, x_{i,j} \in [0,1]} \min \left\{ \| \mathbf{x} - [\mathbf{d}_{k-1} - 2\lambda L^{-1}(f)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})] \|_F^2 - \| \mathbf{d}_{k-1} - 2\lambda L^{-1}(f)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \|_F^2 + \| \mathbf{d}_{k-1} \|_F^2 \right\}, \quad (21)$$

由于(21)式中只有第一项含  $\mathbf{x}$ , 先做以  $\mathbf{x}$  为变量的最小化,显然易得

$$\mathbf{x} = \mathbf{d}_{k-1} - 2\lambda L^{-1}(f)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (22)$$

为了满足约束条件  $\mathbf{x} = \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\}$ , 需要将(22)式写成

$$\mathbf{x} = P_{B_{0,1}}[\mathbf{d}_{k-1} - 2\lambda L^{-1}(f)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})], \quad (23)$$

式中  $P_{B_{0,1}}$  表示当解出的  $\mathbf{x}$  中有元素值小于 0 时,将该元素置为 0;有元素值大于 1 时,将其置为 1,由于  $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  值在(23)式中不能确定,需要将(23)式代回

(21) 式,再略去常数项(常数项不影响最优化问题的解),使(23)式变成一个自变量只含  $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  的 max 问题即

$$\max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{D}} \left\{ \left\| P_{B_{0,1}} \left[ \mathbf{d}_{k-1} - \frac{2\lambda}{L(f)} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] - \left[ \mathbf{d}_{k-1} - \frac{2\lambda}{L(f)} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] \right\|_F^2 - \left\| \mathbf{d}_{k-1} - \frac{2\lambda}{L(f)} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right\|_F^2 \right\}, \quad (24)$$

利用对偶优化理论,将(24)式转化为 min 问题,利用文献[13]中的一阶梯度下降算法即可求解,解为

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) = (\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1}) + \frac{1}{16\lambda} \psi^T \{ P_{B_{0,1}} [\mathbf{d}_{k-1} - 2\lambda L^{-1}(f) \psi(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1})] \}, \quad (25)$$

因为(16)式成立的条件是  $p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2 \leq 1$ ,所以需要(25)式做归一化处理

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) = P_{\mathcal{D}} \left\{ (\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1}) + \frac{L(f)}{16\lambda} \psi^T \{ P_{B_{0,1}} [\mathbf{d}_{k-1} - 2\lambda L^{-1}(f) \psi(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1})] \} \right\}, \quad (26)$$

式中  $P_{\mathcal{D}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$  为归一化算子,  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{(n_1-1) \times n_2}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n_1 \times (n_2-1)}$

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{p_{i,j}}{\max\{1, \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2}\}}, & j = n_2 \\ \frac{p_{i,j}}{\max\{1, |p_{i,j}|\}}, & j \neq n_2 \end{cases}, \quad (27)$$

$$v_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{i,j}}{\max\{1, \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2}\}}, & i = n_1 \\ \frac{q_{i,j}}{\max\{1, |q_{i,j}|\}}, & i \neq n_1 \end{cases}, \quad (28)$$

结合(27)、(28)式对(26)式反复迭代,得到稳定解  $(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)$  后代入(25)式,得到修复图像。

## 4 算法流程及复杂度分析

### 4.1 算法流程

Input: 模糊算子  $\mathcal{A}$  或对应的 Toeplitz 矩阵  $\mathbf{H}$ , Lipschitz 常数  $L(f)$ , 待修复图像  $\mathbf{b}$ , 拉格朗日乘子  $\lambda$ , 内层迭代数  $k$ , 外层迭代数  $K+1$ 。

Output: 修复后的图像  $\mathbf{x}$ 。

Step 1(初始化): 令  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = 0$ ;

Step  $m$  ( $2, 3, \dots, K$ ): 计算  $\mathbf{d}_m = \mathbf{x}_m - \frac{\nabla \| \mathbf{H} \mathbf{x}_m - \mathbf{b} \|_F^2}{L(f)}$

for  $j=1$ (内层迭代);

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = [\mathbf{0}_{(n_1-1) \times n_2}, \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-1)}];$$

for  $j=2, 3, \dots, k$ ;

$$(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j) = P_{\mathcal{D}} \left\{ (\mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{q}_{j-1}) + \frac{L(f)}{16\lambda} \psi^T \times \left\{ P_{B_{0,1}} \left[ \mathbf{d}_m - \frac{2\lambda}{L(f)} \psi(\mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{q}_{j-1}) \right] \right\} \right\}$$

for  $j = k+1$ ;

$$\mathbf{x}_{m+1} = P_{B_{0,1}} [\mathbf{d}_m - 2\lambda L^{-1}(f) \psi(\mathbf{p}_{k+1}, \mathbf{q}_{k+1})];$$

Step  $K+1$ : 计算  $\mathbf{x} = P_{B_{0,1}} [\mathbf{d}_K - 2\lambda L^{-1}(f) \psi(\mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K)]$ 。

### 4.2 复杂度分析

本算法包含三个部分:初始化,双层迭代分别计算  $\mathbf{d}_m$  和  $\mathbf{x}_{m+1}$  以及计算  $\mathbf{x}$ 。第一和第三部分只有简单的加、乘、求阈值运算,且分别只有一步,复杂度可忽略不计。第二部分内层循环求解  $\mathbf{x}_{m+1}$  采用一阶梯度下降算法,设  $\mathbf{x}_{m+1}$  为内层算法迭代  $k$  次得到的解,  $\mathbf{x}^*$  为最优解,并设  $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|_F^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{TV}$ , 即去噪声问题中需要最小化的部分,利用文献[12]中定理 3.1 的证明有

$$F(\mathbf{x}_{m+1}) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{L(f) \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2}{2k}, \quad (29)$$

式中  $\mathbf{x}_0$  与  $\mathbf{x}^*$  均为定值,  $k$  为内层迭代次数。(29)式说明算法的收敛速度为线性,故其时间复杂度为  $O(1/k)$ 。由于外层循环需要  $K-1$  次,所以总的复杂度为  $(K-1) O(1/k) = O[(K-1)/k]$ 。

## 5 仿真及分析

仿真采用  $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$  的标准 lena 图像,每种模糊采用不同尺寸的掩模。添加方差为 0.001 的弱高斯噪声和掩模为  $25 \times 25$ 、标准差  $\delta=8$  的强高斯模糊,如图 1 所示。修复后图像的峰值信噪比(PSNR)达到 31.2 dB,修复图像的脸部特征和头发等细节保持得很好,整幅图像轮廓鲜明,模糊去除得比较干净。

添加方差为 0.05 的中等强度高斯噪声和掩模为  $25 \times 25$ 、标准差  $\delta=8$  的强高斯模糊,如图 2 所示。由于噪声较强,内层循环需要较高的迭代次数。从图 2(c)可以看出,低频部分的恢复效果很好;而图 2(d)中脸部和头发等细节有较明显的模糊残余,恢复效果比图 1 略差,但相差不大,说明算法对噪声

的“抵抗”能力较强,即具有较强的抗噪稳健性。修复图像的 PSNR 为 30.2 dB,比图 1 并没有下降太多,仍属于较理想的结果。对于模糊图像,经验证无论带强噪声还是弱噪声(也验证过椒盐噪声),恢复

效果相差不大。由于现实中更多的情况是强模糊+弱噪声,下面的仿真主要针对强模糊+弱噪声的图像修复。



(a) original image (b) noisy and blurred image (c) recovered image (d) facial detail of recovered image

图 1 Lena 修复效果(25×25 高斯模糊,高斯噪声方差为 0.001)

Fig. 1 Recovered results of Lena(25×25 Gaussian blur, variance of Gaussian noise is 0.001)



(a) original image (b) noisy and blurred image (c) recovered image (d) facial detail of recovered image

图 2 Lena 修复效果(25×25 高斯模糊,高斯噪声方差为 0.05)

Fig. 2 Recovered results of Lena (25×25 Gaussian blur, variance of Gaussian noise is 0.05)



(a) original image (b) noisy and blurred image (c) recovered image (d) facial detail of recovered image

图 3 Lena 修复效果(49×49 运动模糊,高斯噪声方差为 0.001)

Fig. 3 Recovered results of Lena (49×49 motion blur, variance of Gaussian noise is 0.001)



(a) original image (b) noisy and blurred image (c) recovered image (d) facial detail of recovered image

图 4 Lena 修复效果(25×25 均值模糊,高斯噪声方差为 0.001)

Fig. 4 Recovered results of Lena(25×25 average blur, variance of Gaussian noise is 0.001)



图 3 为添加方差为 0.001 的高斯噪声、运动位移为 49、运动方向为  $10^\circ$  (实际应用中, 可以采用多种方法计算不同方向的模糊算子<sup>[14]</sup>) 的强运动模糊的恢复结果, PSNR 为 32.5 dB。相比图 1, 图 3(c) 和 (d) 均有较明显的残留运动模糊条纹, 这是因为运动模糊的 Block-Toeplitz 矩阵和高斯噪声矩阵的相关性比较弱, 即噪声更为“独立”, 需要较多的内层迭代次数才能完全消除残留的运动模糊条纹。图 4 为添加方差为 0.001 的高斯噪声、掩模为  $50 \times 50$  的强均值模糊的恢复结果, PSNR 为 31.1 dB。图 4 低频处的恢复效果是几种模糊里最好的, 但细节纹理恢复效果一般, 从图 3(c) 中就可看到较明显的面部残留模糊条纹。这是因为均值模糊本身对低频处的影响不大, 而对高频处影响很大。圆均值模糊与均值模糊类似, 故不再列出。

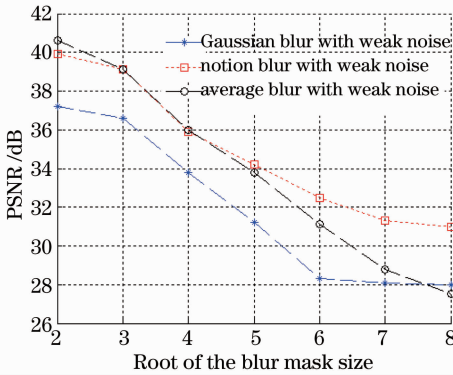


图 5 不同模糊尺寸下的 PSNR

Fig. 5 PSNR of different blur masks

图 5 为不同掩模下的图像恢复的 PSNR。为了选择具有广泛代表性的掩模, 取其尺寸分别为  $4 \times 4$ 、 $9 \times 9$ 、 $16 \times 16$ 、 $25 \times 25$ 、 $36 \times 36$ 、 $49 \times 49$ 、 $64 \times 64$ , 图 5 中横轴为掩模尺寸的根, 即分别为 2、3、4、5、6、7、8。需注意, 对于均值模糊, 以上尺寸均为半径。从图 5 中可以看出, 三种模糊类型中运动模糊的恢复效果最佳, 下降最平缓, 当掩模尺寸的根增加到 6 以上时, 高斯模糊 PSNR 趋于平缓, 均值模糊的 PSNR 与掩模尺寸的根近似线性关系。

为与其他方法比较, 做过几组仿真。对  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$  camera 图像, 添加  $7 \times 7$  圆均值模糊及不同强度高斯噪声, 该方法的 PSNR 值比基于线性化 Bregman 分裂的全变差方法高 2.5~3.1 dB<sup>[15]</sup>; 对  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$  Lena 图像, 添加  $3 \times 3$  高斯模糊及不同强度高斯噪声, 该方法比基于欧拉-拉格朗日方程的全变差类方法高 3~5 dB; 对  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$  Lena 图像, 添加  $3 \times 3$  高斯模糊及不同强度高斯噪声, 该方法比

Richardson-Lucy 类方法高 4~5 dB<sup>[2]</sup>。当然, 对于其他模糊类型, 以上结论会有一些偏差。

## 6 结 论

提出了一种退化模型转换的思想, 利用逼近算子将模糊和噪声转化为“动态噪声”, 大大降低了传统去模糊问题的难度。提出了利用可离散全变差模型求解“动态噪声”问题, 对方法的构造过程、收敛性和算法复杂度进行了细致分析。结果表明, 该方法对常见退化模型均有较好的恢复能力, 即使在强退化情况下依然可以恢复出优质的图像。由于该算法继承了传统全变差模型的优点, 所以能够有效保留图像的边缘和纹理信息。该方法本质上属于凸优化方法, 即迭代次数越多, 恢复效果越好, 所以总是能够收敛到最优解, 是一种普遍适用的稳定方法。

## 参 考 文 献

- 1 Yu Wenhua, Dong Wende, Xu Zhihai, *et al.*. Method for blurred image restoration based on Hartmann-Shack wavefront sensor [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(8): 0828005.  
余文华, 董文德, 徐之海, 等. 基于哈特曼-夏克波前传感器的模糊图像复原方法[J]. *光学学报*, 2012, 32(8): 0828005.
- 2 Zhao Bo, Zhang Wensheng, Ding Huan. Novel image deblurring algorithm based on Richardson-Lucy [J]. *Computer Engineering and Application*, 2011, 47(34): 1-4.  
赵博, 张文生, 丁欢. 基于 Richardson-Lucy 的图像去模糊新算法[J]. *计算机工程与应用*, 2011, 47(34): 1-4.
- 3 Fu Zhongliang, Feng Huajun, Xu Zhihai, *et al.*. Restoration of image blurred by any form motion in two-dimension [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(2): 369-372.  
付中梁, 冯华君, 徐之海, 等. 二维任意运动形式模糊图像的恢复[J]. *光学学报*, 30(2): 369-372.
- 4 H Takeda, S Farsiu, P Milanfar. Deblurring using regularized locally adaptive kernel regression [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(4): 550-563.
- 5 G D Wang, Z K Pan, J Xu, *et al.*. Single-image motion deblurring using normalized nonlinear diffusion regularization [C]. *IEEE International Conference on Image and Graphics*, 2013. 112-116.
- 6 X Q Zhang, M Burger, X Bresson, *et al.*. Bregmanized nonlocal regularization for deconvolution and sparse reconstruction [J]. *SIAM J Imaging Sciences*, 2010, 3(3): 253-276.
- 7 C Vonesch, M Unser. A fast multilevel algorithm for wavelet-regularized image restoration [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(3): 509-523.
- 8 A Beck, M Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(11): 2419-2434.
- 9 Li Yongle, Lou Jingtao, Zhang Maojun, *et al.*. Image restoration for catadioptric defocus blur based on Omni-Total variation minimization [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(8): 0811006.  
李永乐, 娄静涛, 张茂军. 基于全向总变分最小化的折反射散焦模糊图像复原方法[J]. *光学学报*, 2013, 33(8): 0811006.
- 10 N Kumar, R Nallamothu, A Sethi. Neural network based image deblurring [C]. *IEEE Symposium on Neural Network Applications in Electrical Engineering*, 2012. 219-222.

- 11 N Parikh, S Boyd. Proximal algorithms [J]. Foundations and Trends in Optimization, 2013, 1(3): 123–231.
- 12 A Beck, M Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. SIAM J Imaging Sciences, 2009, 2(1): 183–202.
- 13 A Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1-2): 89–97.
- 14 Zhao Yanyan, Yuan Yan, Su Lijuan. Point spread function estimation of blurring due to uniform linear motion in arbitrary direction [J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(8): 0809003.  
赵妍妍, 袁 艳, 苏丽娟. 任意方向匀速直线运动模糊的点扩展函数估计[J]. 中国激光, 2012, 39(8): 0809003.
- 15 J F Cai, S Osher, Z W Shen. Linearized Bregman iterations for frame-based image deblurring [J]. SIAM J Imaging Sciences, 2009, 2(1): 226–252.

栏目编辑：张浩佳