

热库诱导的两比特量子纠缠与量子关联

郑小兰^{1,2} 张 斌³

¹ 福建工程学院国脉信息学院, 福建 福州 350102
² 福州海峡职业技术学院信息工程系, 福建 福州 350102; ³ 福建工程学院数理系, 福建 福州 350102

摘要 对比研究了处于热库中的两量子比特的量子纠缠和量子关联随时间的演化。数值模拟的结果表明, 尽管热库几乎总能诱导两量子比特的量子纠缠与量子关联, 但二者的动力学演化并不完全相同。在与热库的相互作用中, 两比特初始形成量子纠缠, 随后纠缠逐渐消失, 两比特形成纠缠以外的量子关联并得到维持。由此看出, 相比于量子纠缠, 量子关联对消相干的影响表现得更为稳健。

关键词 量子光学; 量子关联; 数值模拟; 量子纠缠; 热库

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.0127002

Quantum Entanglement and Correlations between Two Qubits Induced by a Heat Bath

Zheng Xiaolan^{1,2} Zhang Bin³

¹ Guomai Information College, Fujian University of Technology, Fuzhou, Fujian 350102, China

² Department of Information Engineering, Fuzhou Straits Vocational and Technological College, Fuzhou, Fujian 350102, China

³ Department of Mathematics and Physics, Fujian University of Technology, Fuzhou, Fujian 350102, China

Abstract The evolutions of quantum entanglement and correlations between two qubits in a heat bath are comparatively studied. Numerical simulation results show that, although a heat bath can almost always induce the quantum entanglement and correlations between the qubits, their dynamical evolutions are not identical. During the interaction with the bath, the qubits get quantum entangled, and then the entanglement disappears gradually, and the qubits get quantum correlated beyond entanglement which can be maintained. In this sense, the quantum correlations are more robust against decoherence in comparison with quantum entanglement.

Key words quantum optics; quantum correlations; numerical simulation; quantum entanglement; heat bath

OCIS codes 270.5565; 270.5580; 270.5585

1 引 言

量子系统中存在着经典物理无法解释的关联, 它是衡量系统的量子性的重要依据。最重要的量子关联无疑是量子纠缠^[1], 它在量子信息等许多领域有着广泛的应用^[2-3]。然而, 已有研究表明, 量子关联的范围并不局限于量子纠缠^[4-5]。Ollivier 等^[5]从信息论的角度出发, 提出了量子关联的一般定义, 旨在涵盖包括量子纠缠在内的所有非经典关联。

一般认为, 系统与外界环境(热库)的相互作用正是系统的量子关联遭受破坏的根源^[6]。因此, 系

统与热库的相互作用是量子信息、量子通信等领域研究的重要课题之一^[7]。然而, 在与诸如两体系统相互作用的过程中, 热库也可能扮演使两个原本不直接相互作用的子系统耦合的媒介, 在合适的条件下, 热库的存在会使两个子系统产生量子关联(纠缠)。热库的这一特性引起了人们广泛的兴趣, 陆续在不同的开放系统模型中发现了热库的这一特性。Braun 等^[8]提出了量子系统与热库相互作用的可精确求解消相干函数的模型, 在这一模型下, 热库几乎总能诱导两比特的纠缠和关联^[9-10]。Benatti 等^[11]

收稿日期: 2013-08-13; 收到修改稿日期: 2013-09-12

作者简介: 郑小兰(1984—), 女, 硕士, 助教, 主要从事量子光学与量子信息方面的研究。

E-mail: zxl435@hotmail.com

证明了两个量子比特在马尔可夫耗散动力学下的纠缠,并给出了产生纠缠的条件,这个工作最近被 Hu 等^[12]进一步推广,给出了马尔可夫耗散动力学过程诱导两比特的量子关联的条件。此外,许多研究工作表明,玻色模热库也能够诱导两个谐振子的纠缠态^[13-15]。

本文主要研究在 Braun 的系统-热库模型下,两个量子比特与热库相互作用后两比特的量子纠缠与量子关联。通过选取不同的初态,数值模拟了比特间的纠缠与关联的动力学演化,并对二者进行分析对比。

2 理论模型

考虑处于热库中的不直接相互作用的两量子比特(将之标记为 A 比特与 B 比特),它们与热库的相互作用的哈密顿量可以表示为

$$H = H_S + H_R + H_{int}, \quad (1)$$

其中 H_S, H_R 和 H_{int} 分别表示系统、热库的自由哈密顿量和二者相互作用哈密顿量。当系统-热库作用时间远小于系统弛豫时间时,可以忽略系统本身的动力学过程(H_S)^[8],系统的密度算符仅非对角元会发生变化(消相干过程)。

假定系统与环境的相互作用哈密顿量为

$$H_{int} = (S_A + S_B) \otimes Q, \quad (2)$$

其中 $S_A(S_B)$ 与 Q 分别对应比特 A(B) 与热库的某个可观测量,两个比特 A、B 的基矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 是算符 S_A, S_B 的本征态,本征值分别为 0 和 1。进一步假定热库由 N 个处于热平衡的谐振子构成, Q 为谐振子的广义位移算符。这样, H_R 和 H_{int} 可以表示为

$$H_R = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2m} p_k^2 + \frac{1}{2} m \omega_k^2 q_k^2 \right),$$

$$H_{int} = S \sum_{k=1}^N g_k q_k, \quad (3)$$

其中 g_k 是系统与第 k 个谐振子的耦合强度, m 是谐振子的质量, p_k, q_k 和 ω_k 分别为第 k 个谐振子的广义动量、广义位移和振动频率。

当两个比特初始处于直积态,而热库处于热平衡态,温度为 T 时,系统-热库的密度算符为

$$\rho_{total}(0) = |\phi_A\rangle\langle\phi_A| \otimes |\phi_B\rangle\langle\phi_B| \otimes \frac{1}{Z} \exp[-H_R/(k_B T)], \quad (4)$$

其中 $|\phi_i\rangle$ 是比特 i 的初态, $Z = \text{tr}_R \{ \exp[-H_R/(k_B T)] \}$, k_B 是玻尔兹曼常数。通过计算可以得到,在 t 时刻,两比特的约化密度算符在子空间 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 中的

展开式为^[8]

$$\rho_{rs,uv}^{AB}(t) \equiv \langle rs | \rho^{AB} | uv \rangle = \rho_{rs,uv}(0) \exp\{-(r+s-u-v)^2 f(t) + i[(r+s)^2 - (u+v)^2] \varphi(t)\}, \quad r, s, u, v = 0, 1, \quad (5)$$

其中

$$f(t) = \sum_k \frac{g_k^2 (1 + 2\bar{n}_k)}{2m\hbar\omega_k^3} (1 - \cos \omega_k t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t s C(t-s) ds \right],$$

$$\varphi(t) = \sum_k \frac{g_k^2}{2m\hbar\omega_k^2} \left(t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) = \text{Im} \left[\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t s C(t-s) ds \right], \quad (6)$$

其中 $\bar{n}_k \equiv \{ \exp[\hbar\omega_k/(k_B T)] - 1 \}^{-1}$ 是第 k 个谐振子的平均热量子数, $C(t) = \langle Q(t)Q(0) \rangle$ 是热库的关联函数。函数 f 与 φ 分别描述在热库的影响下,两比特密度算符的非对角元的幅度衰减和相位偏移随时间的变化,显然,在较短时间内,二者都是 t 的增函数,其值取决于热库本身的特性。因此,为简单起见,以 f 和 φ 作为变量考虑系统的量子关联(纠缠)随时间的演化。

3 两比特的量子纠缠与关联

本节简要地介绍两量子比特间的纠缠与关联的度量与计算。用 ρ^{AB} 表示两个原子的密度算符,将密度算符 ρ^{AB} 对原子 B(A) 求迹,即可得到原子 A(B) 的约化密度算符,用 $\rho^A(\rho^B)$ 表示。

目前,较为常用的一种纠缠度量是形成纠缠度^[16],以衡量制备给定纠缠态所需要的资源的多少判定其纠缠程度。对于任意的两量子比特,其形成纠缠度可以利用 Concurrence 函数描述^[17],定义为

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (7)$$

其中 λ_i 是矩阵 $\zeta = \rho^A(\sigma_y \otimes \sigma_y)(\rho^A)^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ 的本征值, σ_y 是泡利矩阵, ρ^* 是 ρ 的复共轭。

本文中量子关联的度量源自 Ollivier 等^[5]的工作。他们的研究表明,将经典互信息的两个等价表达式推广至量子系统后一般不再相同,二者之差(即失谐)可以作为系统的所有量子关联(包括量子纠缠)的度量。量子关联的 Discord 函数定义为

$$D = S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) + \min_{\Pi_j^B} \left[\sum_j P_j S(\rho^A | \Pi_j^B) \right], \quad (8)$$

其中 $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$ 是冯·诺伊曼熵, $\Pi_j^B = |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ 是 B 比特的一组完备投影测量算符, $\rho^A |\Pi_j^B = (I^A \otimes \Pi_j^B) \rho^{AB} (I^A \otimes \Pi_j^B) / \text{tr}[(I^A \otimes \Pi_j^B) \rho^{AB} (I^A \otimes \Pi_j^B)]$, $P_j = \text{tr}[(I^A \otimes \Pi_j^B) \rho^{AB} (I^A \otimes \Pi_j^B)]$, I^A 为 A 比特的单位算符。为了得到 D 的值, 必须寻找最佳的投影算符使(8)式最后一项的值最小。

4 数值结果与讨论

令 A、B 比特初始都处于量子叠加态:

$$|\phi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$$|\phi_B\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (9)$$

其中 α, β 都为实数。根据(5)式, 两比特随时间演化的密度矩阵为

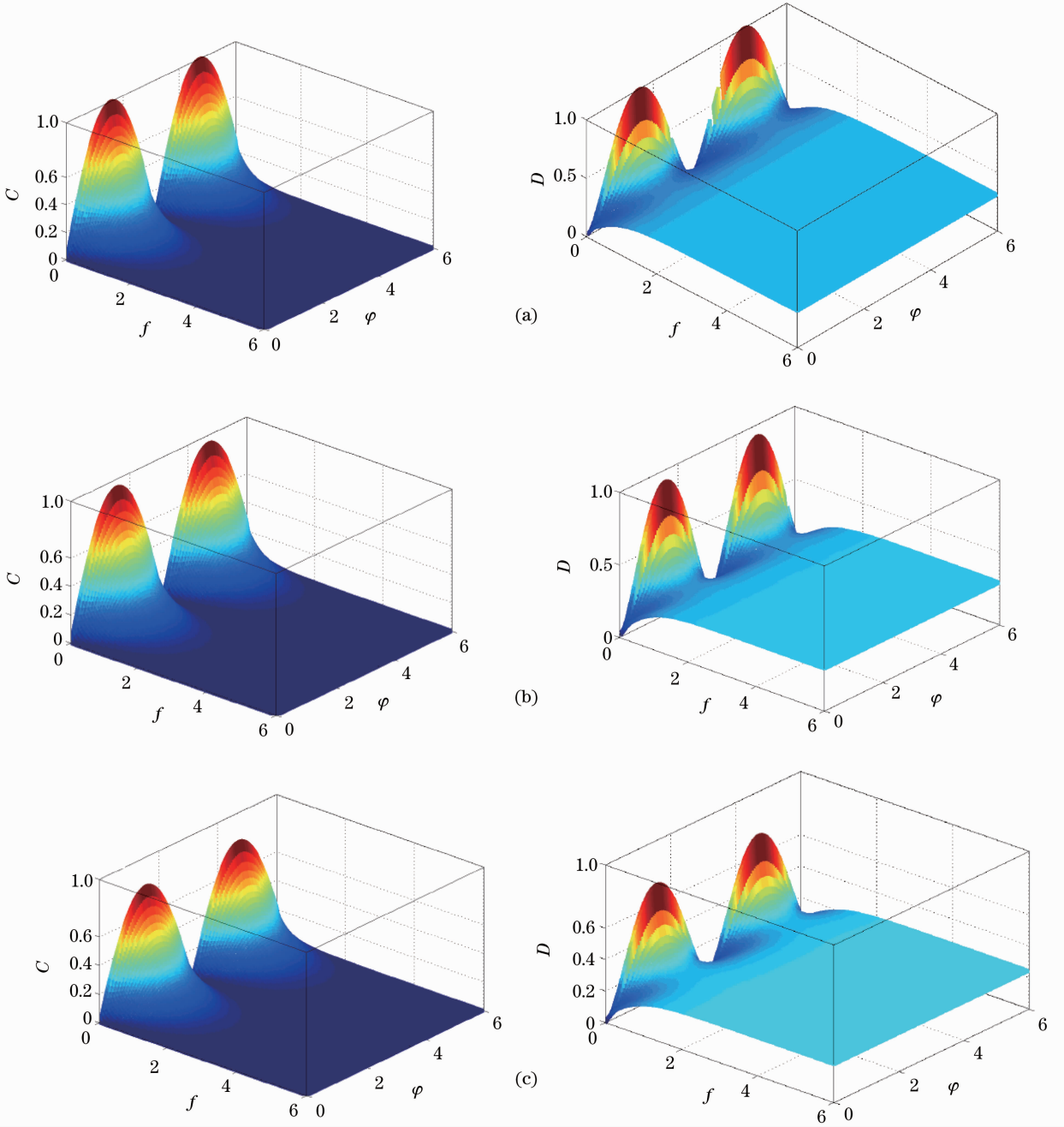


图 1 α 分别取(a) $1/\sqrt{2}$, (b) $1/\sqrt{3}$ 和(c) $1/\sqrt{5}$ 时, Concurrence(左)和 Discord(右)函数随 f, φ 的演化

Fig. 1 Concurrence (left) and Discord (right) as functions of f and φ when α is (a) $1/\sqrt{2}$,

(b) $1/\sqrt{3}$ and (c) $1/\sqrt{5}$, respectively

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2} & \frac{\alpha\beta}{2}\exp(-f-i\varphi) & \frac{\alpha^2}{2}\exp(-f-i\varphi) & \frac{\alpha\beta}{2}\exp(-4f-4i\varphi) \\ \frac{\alpha\beta}{2}\exp(-f+i\varphi) & \frac{\beta^2}{2} & \frac{\alpha\beta}{2} & \frac{\beta^2}{2}\exp(-f-3i\varphi) \\ \frac{\alpha^2}{2}\exp(-f+i\varphi) & \frac{\alpha\beta}{2} & \frac{\alpha^2}{2} & \frac{\beta^2}{2}\exp(-f-3i\varphi) \\ \frac{\alpha\beta}{2}\exp(-4f+4i\varphi) & \frac{\beta^2}{2}\exp(-f+3i\varphi) & \frac{\beta^2}{2}\exp(-f+3i\varphi) & \frac{\beta^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由(10)式可以看出函数 f 与 φ 对系统算符的多数非对角元 (ρ_{23}, ρ_{32} 除外) 幅度和相位的影响。调整 α, β 的权重, 数值模拟相应系统的量子纠缠度 Concurrence 函数与量子关联度 Discord 函数随 f 与 φ 的演化, 结果如图 1 所示。

从图 1 可以看到, 当 f 取较小值时, D 与 C 的动力学演化基本相同, 热库总是可以诱导两原子的关联(纠缠), 其大小随 φ 呈周期性变化。在 $f \rightarrow 0$ 且 $\varphi = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ 时, 原子间达到最大的关联(纠缠)度。在这种条件下, 热库诱导两比特关联(纠缠)是因为在 f 取较小值时, 系统的密度矩阵[(10)式]的各个非对角元的相移 φ 的系数与基矢的本征值呈现非线性关系[见(5)式], 这些相移无法简单地通过定域的比特相位操纵消除。这样, 当 f 很小时, 两个量子比特通过与环境的耦合建立起非定域的量子关联。容易证明, 当 $f = 0$ 时, 两量子比特处于纯态, 比特间的量子关联实际上就是量子纠缠。这也是 D 与 C 的动力学演化在 f 取较小值时基本一致的原因。此外, 原子的关联与 α, β 的相对权重有关。对比图 1(a) ~ (c) 可以明显看到, 在 f 与 φ 取相同值时, 随着 $\alpha/\beta \rightarrow 1$, 比特间的关联程度越来越高。这是因为当 $\alpha/\beta \rightarrow 1$ 时, 密度矩阵许多非对角元的值(正比于 $\alpha \times \beta$) 相应地增大, 从而可能产生更大的关联。

有趣的是, 当 f 较大时, D 与 C 的动力学演化完全不同。这时, 两原子的纠缠度 C 始终是 f 的减函

数, 并且迅速下降为 0; 相反, 两原子的量子关联 D 却是 f 的增函数, 且随着 f 的增大最终趋于一个稳定值。因此, 原子间产生了无纠缠的量子关联, 并在系统-热库的相互作用过程中得到维持。这种现象是由于(10)式所示的系统的密度矩阵包含两个不随时间变化的非对角元, 即 ρ_{23} 和 ρ_{32} , 把它们称作无消相干非对角元。当 f 很大时, 系统的密度矩阵可以写成

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{2} & \frac{\alpha\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{2} & \frac{\alpha^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其纠缠度 Concurrence 函数表达式为

$$C = 2\max\{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\}. \quad (12)$$

通过简单计算可以发现, (11)式所示的密度矩阵的纠缠度为 0, 因此两个比特并不处于纠缠态。而判断系统是否具有量子关联, 可以借助文献[10]给出的判据: 在子空间 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 中展开的任意两比特密度矩阵, 要使两比特间的量子关联为零, 当且仅当

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\rho_{13}) + \text{Re}(\rho_{24}) & \text{Re}(\rho_{14}) + \text{Re}(\rho_{23}) & -\text{Im}(\rho_{14}) + \text{Im}(\rho_{23}) & \text{Re}(\rho_{13}) - \text{Re}(\rho_{24}) \\ -\text{Im}(\rho_{13}) - \text{Im}(\rho_{24}) & -\text{Im}(\rho_{14}) - \text{Im}(\rho_{23}) & -\text{Re}(\rho_{14}) + \text{Re}(\rho_{23}) & -\text{Im}(\rho_{13}) + \text{Im}(\rho_{24}) \\ \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44}) & \text{Re}(\rho_{12}) - \text{Re}(\rho_{34}) & -\text{Im}(\rho_{12}) + \text{Im}(\rho_{34}) & \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} + \rho_{44}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

的秩为 1。将(11)式中的矩阵元代入(13)式, 可以发现相应 \mathbf{S} 的第二列为 $\mathbf{S}_2 = (\rho_{23}, 0, 0)^T$, 第三列为 $\mathbf{S}_3 = (0, \rho_{32}, 0)^T$, 二者显然是线性独立的。因此, 由于去消相干非对角元的存在, 两个比特间形成非纠

缠的量子关联。

综合上面的结果可知, 在这个系统-热库相互作用模型中, 热库初始诱导两量子比特形成量子纠缠态, 之后随着时间的推移, 比特间的量子纠缠逐渐消

失,形成稳定的非纠缠的量子关联。结果还表明,量子关联是包含量子纠缠而涵盖范围更广的非经典关联;相比于纠缠,在与热库的相互作用中系统的量子关联表现得更为稳健。

5 结 论

研究了热库诱导的两个量子比特的量子纠缠与量子关联的动力学演化。数值模拟结果表明:热库总是可以诱导两比特量子关联(纠缠),在相互作用过程中,初始两比特形成量子纠缠,随后纠缠逐渐消失,形成非纠缠的量子关联并趋于稳定;在整个过程中,相比于量子纠缠,量子关联表现得更为稳健。此研究对于量子光学、量子信息以及开放系统等领域的研究有一定意义。

参 考 文 献

- 1 R Horodecki, P Horodecki, M Horodecki, *et al.*. Quantum entanglement [J]. *Rev Mod Phys*, 2009, 81(2): 865–942.
- 2 Liao Qinghong, Liu Ye, Jia Shulei. Study of entanglement sudden death between two atoms in the one-photon and two-photon Jaynes-Cummings models [J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(6): 0618001.
廖庆洪, 刘 晔, 贾书磊. 单光子和双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子间纠缠突然死亡的研究[J]. *中国激光*, 2012, 39(6): 0618001.
- 3 Yan Zhihui, Jia Xiaojun, Su Xiaolong, *et al.*. Continuous variable multi-color entangled optical fields [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2013, 50(8): 080007.
闫智辉, 贾晓军, 苏晓龙, 等. 连续变量多色纠缠态光场[J]. *激光与光电子学进展*, 2013, 50(8): 080007.
- 4 L Henderson, V Vedral. Classical, quantum and total correlations [J]. *J Phys A*, 2001, 34(35): 6899–6905.

- 5 H Ollivier, W H Zurek. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 88(1): 017901.
- 6 H P Breuer, F Petruccione. *The Theory of Open Quantum System* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002. 109–117.
- 7 Liu Zhiquan, Yan Kezhu, Wang Jisuo. General non-Markov effect of open cavity system coupled to a reservoir [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(8): 0827001.
刘志泉, 闫珂柱, 王继锁. 开放腔场与热库耦合的非马尔科夫效应[J]. *光学学报*, 2013, 33(8): 0827001.
- 8 D Braun, F Haake, W T Strunz. Universality of decoherence [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 86(14): 2913–2917.
- 9 D Braun. Creation of entanglement by interaction with a common heat bath [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(27): 277901.
- 10 B Zhang, Z R Zhong. Quantum correlation between two qubits induced by a common heat bath [J]. *Phys Lett A*, 2012, 376(45): 3021–3025.
- 11 F Benatti, R Floreanini, M Piani. Environment induced entanglement in Markovian dissipative dynamics [J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 91(7): 070402.
- 12 X Y Hu, Y Gu, Q H Gong, *et al.*. Necessary and sufficient condition for Markovian-dissipative-dynamics-induced quantum discord [J]. *Phys Rev A*, 2011, 84(2): 022113.
- 13 J H An, W M Zhang. Non-Markovian entanglement dynamics of noisy continuous-variable quantum channels [J]. *Phys Rev A*, 2007, 76(4): 042127.
- 14 J P Paz, A J Roncaglia. Dynamics of the entanglement between two oscillators in the same environment [J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 100(22): 220401.
- 15 T Zell, F Queisser, R Klesse. Distance dependence of entanglement generation via a bosonic heat bath [J]. *Phys Rev Lett*, 2009, 102(16): 160501.
- 16 C H Bennett, D P DiVincenzo, J Smolin, *et al.*. Mixed-state entanglement and quantum error correction [J]. *Phys Rev A*, 1996, 54(5): 3824–3851.
- 17 W K Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80(10): 2245–2248.

栏目编辑: 史 敏