

# 快速傅里叶变换湍流相位屏高频误差的补偿方法

向劲松

(重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065)

**摘要** 基于快速傅里叶变换(FFT)的湍流相位屏模拟方法存在低空间频率及高空间频率湍流分量采样不足的问题。提出了一种相位屏高频误差补偿方法。在这种补偿方法中,通过数值积分计算出未采样部分高功率谱对应的二维相位自相关矩阵,然后该自相关矩阵经过 FFT 得到各功率谱采样点需补偿的功率谱值。仿真结果表明,该方法可以很好地补偿高频误差,模拟的相位结构函数误差约为 0.1%。

**关键词** 大气光学;大气传播;大气湍流

**中图分类号** TN012; TN929.12

**文献标识码** A

**doi:** 10.3788/AOS201434.1001003

## High-Frequency Error Compensation Method for the Fast Fourier Transform-Based Turbulent Phase Screen

Xiang Jingsong

(Communication and Information Engineering Institute, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

**Abstract** The fast Fourier transform (FFT)-based turbulence phase screen has the drawbacks of the undersampling of the low spatial frequency and high spatial frequency turbulence components. So a method is proposed to compensate the high frequency errors. In this compensation method, the phase autocorrelation matrix corresponding to the unsampled high frequency power spectrum is calculated by numerical integration, and then the compensation values of the power spectrum on the sampling grids are obtained from the phase autocorrelation matrix by a FFT operation. The simulation results show that the high frequency error can be compensated accurately by this method, and the error of the simulated phase structure function is about 0.1%.

**Key words** atmospheric optics; atmospheric propagation; atmospheric turbulence

**OCIS codes** 010.1290; 010.1300; 010.1330

### 1 引言

数值模拟是研究激光大气湍流传输特性的一个重要方法。湍流相位屏的模拟是数值模拟的关键。目前最常用的模拟方法主要有基于快速傅里叶变换(FFT)的谱反演法<sup>[1-8]</sup>、Zernike 多项式法<sup>[9]</sup>、协方差函数法<sup>[10-11]</sup>、分形插值法<sup>[7,11-14]</sup>等。Zernike 方法的主要缺点是对湍流的高频分量模拟不足,另外湍流的外尺度效应也难以模拟。协方差函数法生成的相位屏比较准确,但受计算机内存及处理速度限制,其相位屏格点数少。分形插值法通过逐级分形插值可使相位屏的点数无限扩充,但随着分形级数

的增加,其误差也会逐渐增大。FFT 谱反演法的主要优点是可借助 FFT 运算,速度快,相位屏的格点数可以很多,在激光湍流传输模拟中已得到广泛应用。但 FFT 相位屏存在一些问题,主要是对湍流的空间低频分量及空间高频分量模拟不准确。如相位屏尺寸为  $D$ , 采样点数为  $M$ , 采样间隔为  $\Delta = D/M$ , 则能采样的功率谱的最大角频率为  $\pi/\Delta$ , 最小非零角频率为  $2\pi/D$ 。对于空间角频率大于  $\pi/\Delta$  的功率谱部分将不能采样,这将引起高频误差。而空间角频率小于  $2\pi/D$  的功率谱部分将引起低频误差。其中低频误差对湍流效应的准确模拟有严重影响,过去二

**收稿日期:** 2014-05-29; **收到修改稿日期:** 2014-06-23

**基金项目:** 国家自然科学基金(61371096,61275077)、重庆市教委科学技术研究(KJ130515)

**作者简介:** 向劲松(1975—),男,博士,副教授,主要从事空间光通信方面的研究。E-mail: xiangjs@cqupt.edu.cn

十多年来,出现了多种低频误差补偿方法<sup>[2-8]</sup>,其中 Xiang<sup>[5]</sup>的基于协方差及插值补偿方法的最大低频误差只有 0.1%左右。因此目前低频误差已可实现较高精度的补偿。

描述湍流高频特征的一个参数是湍流内尺度  $l_0$ ,  $l_0$  一般为几毫米。对于基于 FFT 方法的湍流相位屏,为减小高频误差的影响,一般要求采样间隔  $\Delta < l_0/2$ ,此条件下高频误差约为 1%。但该条件在许多模拟中难以满足,或在某些情况下需要研究  $l_0 \rightarrow 0$  时的湍流效应,这时就会存在较大的高频误差。尽管与低频误差相比,高频误差的影响一般比较小,以往模拟时基本忽略高频误差的影响。但在低频误差已高精度补偿的情况下,高频误差可能会成为一个大的误差源。因此对高频误差进行补偿也是具有意义的。目前有关高频误差补偿的文献很少,只有 Sedmak 提出过一种补偿方法<sup>[4]</sup>,他将空间角频率大于  $\pi/\Delta$  部分的功率谱能量直接折算到角频率小于  $\pi/\Delta$  的功率谱采样点上去,但这种方法精度较差,仍有 1% 以上的高频误差。本文提出一种高频补偿方法,先计算角频率大于  $\pi/\Delta$  的功率谱对应的自相关,再对自相关矩阵进行 FFT 运算得到各采样频率点的高频功率谱补偿值。

## 2 有限湍流外尺度及非零内尺度下平面波的相位结构函数

在相位屏模拟时,一般用相位结构函数描述模拟的准确程度,首先推导有限外尺度及非零内尺度下湍流的相位结构函数。平面波在均匀各向同性湍流大气中传输的相位结构函数为<sup>[15]</sup>

$$D_{L_0, l_0}(r) = 8\pi^2 k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(Kr)] \Phi(K) K dK, \quad (1)$$

式中  $\Phi(K)$  为湍流功率谱,  $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ ,  $K_x, K_y$  为  $x, y$  方向的空间角频率,  $k$  为向量  $(K_x, K_y)$  的模,  $J_0(\cdot)$  为零阶 Bessel 函数,  $k$  为波数,  $z$  为光波在湍流中传输的距离,  $r$  为激光传输横截面上两点之间的距离。

当考虑湍流具有外尺度  $L_0$  及内尺度  $l_0$  时,最常用的功率谱模型为<sup>[15]</sup>

$$\Phi(K) = 0.033 C_n^2 (K^2 + k_m^2)^{-11/6} \exp(-K^2/k_m^2), \quad (2)$$

式中  $k_0 = 2\pi/L_0$ ,  $k_m$  取  $2\pi/l_0$ ,  $C_n^2$  为折射率结构常数。

利用 Bessel 函数的一些积分公式<sup>[16]</sup>,将(2)式代入(1)式中进行积分。当  $L_0 \rightarrow \infty, l_0 \rightarrow 0$  时,此时的相位结构函数  $D_{L_0, l_0}(r)$  记为<sup>[17]</sup>

$$D_{\infty, 0}(r) = 2 \left[ \frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} \approx 6.8839 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3}, \quad (3)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数,  $r_0$  为 Fried 参数。根据 Fried 对  $r_0$  的定义<sup>[17]</sup>,  $r_0$  可表示为

$$r_0 = \left\{ \frac{0.033 \times 8\pi^3}{2^{8/3} \Gamma^2(11/6) [(24/5) \Gamma(6/5)]^{5/6}} k^2 C_n^2 z \right\}^{-3/5} \approx (0.4233 k^2 C_n^2 z)^{-3/5}. \quad (4)$$

当  $L_0$  为一有限值及  $l_0 \rightarrow 0$  时,记  $D_{L_0, l_0}$  为  $D_{L_0, 0}$ , 有

$$D_{L_0, 0}(r) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \pi^{-8/3} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \left[ \left(\frac{24}{5}\right) \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \times \left[ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) - 2^{1/6} (k_0 r)^{5/6} K_{5/6}(k_0 r) \right], \quad (5)$$

式中  $K_{5/6}(\cdot)$  为第三类变形 Bessel 函数。当  $L_0 \rightarrow \infty$  及  $l_0$  不为零时有

$$D_{\infty, l_0}(r) = 2 \left[ \frac{24}{5} \Gamma(6/5) \right]^{5/6} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) (k_m r_0/2)^{-5/3} \times \left[ {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -k_m^2 r^2/4\right) - 1 \right], \quad (6)$$

式中  ${}_1F_1(\cdot)$  为合流超几何函数。

湍流外尺度  $L_0$  一般约几米到几十米,内尺度  $l_0$  一般约毫米级。在  $L_0 \gg l_0$  的条件下,有限湍流外尺度及非零内尺度下的相位结构函数可近似为

$$D_{L_0, l_0}(r) \approx D_{L_0, 0}(r) - [D_{\infty, 0}(r) - D_{\infty, l_0}(r)], \quad (7)$$

当  $L_0/l_0 = 10^3$  时,该近似式的精度约在  $10^{-6}$  量级。

## 3 基于快速傅里叶变换的相位屏的准确模拟方法

本文相位屏模拟方法的主体是基于文献[5]的方法。文献[5]提出的方法可以很好地补偿低频误差,本文在此基础上进一步补偿高频误差。

设需模拟的相位屏  $\phi$  在  $x$  及  $y$  方向的网格数分别为  $M$  及  $N$  ( $M/N = 1, 2, 4, 8, \dots$ ), 屏尺寸为  $D_x$  及  $D_y$ , 空间采样间距为  $\Delta = D_x/M = D_y/N$ 。相位屏  $\phi$

分两部分产生,一部分是由 FFT 方法生成的频率较高的相位屏  $\phi_{\text{FFT}}$ ,另一部分是由协方差方法及插值生产的低频补偿相位屏  $\phi_{\text{low}}$ ,即

$$\phi = \phi_{\text{FFT}} + \phi_{\text{low}}, \quad (8)$$

式中基于 FFT 的相位屏  $\phi_{\text{FFT}}$  由(9)式生成,即

$$\phi_{\text{FFT}}(m, n) = \sum_{m'=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n'=-N/2}^{N/2-1} [R_a(m', n') + iR_b(m', n')] \times \sqrt{T_L(m', n')T_H(m', n')\Phi(m', n') + \Phi_H(m', n')} \times \exp[i2\pi(m'm/M + n'n/N)], \quad (9)$$

式中  $m, m' = -M/2, \dots, M/2-1$  分别为  $x$  方向上空域及频域采样格点的序号,  $n, n' = -N/2, \dots, N/2-1$  分别为  $y$  方向上空域及频域采样格点的序号;  $R_a(m', n')$  及  $R_b(m', n')$  为均值为 0, 方差为 1 的高斯随机数;  $\Phi(m', n')$  为离散的湍流功率谱;  $T_L(m',$

$n')$  及  $T_H(m', n')$  是为了低频及高频补偿引入的模板,主要功能是将相应位置的  $\Phi(m', n')$  置零;  $\Phi_H(m', n')$  为高频补偿的功率谱。 $\Phi(m', n')$ 、 $T_L(m', n')$ 、 $T_H(m', n')$  及  $\Phi_H(m', n')$  的表达式如下:

$$\Phi(m', n') = 0.4898r_0^{-5/3} [(m'\Delta'_x)^2 + (n'\Delta'_y)^2 + k_0^2]^{-11/6} \exp\{-[(m'\Delta'_x)^2 + (n'\Delta'_y)^2]/k_m^2\} \Delta'_x \Delta'_y, \quad (10)$$

$$T_L(m', n') = \begin{cases} 0, & |m'\Delta'_x| \leq \frac{3}{2}\Delta'_y \text{ and } |n'\Delta'_y| \leq \frac{3}{2}\Delta'_x \\ 1, & \text{else} \end{cases}, \quad (11)$$

$$T_H(m', n') = \begin{cases} 0, & [(m'\Delta'_x)^2 + (n'\Delta'_y)^2] > \pi/\Delta \\ 1, & \text{else} \end{cases}, \quad (12)$$

$$\Phi_H(m', n') = \frac{1}{MN} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} B_H[\sqrt{(m^2 + n^2)\Delta}] \exp[-i2\pi(m'm/M + n'n/N)], \quad (13)$$

式中  $\Delta'_x = 2\pi/D_x$ ,  $\Delta'_y = 2\pi/D_y$  为频域采样间隔。(11)式的低频补偿模板  $T_L(m', n')$  与文献[5]中的(3)~(5)式是等价的。(13)式中的  $B_H$  是  $T_H(m', n')\Phi(m', n')$  中未包含的高频部分功率谱的自相关,该式与(9)式一样可用 FFT 运算。高频补偿模板  $T_H(m', n')$  的引入是便于自相关矩阵  $B_H$  的计算。

根据结构函数与自相关函数的关系<sup>[3]</sup>

$$D(r) = 2[B(0) - B(r)], \quad (14)$$

并结合(1)式,可得相位自相关与功率谱的关系为

$$B(r) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty J_0(Kr) \Phi(K) K dK. \quad (15)$$

(10)式中能采样到的功率谱的最高空间角频率为  $\pi/\Delta$ 。角频率大于  $\pi/\Delta$  的湍流功率谱部分将被遗漏,引起高频误差,该部分功率谱对应的自相关函数为

$$B_H(r) = 4\pi^2 k^2 z \int_{\pi/\Delta}^\infty J_0(Kr) \Phi(K) K dK. \quad (16)$$

将(2)式代入(16)式并利用  $k^2 C_n^2 z = r_0^{-5/3}/0.4233$ ,得

$$B_H(r) = 3.0777r_0^{-5/3} \int_{\pi/\Delta}^\infty (K^2 + k_0^2)^{-11/6} \exp(-K^2/k_m^2) \cdot J_0(Kr) \cdot K \cdot dK, \quad (17)$$

(17)式一维积分可采用数值积分计算。

FFT 相位屏  $\phi_{\text{FFT}}$  的自相关的期望值可表示为

$$B_{\text{FFT}}(\sqrt{m^2 + n^2}\Delta) = \sum_{m'=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n'=-N/2}^{N/2-1} [T_L(m', n')T_H(m', n')\Phi(m', n') + \Phi_H(m', n')] \exp\left[i2\pi\left(\frac{m'm}{M} + \frac{n'n}{N}\right)\right], \quad (18)$$

(18)式同样可利用 FFT 运算。

由于 FFT 相位屏  $\phi_{\text{FFT}}$  与低频补偿相位屏  $\phi_{\text{low}}$  是独立的,因此低频补偿相位屏的自相关函数为  $B_{\text{low}}(r) = B(r) - B_{\text{FFT}}(r)$ ,再由  $D(r) = 2[B(0) - B(r)]$  可得低频补偿相位屏的自相关函数  $B_{\text{low}}$  为

$$B_{\text{low}}(\sqrt{m^2+n^2}\Delta) = B(0) - \frac{1}{2}D_{L_0, l_0}(\sqrt{m^2+n^2}\Delta) - B_{\text{FFT}}(\sqrt{m^2+n^2}\Delta). \quad (19)$$

下面采用协方差相位屏模拟方法产生自相关函数为  $B_{\text{low}}$  的低频补偿相位屏, 该方法一般只能补偿  $(D_x/2) \times (D_y/2)$  的屏。另外由于协方差方法产生的屏的网格数目很小, 无法直接生成一个大的  $(M/2) \times (N/2)$  的补偿屏。因此先产生一个低分辨率的补偿屏  $\phi_{\text{low,low}}$ 。设  $\phi_{\text{low,low}}$  的采样间隔为  $q\Delta$ ,  $x$  及  $y$  方向的网格数分别为  $M_1 = M/(2q) + 1$  及  $N_1 = N/(2q) + 1$  (本文取  $M_1 = N_1 = 9$ ), 屏尺寸为  $D_{\text{lr}} = D_x/2 + q\Delta$  及  $D_{\text{ly}} = D_y/2 + q\Delta$ 。  $\phi_{\text{low,low}}$  上任两点  $(m_1, n_1)$ 、 $(m_2, n_2)$  ( $1 \leq m_1, m_2 < M_1, 1 \leq n_1, n_2 < N_1$ ) 之间的相位自相关为

$$B_{\text{low,low}}[(m_1-1)N_{1y}+n_1, (m_2-1)N_{1y}+n_2] = B_{\text{low}}[\sqrt{(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2}q\Delta]. \quad (20)$$

对矩阵  $\mathbf{B}_{\text{low,low}}$  进行奇异值分解得到矩阵的特征向量矩阵  $\mathbf{U}$  及特征值矩阵  $\mathbf{L}$ 。于是可得低分辨率补偿相位屏

$$\phi_{\text{low,low}} = \mathbf{U} \cdot \text{Re}(\sqrt{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{X}, \quad (21)$$

式中  $\mathbf{X}$  为一长度为  $M_1N_1$  的零均值高斯随机列向量。 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{L}$  的维数为  $M_1N_1 \times M_1N_1$ 。特征值矩阵  $\mathbf{L}$  为一对角矩阵, 对角上的元素为矩阵  $\mathbf{B}_{\text{low,low}}$  的特征值  $\lambda_i$ , 由于有极少数的  $\lambda_i$  可能为负值, 为避免  $\mathbf{L}$  中负值的影响, (21) 式中有  $\text{Re}(\sqrt{\mathbf{L}})$  取实操作, 这会引入最大约 0.1% 的误差, 更详细的分析见文献[5]。

最后再对  $\phi_{\text{low,low}}$  进行 spline 插值得到一个尺寸为  $(D_x/2) \times (D_y/2)$  网格数为  $(M/2) \times (N/2)$  的低频补偿相位屏  $\phi_{\text{low}}$ 。

这里特别说明一下(19)式中  $B(0)$  的问题, 比较(5)式及(14)式, 可得  $B(0)$

$$B(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{L_0}{r_0} \right)^{5/3} \pi^{-8/3} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \left[ \left( \frac{24}{5} \right) \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right). \quad (22)$$

注意这里  $B(0)$  存在两个问题: 1) 没考虑内尺度  $l_0$  的影响; 2) 当  $L_0 \rightarrow \infty$  时,  $B(0)$  不存在。但考虑到  $B(0)$  只影响相位屏的整体平移量, 不影响相位屏的形状, 因此正常情况下  $B(0)$  的不准确对模拟精度没影响。但要注意  $B(0)$  太小时, 对矩阵  $\mathbf{B}_{\text{low,low}}$  进行奇异值分解得到的某些特征值  $\lambda_i$  可能会负得比较厉害, 使误差增大。但当  $B(0)$  增大到一定程度后,  $\lambda_i$  将趋于稳定(但仍不能完全消除负值)。另外如要模拟  $L_0 \rightarrow \infty$  的相位屏, 可用一较大的  $L_0$  值(如 1000)代入(22)式得到  $B(0)$ 。

## 4 仿真结果

先分析(17)式表示的高频功率谱对应的自相关函数  $B_{\text{H}}(r)$ 。(17)式的数值积分可采用简单的中点矩形积分方法计算, 积分上限只取到  $5k_m$  足够。积分结果如图 1 所示, 图中横坐标表示两点间相距的网格数目。从图中可见, 大于  $\pi/\Delta$  部分的高频功率谱对应的自相关函数  $B_{\text{H}}(r)$ , 其空间相关距离很小, 一般只有几倍采样间隔  $\Delta$ ; 对于更大的间距,  $B_{\text{H}}(r)$  逐渐趋于零。因此实际上不需计算所有的  $M \times N$  个  $B_{\text{H}}(r)$ , 只需计算十几到二十余个  $B_{\text{H}}(r)$  就可。如高频补偿到  $n = 5$ , 则  $n \geq 6$  的未补偿的相位结构函数最大高频误差  $[2B_{\text{H}}(6\Delta)/D_{L_0, l_0}(6\Delta)]$  就可小于 0.01%。考虑到  $B_{\text{H}}(r)$  的各向同性,  $n = 5$  时实际上需要进行积分计算的  $B_{\text{H}}(r)$  个数不超过 21 个。对于其他有实际意义的  $L_0, l_0, M, N, D_x, D_y$  等参数,  $n = 5$  也足可保证残余高频误差只有 0.01% 左右。

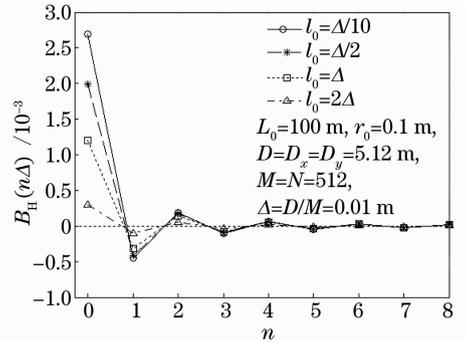


图 1 频率大于  $\pi/\Delta$  的高频功率谱对应的相位自相关  
Fig. 1 Phase autocorrelation corresponding to the power spectrum which frequency is larger than  $\pi/\Delta$

图 2 比较了本文高频补偿方法与文献[4]高频补偿方法的补偿性能。图中实线为采用本文补偿方法补偿后的相位结构函数的相对误差。点线为采用文献[4]高频补偿方法的误差(高频补偿时将角频率大于  $\pi/\Delta$  部分的功率谱能量折算到角频率为  $0.99\pi/\Delta \sim \pi/\Delta$  之间的功率谱采样点上去, 低频补偿仍采用文献[5]中的方法)。图中模拟的相位结构函数  $D_{\text{sim}}(r) = \langle [\phi(R_0+r) - \phi(R_0)]^2 \rangle$  是通过统计  $5 \times 10^6$  个相位屏边缘  $x$  方向上的相位结构函数得到的。图 2(a) 为内尺度  $l_0 = 0.001$  m 时的误差曲线, 图 2(b) 为内尺度  $l_0 = 0.01$  m 时的误差曲线。其他仿真参数为: 屏尺寸  $D_x = D_y = 5.12$  m, 网格数  $M = N = 512$ , 采样间隔  $\Delta = 0.01$  m,  $L_0 = 100$  m,  $r_0 =$

0.1 m。从图中可见,采用本文方法进行高频补偿后,在距离为  $D/2$  范围内误差只有 0.1% 左右。实际上该误差主要是由模拟的随机性引起的,如果统

计的样本数更多,该误差还会继续减小。而文献[4]的高频补偿方法,在  $l_0 \ll \Delta$  时,最大残余高频误差仍接近 1.5%,其补偿精度明显低于本文方法。

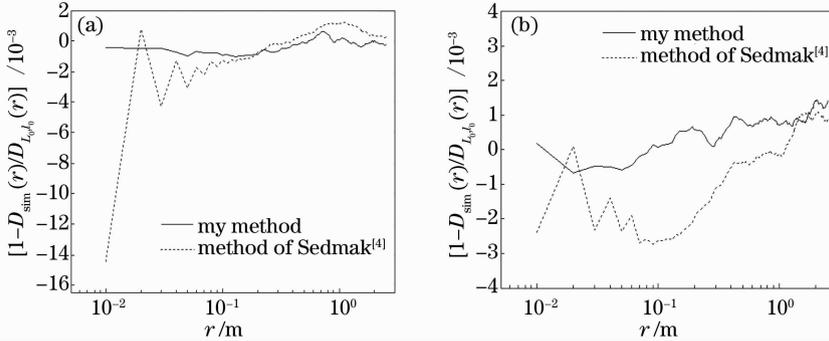


图2 模拟相位屏相位结构函数的相对误差。(a)  $l_0 = 0.001$  m; (b)  $l_0 = 0.01$  m

Fig. 2 Relative errors of the phase structure function of the simulated phase screen. (a)  $l_0 = 0.001$  m; (b)  $l_0 = 0.01$  m

## 5 结 论

标准的 FFT 湍流相位屏模拟方法中,遗漏了空间角频率高于  $\pi/\Delta$  的高频湍流成分,这引入了高频模拟误差,在高精度湍流模拟中需要补偿这部分高频误差。本文对此问题提出了一种高精度的高频误差补偿方法,使高频湍流效应的模拟更准确。对 FFT 相位屏进行高、低频补偿后的最大相位结构函数误差只有 0.1% 左右。

## 参 考 文 献

- 1 B L McGlamery. Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images [C]. SPIE, 1976, 74: 225–233.
- 2 B J Herman, L A Strugala. Method for inclusion of low-frequency contributions in numerical representation of atmospheric turbulence [C]. SPIE, 1990, 1221: 183–192.
- 3 E M Johansson, D T Gavel. Simulation of stellar speckle imaging [C]. SPIE, 1994, 2200: 372–383.
- 4 G Sedmak. Implementation of fast-Fourier-transform-based simulation of extra-large atmospheric phase and scintillation screens [J]. Appl Opt, 2004, 43(23): 4527–4538.
- 5 Jingsong Xiang. Accurate compensation of the low-frequency components for the FFT-based turbulent phase screen [J]. Opt Express, 2012, 20(1): 681–687.
- 6 Jingsong Xiang. Fast and accurate simulation of the turbulent phase screen using fast Fourier transform [J]. Opt Eng, 2014, 53(1): 016110.
- 7 R G Lane, A Glindemann, J C Dainty. Simulation of a Kolmogorov phase screen [J]. Waves in Random Media, 1992, 2(3): 209–224.
- 8 Baodong Zhang, Shiqiao Qin, Xingshu Wang. Accurate and fast simulation of Kolmogorov phase screen by combining spectral

- method with Zernike polynomials method [J]. Chin Opt Lett, 2010, 8(10): 969–971.
- 9 N Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials [J]. Opt Eng, 1990, 29(10): 1174–1180.
- 10 K A Winick. Atmospheric turbulence-induced signal fades on optical heterodyne communication links [J]. Appl Opt, 1986, 25(11): 1817–1825.
- 11 C M Harding, R A Johnston, R G Lane. Fast simulation of a Kolmogorov phase screen [J]. Appl Opt, 1999, 38(11): 2161–2170.
- 12 Wu Hanling, Yan Haixing, Li Xinyang, *et al.*. Generation of rectangular turbulence phase screens based on fractal characteristics of distorted wavefront [J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(1): 114–119.
- 吴含玲, 严海星, 李新阳, 等. 基于畸变相位波前分形特征产生矩形湍流相屏[J]. 光学学报, 2009, 29(1): 114–119.
- 13 Hua Zhili, Li Hongping. Atmospheric turbulence phase screen simulation based on random unit expansion [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(5): 0501001.
- 华志励, 李洪平. 基于随机数据元扩张的大气湍流相位屏数值模拟[J]. 光学学报, 2012, 32(5): 0501001.
- 14 Ding Xiaona, Cai Dongmei, Zhao Yuan, *et al.*. Performance of atmospheric turbulence phase screen simulation using fractal method [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(12): s113002.
- 丁晓娜, 蔡冬梅, 赵圆, 等. 分形法模拟大气湍流相位屏性能分析[J]. 中国激光, 2013, 40(12): s113002.
- 15 G C Valley. Long- and short-term Strehl ratios for turbulence with finite inner and outer scales [J]. Appl Opt, 1979, 18(7): 984–987.
- 16 I S Gradshteyn, I M Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products (7th Edition) [M]. San Diego: Elsevier Academic Press, 2007.
- 17 D L Fried. Optical heterodyne detection of an atmospherically distorted signal wave front [C]. Proc IEEE, 1967, 55(1): 57–67.

栏目编辑: 王晓琰