

基于 L^1 范数和曲波系数双约束的稀疏角度 微分相位衬度计算机层析成像重建方法

李梦婕 李 镜 孙 怡

(大连理工大学信息与通信工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要 微分相位衬度计算机层析成像法(DPC-CT)是一种新的 X 射线无损检测方法。与传统方法相比,该方法在检测弱吸收物质时优势明显。但 DPC-CT 技术需要进行多次扫描后才能获取足够的样品信息,这必将导致很长的辐射时间和巨大的辐射剂量。因此,研究在稀疏角度条件下的 DPC-PC 重建算法就显得尤为重要。分析了 DPC-CT 的特点,在凸集投影(POCS)的理论框架下,将 L^1 范数、曲波系数约束和经典的代数迭代算法(ART)相结合提出了一种适合 DPC-CT 的重建算法。数值模拟和实验的结果表明,该方法可以根据少量投影数据获得较好的重建结果。

关键词 成像系统;微分相位衬度计算机层析成像;稀疏表达;凸集投影法; L^1 范数;曲波变换

中图分类号 O434.19 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201434.0111003

Sparse Angular Differential Phase-Contrast Computed Tomography Reconstruction Using L^1 -Norm and Curvelet Constraints

Li Mengjie Li Jing Sun Yi

(School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract Differential phase contrast computed tomography (DPC-CT) is a novel X-ray inspection method which has obvious advantage in detecting weak absorption substance compared with conventional CT reconstruction methods. However, DPC-CT usually need to scan many times in order to obtain enough refraction angle information, which leads to unacceptably long exposure time and huge X-ray doses. Thus, the study of sparse angular DPC-CT reconstruction algorithm is particularly important. After analyzing the characteristics of the DPC-CT. Based on the theoretical framework of projection on convex set (POCS), a reconstruction algorithm for DPC-CT is proposed by combining L^1 norm, curvelet coefficient constraint and dassical algebra reconstruction technique (ART). The numerical simulation and experimental results show that the proposed algorithm can significantly improve the image quality of the sparse angular DPC-CT reconstructions.

Key words imaging systems; differential phase-contrast computed tomography; sparse expression; projection on convex set; L^1 -norm; curvelet

OCIS codes 110.6955; 100.3010; 100.6950; 200.3050; 040.7480

1 引 言

对于弱吸收物质, X 射线相衬成像方法使用折射信息,而不是衰减信息作为成像信号,这样可以提供更加丰富的关于物体内部结构的信息。到现在为

止, X 射线相衬成像技术已经发展出 4 大类方法:干涉成像法、衍射增强成像法(DEI)、相位传播法和光栅成像法。在这些方法中,后两种方法的优势在于它们都可以采用宽带非单色光源,而前两种方法则

收稿日期: 2013-07-26; 收到修改稿日期: 2013-08-16

基金项目: 国家自然科学基金(61071210)

作者简介: 李梦婕(1989—),女,硕士研究生,主要从事图像处理方面的研究。E-mail: lmjmengl@126.com

导师简介: 孙 怡(1964—),女,博士,教授,主要从事光电信息检测、图像处理与模式识别等方面的研究。

E-mail: lslwf@dlut.edu.cn(通信联系人)

对射线的平行性与相干性要求非常高。但相较于光栅成像法,相位传播法对光源的空间相干性有较高的要求,因此被局限于功率较低的微焦点源,光栅成像法较好地解决了这个问题,显示出较强的应用前景。干涉成像法可以测量 X 射线的相位分布,相位传播法可以测量 X 射线相位的二阶梯度分布,衍射增强成像法和光栅成像法则可以测量 X 射线相位的一阶梯度分布。因此,衍射增强成像法和光栅成像法常被统称为微分相位衬度 (DPC) 成像法,而基于这两种成像方法的计算机断层成像 (CT) 技术称为 DPC-CT。无论是 DEI 还是光栅成像法所得到的都不是直接的相位信息,而是包含相位信息的投影像,均需要对物体进行多次扫描,通过信息分离方法来得到相位的一阶导数信息,而此过程必将导致极大的辐射剂量与过长的辐射时间。因此研究稀疏角度下的重建算法对 DPC-CT 有着重要意义。目前,DPC-CT 重建算法大致可分为两大类,第一类算法主张恢复出物体的相位项 $\delta^{[1-2]}$,第二类算法主张恢复出相位项梯度 $\nabla\delta^{[3-4]}$,本文针对第二类算法展开研究。

与传统 CT 类似,DPC-CT 也可以归结为求解线性方程组的问题。在稀疏角度条件下,由于数据量的缺失,观测数据个数远小于待恢复的像素个数。此时,满足该方程组的解有无穷多个,而待重建图像只是这些解中的一个。因此,往往需要加入恰当的约束条件,从满足方程组的解当中选择一个满足约束条件的解。或者说需要将该问题归结为约束优化问题。基于集合理论的凸集投影法 (POCS)^[5] 是约束优化问题的一个著名方法,这种理论将观测数据一致性以及其他约束条件视为若干集合,解空间就是这些集合的交集。值得一提的是,约束条件往往需要根据具体问题的特点选择。众所周知,在图

像处理领域,小波变换因具备良好的多分辨率特性、时频局域性以及光滑奇异性函数的最优逼近性等特征而得到了广泛的应用。然而在大多数情况下,函数的奇异性(边缘不连续的线状特征)不仅仅是点奇异,更多的则表现为线奇异、面奇异。在这种情况下,小波变换已不能精确地表达图像边缘线段的方向及线状特征等,因此小波变换会在边缘或细节位置出现模糊。为了提取高维函数的奇异性这类有效信息,Candes 等^[6-7] 利用多尺度几何分析的思想,相继提出了第一代和第二代曲波,并构造了曲波的紧框架,对于具有光滑奇异性曲线的目标函数,曲波变换提供了稳定的、高效的和近乎最优的表示,可以有效地区分曲线和噪声^[8-9]。本文根据 DPC-CT 的特点,将 L^1 范数约束和曲波变换系数约束作为约束条件,结合经典的代数迭代算法 (ART) 提出了适用于相位项梯度 $\nabla\delta$ 重建的 ART- L^1 -Curvelet 算法。仿真和实验结果证明了在均方误差意义下 ART- L^1 -Curvelet 算法的重建精度优于 ART 和基于 L^1 范数约束的代数迭代算法 (ART- L^1),能更好地重建图像边缘,消除斑点状噪声,在相同的迭代次数下拥有比 ART- L^1 算法^[10] 更好的重建效果,但曲波变换消耗了大量的时间,重建时间大于 ART- L^1 算法。

2 数学物理模型

通过二维空间模型来说明微分相位衬度的成像模型,如图 1(a) 所示。图中 x - o - y 为固定坐标系; x_r - o - y_r 为旋转坐标系;X 射线的传播方向为 x_r 轴正方向; ϕ 为射线与 x 轴正方向的夹角; θ 为射线穿过物体后在二维平面内的折射角; $\delta(x, y)$ 函数代表物体相位项在二维平面 x - o - y 上的分布函数。

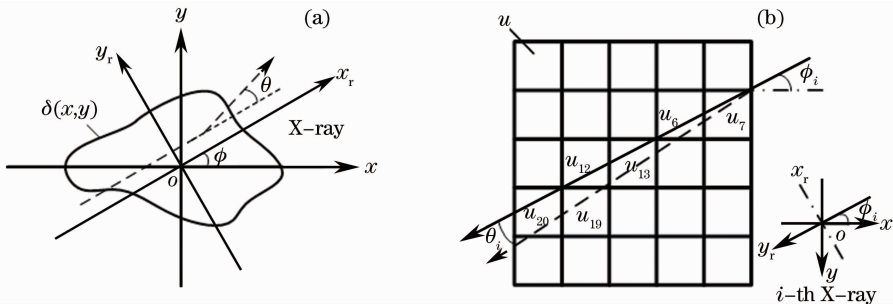


图 1 折射作用示意图。(a) 连续域; (b) 离散域

Fig. 1 Sketch of the refraction. (a) Continuous domain; (b) discrete domain

物体对 X 射线的折射和吸收可由复合折射率 $n = 1 - \delta + i\beta$ 来描述,其中 δ 称为相位项, β 称为吸收

项。根据图 1(a) 所示的几何关系,X 射线经过物体后的折射角 θ 与相位项梯度 $\nabla\delta$ 的关系可归结为

$$\theta = \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y_r} dx_r = \frac{\partial \int \delta(x, y) dx_r}{\partial y_r}. \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = x_r \sin \phi + y_r \cos \phi \\ x = x_r \cos \phi - y_r \sin \phi \end{cases} \quad (2)$$

同时,根据图 1 所示的几何关系可得

将(2)式代入(1)式可得

$$\begin{cases} \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y} dx_r = \sin \phi \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x_r} dx_r + \cos \phi \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y_r} dx_r \\ \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} dx_r = \cos \phi \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x_r} dx_r - \sin \phi \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y_r} dx_r \end{cases}, \quad (3)$$

式中 $\partial \delta(x, y) / \partial x_r$ 表示相位项沿 x_r 方向的梯度,如果将空气的折射系数认为是 0,则

$$\int \partial \delta(x, y) / \partial x_r dx_r \equiv 0. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式化简后,可得

$$\begin{cases} \theta \cos \phi = \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y} dx_r \\ \theta \sin \phi = - \int \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} dx_r \end{cases}. \quad (5)$$

以相位项梯度 $\nabla \delta$ 为目标的重建算法是以(5)式为基础的。将相位项水平方向的梯度 $\partial \delta(x, y) / \partial x$ 的相反数作为待重建图像 u ,将折射角 $\theta \sin \phi$ 作为测量值 p ,二维平面离散化的待重建物体,如图 1(b)所示,根据(5)式中水平方向的梯度公式可知,第 i 条射线穿过物体后的折射角 θ_i 满足

$$\theta_i \sin \phi_i = \sum_t^T r_{i,t} u_t, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (6)$$

式中 ϕ_i 为射线与 x 轴的夹角; u_t 为待重建图像的第 t 个像素; I 为射线总个数; T 为像素值总个数;如果射线 i 穿过像素 t , $r_{i,t}$ 为 1,否则为 0。由于在实际运用中,测量误差和噪声无法避免,故在考虑存在误差 e 的情况下,(6)式可用矩阵表示为

$$p = R \cdot u + e, \quad (7)$$

式中 e 为误差向量, R 为投影矩阵,定义为

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,T} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{I,1} & r_{I,2} & \cdots & r_{I,T} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

3 算法原理

3.1 算法原理

本文将(7)式的解集表示为

$$C_0 = \{u \mid \|p - R \cdot u\|_2^2 < \xi_0\}, \quad (9)$$

式中 ξ_0 为反映误差的门限参数。在稀疏角度条件下,由于数据量的缺失,观测数据个数往往远小于待重建图像的像素个数。此时,集合 C_0 中符合要求的

解往往有无穷多个,而待重建图像只是这些解中的一个。若要从这些解中找出待重建图像,则需要增加约束条件。

与光学图像不同,物体的断层图像的像素取决于该位置的材质,而相同材质的物质总是聚集在一起的,因此,如果用 $\nabla \delta$ 代表断层图像的边沿,则 $\nabla \delta$ 具有良好的稀疏性。众所周知, L^1 范数是求解稀疏信号时常见的约束条件。本文用集合的形式,将该约束条件表示为

$$C_1 = \{u \mid \|u\|_1 < \xi_1\}, \quad (10)$$

式中 ξ_1 为 L^1 范数的门限参数。

$\nabla \delta$ 通常表现为若干曲线,但 L^1 范数只能保证重建出的图像是稀疏的,不能保证非零像素点可以连接成曲线。曲波变换是一种对描述图像中曲线有着相当强表达能力的变换方法,与小波变换相比,曲波变换中的曲波基具有方向性,对于表达具有方向性的曲线有着无可比拟的稀疏优越性。第一代曲波变换利用了脊波变换的相关知识,而第二代曲波变换主要在频域进行,在频域中通过快速算法^[11]来得到曲波系数的频域表达式。2005年,Candes等^[11]提出了两种快速离散曲波变换算法,即非等距快速傅里叶变换(USFFT)算法和频域装配(FW)算法,并证明了频域装配算法在计算速度等方面优于非等距快速傅里叶变换算法,因此,本文选用频域装配算法。

空域曲波基 $\varphi_{j,l}(k_1, k_2)$ 都是由尺寸参数 j 、表示方向的角度参数 l 和空间坐标 (k_1, k_2) 这三个参量来标定的。图 2(a) 为一个在固定尺度 j 和方向角度参数 l 范围内的曲波基 $\varphi_{j,l}(k_1, k_2)$ 的示意图,图 2(b) 为傅里叶域中的 $\varphi_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$ 。由图 2(a) 可见,离散曲波基 $\varphi_{j,l}(k_1, k_2)$ 具有明显的方向性:当曲波基 $\varphi_{j,l}(k_1, k_2)$ 与曲线 q 大体重合时,如图 2(c) 所示,快速算法得出的曲波系数 $c_{j,l}(k_1, k_2)$ 是一个幅值比较大的数;否则,如图 2(d) 所示,系数 $c_{j,l}(k_1, k_2)$ 是一个接近于 0 的数。因此,用非常少的曲波系

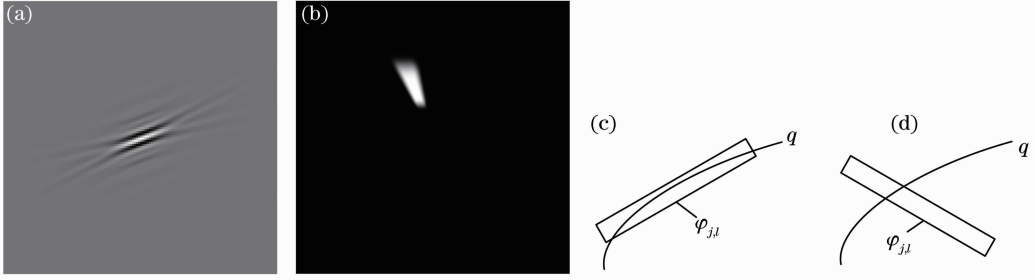


图 2 曲波基和稀疏表达。(a)时域中的曲波基；(b)频域中的曲波基；(c)和(d)为曲波基对曲线的表达
Fig. 2 Curvelet and sparse representation. (a) Curvelet in spatial domain; (b) curvelet in frequency domain;
(c) and (d) denote the expressions of a curve using curvelets

数就可以较好地表达一条曲线^[11-12]。

图像 \mathbf{u} 的曲波变换系数向量 \mathbf{c} 也具有非常好的稀疏性。将曲波系数作为约束条件,用集合形式表示为

$$C_2 = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{c}\|_1 < \xi_2, \mathbf{c} = F_{\text{Curvelet}}(\mathbf{u})\}, \quad (11)$$

式中 ξ_2 为曲波变换系数的门限参数, F_{Curvelet} 为曲波变换算子。

考虑(9)~(11)式所示的三个条件,在稀疏角度的微分相位衬度领域,可以将集合 C_0 、 C_1 和 C_2 的交集 $C_0 \cap C_1 \cap C_2$ 认为是可行解的集合。至此,本文将 DPC-CT 重建问题归结为如何求交集 $C_0 \cap C_1 \cap C_2$ 的问题。不失一般性,假定向凸集 C_0 、 C_1 和 C_2 对应投影的算子分别为 F_0 、 F_1 和 F_2 。根据 POCS 算法可知, C_0 、 C_1 和 C_2 的交集可通过下式所示的迭代过程求解:

$$\mathbf{u}^n = F_2 F_1 F_0(\mathbf{u}^{n-1}), \quad (12)$$

式中 n 为迭代次序;算子 F_0 、 F_1 和 F_2 可以理解为一种映射关系,将当前解 \mathbf{u}^{n-1} 映射到相应的集合 C_0 、 C_1 和 C_2 内。而本文通过设定在对应算子 F_0 、 F_1 和 F_2 中的门限参数 $\bar{\xi}_0$ 、 $\bar{\xi}_1$ 和 $\bar{\xi}_2$ 来求得交集的可行解,使之满足在集合 C_0 、 C_1 、 C_2 中参数 ξ_0 、 ξ_1 和 ξ_2 对集合的约束要求。

3.2 算法流程

F_0 、 F_1 和 F_2 的构造方式有很多,本文将凸集映射 F_0 选择为经典的 ART 算法,凸集映射 F_1 通过最速下降法实现,凸集映射 F_2 由阈值法实现,曲波变换通过装配算法^[11]实现。综上所述,本文提出的 ART- L^1 -Curvelet 算法的流程如下:

1) 设定迭代初始值

$$\mathbf{u}^0 = 0, n = 1. \quad (13)$$

2) 执行 ART 迭代,该步骤对应于映射 F_0 ,即

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n-1},$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^* + \mathbf{r}_m \frac{\mathbf{p}_m - \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{u}^*}{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_m}, m = 1, 2, \dots, I, (14)$$

式中 m 为 ART 迭代次序,向量 \mathbf{r}_m 为投影矩阵的第 m 行, \mathbf{p}_m 为向量 \mathbf{r}_m 对应的观测值, I 为观测数据总个数(即每个角度下的射线总数),迭代截止参数 $\bar{\xi}_0$ 由迭代总次数 N 代替。

3) 由梯度下降法在 \mathbf{u}^* 的某个邻域内搜索 L^1 范数最小的解,该步骤对应于映射 F_1 ,即

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^*,$$

$$\text{While } \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_1 < \bar{\xi}_1,$$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^n - \eta \cdot \frac{\partial \|\mathbf{u}\|_1}{\partial \mathbf{u}},$$

end,

(15)

式中 $\bar{\xi}_1$ 为搜索半径, η 为迭代步长。如果搜索半径 $\bar{\xi}_1$ 选择过大,则步骤 3) 的搜索结果 \mathbf{u}^n 有可能不满足(10)式中的约束条件,反之,则 L^1 范数对图像的约束作用很难体现出来。当 $\lambda = 0$ 时,算法将退化为经典的 ART 算法。在迭代初期,图像矢量 \mathbf{u}^* 与真实值的差距较大,应当给予一个比较大的搜索半径 $\bar{\xi}_1$ 以增大 L^1 范数对图像的约束。随着迭代的进行,逐步逼近精确解,此时应减小搜索半径 $\bar{\xi}_1$ 。换句话说,搜索半径 $\bar{\xi}_1$ 应当在迭代过程中自适应地调整。在迭代总次数 N 预先设定的情况下, $\bar{\xi}_1$ 的自适应调整方式为

$$\bar{\xi}_1(n) = \sigma \cdot (1 - \frac{n}{N}) \|\mathbf{u}^*\|_1, \quad (16)$$

式中 $0 < \sigma < 1$, σ 应当根据经验选择,建议该参数取为略小于 1 的数值,本文将 σ 设定为 0.9。

针对步长 η ,选择方式可表示为

$$\eta = 0.1 \times \|\mathbf{u}^*\|_1 / J, \quad (17)$$

式中 $\|\mathbf{u}^*\|_1 / J$ 表示图像矢量 \mathbf{u}^* 所有像素绝对值的平均值。

4) 采用频域装配算法^[11]对 \mathbf{u}^n 进行曲波变换,将曲波系数 \mathbf{c} 中元素模的最大值记为 c_{\max} 。频域装配算法的主要流程如下:

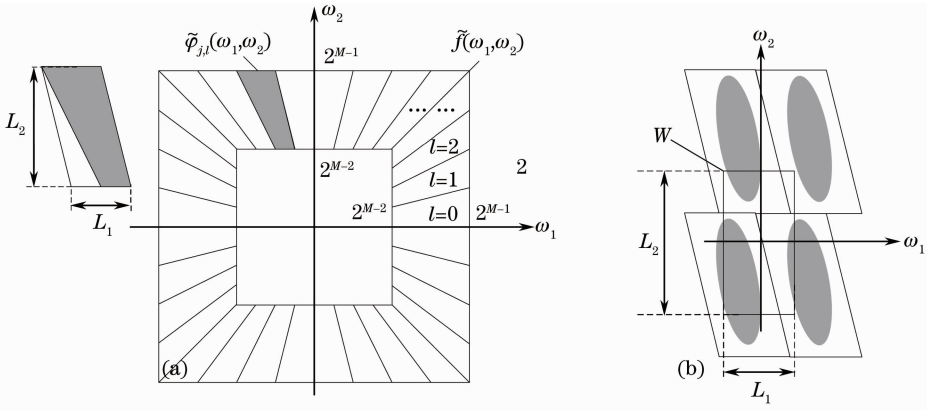


图 3 频域装配算法示意图。(a)同心方；(b)装配过程

Fig. 3 Sketch of frequency-frapping algorithm. (a) Concentric squares; (b) wrapping

① 将原大小为 $N \times N$ 的图像 f 进行二维快速离散傅里叶变换, 得到在傅里叶域的采样系数 $f(\omega_1, \omega_2)$, 其中 $-\frac{N_0}{2} < \omega_1 < \frac{N_0}{2}$, $-\frac{N_0}{2} < \omega_2 < \frac{N_0}{2}$, $N_0 = 2^m$, $N_0/2 = 2^{m-1}$ 。

② 对每一个固定尺度参数 j 和角度参数 l 条件

下的傅里叶系数 $f(\omega_1, \omega_2)$ 进行加窗运算, 设加窗后的结果为 $\hat{f}_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$, $\hat{f}_{j,l}(\omega_1, \omega_2) = \bar{\varphi}_{j,l}(\omega_1, \omega_2) f(\omega_1, \omega_2)$, 其中, 楔形频域窗 $\bar{\varphi}_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$ 的形状如图 3(a) 中灰色阴影区域所示, 其具体的构造方法为

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{j,l,k}(\omega_1, \omega_2) &= \exp(-i\langle \bar{b}_k^{j,l}, \omega \rangle) 2^{-3j/4} W(2^{-j}\omega_1) V(2^{[j/2]}\omega_2/\omega_1 - l), \\ 2^{j-1} &\leq \omega_1 \leq 2^{j+1}, \quad -2^{[j/2]} \cdot \frac{2}{3} \leq \omega_2/\omega_1 \leq 2^{[j/2]} \cdot \frac{2}{3}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\bar{b}_k^{j,l} = [\mathbf{S}_\theta^{-1}]_{j,l}^T(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-[j/2]})$ 表示 $\bar{\varphi}_{j,l,k}(\omega_1, \omega_2)$ 对应在空中中的位置, $k = (k_1, k_2)$, $[j/2]$ 表示取最接近且小于等于 $j/2$ 的整数, 剪切矩阵 $\mathbf{S}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{S}_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix}$, 旋转角度 $\theta_{j,l} = 2\pi \cdot 2^{-[j/2]} \cdot l$, $l = -2^{[j/2]}, -2^{[j/2]} + 1, \dots, 2^{[j/2]} - 1$, 角度窗 $V(x)$ 和半径窗 $W(x)$ 的构造函数为^[13]

$$V(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/3 \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}\gamma(3|x|-1)\right], & 1/3 < |x| \leq 2/3, \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (19a)$$

$$W(x) = \begin{cases} \cos\left[\frac{\pi}{2}\gamma(5-6x)\right], & 2/3 \leq x \leq 5/6 \\ 1, & 5/6 < x \leq 4/3, \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}\gamma(3x-4)\right], & 4/3 < x \leq 5/3 \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \quad (19b)$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad \gamma(x) + \gamma(1-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (19c)$$

③ 对加窗运算后的数据 $\hat{f}_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$ 进行周期延拓, 过程如图 3(b) 所示, 得到包装后的数据

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j,l}[n_1, n_2] &= W\hat{f}_{j,l}[n_1, n_2] = \\ &\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{j,l}[n_1 + m_1 \cdot L_{1,j}, n_2 + m_2 \cdot L_{2,j}], \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $0 < n_1 < L_{1,j}$, $0 < n_2 < L_{2,j}$ 。

④ 在以原点为中心的矩形 $[L_{1,j}, L_{2,j}]$ 范围内运用二维快速离散傅里叶逆变换, 得到离散曲波变换系数 $c_{j,l}(k_1, k_2)$ 。

⑤ 遍历所有的尺度参数 j 和角度参数 l 即可得到原图像的所有曲波系数。

5) 对曲波系数进行修正,此步骤对应于映射 F_2 , 即

$$c(k) = \begin{cases} c(k), & |c(k)| \geq \bar{\xi}_2 \cdot c_{\max}, \\ 0, & \text{else} \end{cases}, k = 1, 2, \dots, K, \quad (21)$$

式中 k 为曲波系数向量 c 中元素的次序; $\bar{\xi}_2$ 为大于 0 且小于 1 的参数, 需根据经验选择, 自适应选择方式可表示为

$$\bar{\xi}_2 = 0.05 \times \left(1 - \frac{n}{N}\right). \quad (22)$$

6) 使用修正后的曲波系数 c 执行逆曲波变换得到图像 u^n 。

对曲波系数 $c_{j,l}(k_1, k_2)$ 作傅里叶变换得 $W_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$, 对 $W_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$ 作逆装配得 $\hat{f}_{j,l}(\omega_1, \omega_2)$, 最后在尺度参数为 j 、角度参数为 l 的楔形区域内根据 $\hat{f}_{j,l}(\omega_1, \omega_2) = \hat{\varphi}_{j,l}[\omega_1, \omega_2] f(\omega_1, \omega_2)$ 得原图像的傅里叶系数 $f(\omega_1, \omega_2) = \frac{\hat{f}_{j,l}(\omega_1, \omega_2)}{\hat{\varphi}_{j,l}[\omega_1, \omega_2]}$ 。遍历所有的尺度参数 j 和角度参数 l 即可得到原图像的所有傅里叶系数, 并进行逆傅里叶变换即可恢复出原始图像 f 。

7) 判断是否满足终止条件。

将终止条件设定为迭代次序 n 大于等于预先设定的最大迭代次数 N 。如果 $n \geq N$, 则输出 u^n 作为最终结果; 否则, 令 $n = n + 1$ 并转至步骤 2), 启动下一轮迭代。步骤 2) 对应于映射 F_0 , 作用是保证数据的一致性; 步骤 3) 对应于映射 F_1 , 作用是对结果进行 L^1 范数约束; 步骤 4) ~ 6) 对应于映射 F_2 , 作用是对结果进行曲波系数约束。如果去掉步骤 4) ~ 6), 则该算法将转化为 ART- L^1 方法^[8]。

算法的流程图如图 4 所示。

4 仿真实验与分析

4.1 仿真实验

以相位项 δ 水平梯度 $\partial\delta/\partial x$ 的重建为例验证算法的有效性, 垂直梯度 $\partial\delta/\partial y$ 的重建与之类似。分别选用 Shepp-Logan 模型和校徽模型来模拟纯相位物体的断层, 并假定上述断层位于一个边长为 8 mm 的视野 (FOV) 内, 如图 5 所示。

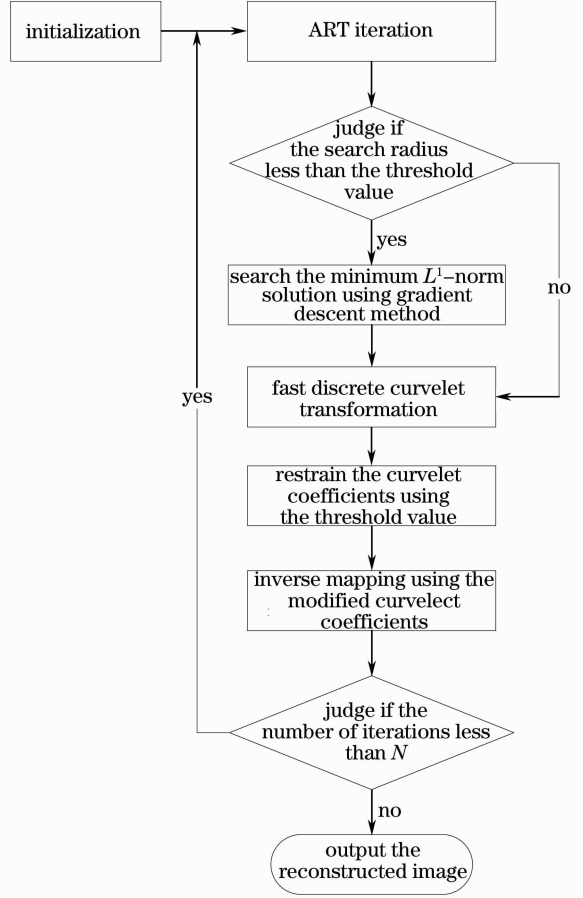


图 4 ART- L^1 -Curvelet 算法流程图

Fig. 4 Flow chart of ART- L^1 -Curvelet algorithm

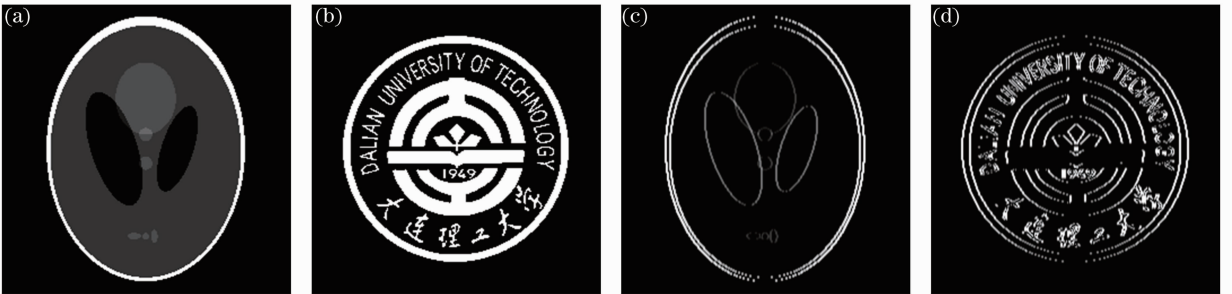


图 5 视场中的各种模型。(a) Shepp-Logan 模型; (b) 校徽模型; (c), (d) 为图 (a)、(b) 水平梯度的绝对值

Fig. 5 Models in FOV. (a) Shepp-Logan model; (b) badge model; (c), (d) absolute values of the horizontal gradient of Fig. (a), (b)

在仿真试验中,视野中图像的分辨率设定为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 。将上述模型的灰度值量化至 $0 \sim 2.55 \times 10^{-7}$ 区间来模拟物体的相位项 $\delta(x, y)$, 然后采用(23)式所示的滤波器与相位项 $\delta(x, y)$ 卷积得到相位项的水平梯度 $\partial\delta/\partial x$, 将其作为待重建图像, 水平梯度 $\partial\delta/\partial x$ 的绝对值 $|\partial\delta/\partial x|$ 如图 5(c)、(d)所示。在采样过程中,待重建物体以 5° 为间隔旋转 36 次。在得到观测数据后,分别采用 ART- L^1 算法和 ART- L^1 -Curvelet 算法进行重建。其中, (16)式中的参数 σ 选为 0.9。

$$\mathbf{h} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

本节采用两组实验验证算法。在第一组实验中,不考虑任何误差和噪声,ART- L^1 算法和 ART- L^1 -Curvelet 算法迭代次数均为 15,重建结果的绝对值如图 6 所示。第二组实验中,在折射角数据中加入均值为 0 且标准差为折射角数据标准差 0.2 倍的高斯噪声,ART- L^1 算法和 ART- L^1 -Curvelet 算法迭代次数均为 15,重建结果的绝对值如图 7 所示。

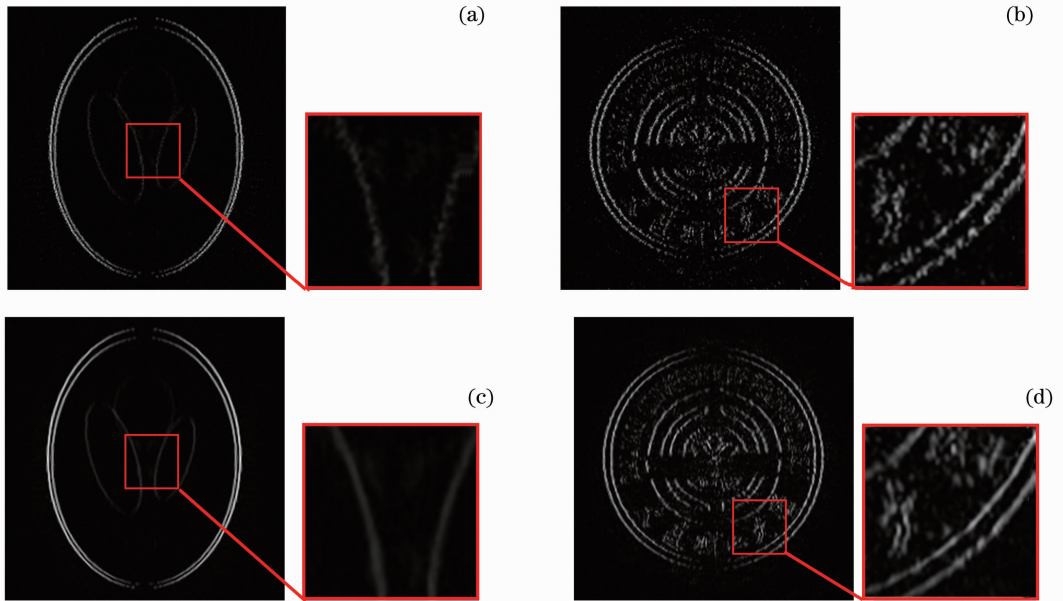


图 6 理想条件下的重建结果。(a),(b) ART- L^1 重建结果;(c),(d) ART- L^1 -Curvelet 重建结果

Fig. 6 Reconstructions in ideal condition. (a), (b) ART- L^1 reconstruction results; (c), (d) ART- L^1 -Curvelet reconstruction results

为了方便地评价图像重建的质量,本文采用以下三种评价标准:均方误差(MSE, E_{MS})、峰值信噪比(PSNR, R_{PSN})及结构相似性系数(SSIM, S_{SIM})^[14]。MSE 定义为重建图像与真实值之间的均方误差,即

$$E_{\text{MS}}(k) = \frac{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{\text{exact}}\|_2^2}{\|\mathbf{u}^{\text{exact}}\|_2^2}, \quad (24)$$

式中 $\mathbf{u}^{\text{exact}}$ 表示真实图像向量; \mathbf{u}^k 表示第 k 次迭代后的向量。PNSR 定义为信号最大功率和影响它精度的破坏性噪声功率的比值,表示重建图像与真实值之间的接近程度,即

$$R_{\text{PSN}}(k) = 20 \cdot \lg \frac{\max(\mathbf{u}^k) - \min(\mathbf{u}^k)}{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{\text{exact}}\|_2 / L}, \quad (25)$$

式中 L 表示图像向量 \mathbf{u} 的长度。在图像处理领域常用 PNSR 来客观评价经程序处理后的图像品质。但大量的实验结果表示,峰值信噪比的高低无法和

人眼观察到的视觉品质完全一致,为了能更有效地评价算法的重建效果,引入不同于传统评价标准的 SSIM,定义式为

$$S_{\text{SIM}}(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)},$$

$$M_{\text{SSIM}}(X, Y) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_{\text{SIM}}(x, y), \quad (26)$$

式中 M_{SSIM} 为平均结构相似度(MSSIM); $x = \{x_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ 和 $y = \{y_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ 表示用来对比结构相似性的两幅图的局部离散非负信号; μ_x 和 σ_x 分别代表局部信号 x 的均值和方差,它们可被视为局部信号 x 的亮度和对比度的估计值;相对应地, μ_y 和 σ_y 分别代表局部信号 y 的均值和方差; C_1, C_2 是为了防止分母为 0 时设定的常量,其中, $C_1 = (K_1 P)^2$, $C_2 = (K_2 P)^2$, K_1, K_2 为可调节的常量参数,此处本文设定 $K = [0.05, 0.03]$, P 表示像素值的动态范

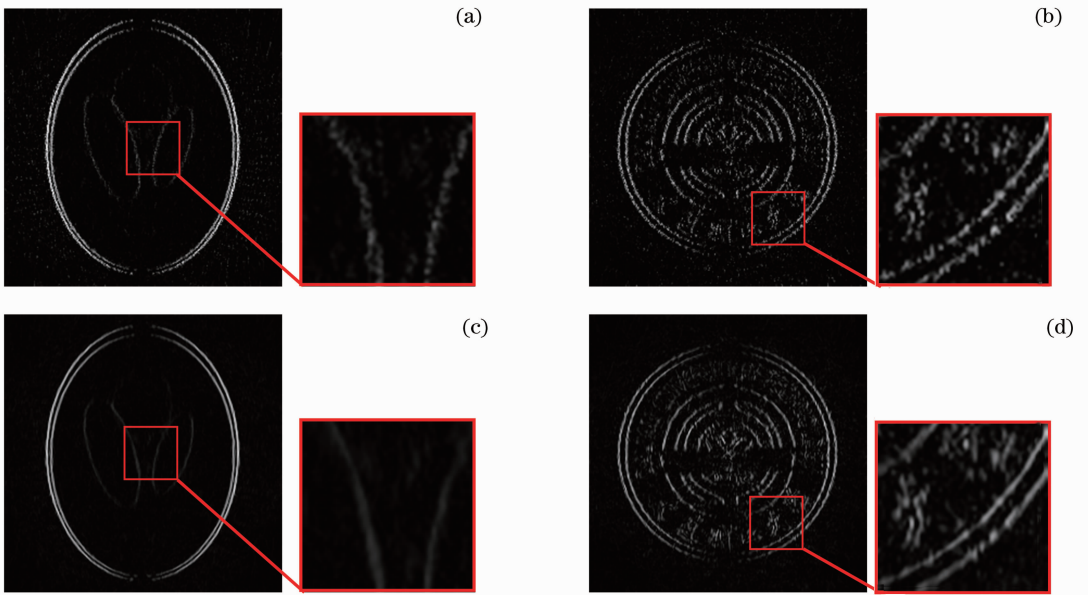


图 7 噪声条件下的重建结果。(a), (b) ART- L^1 重建结果; (c), (d) ART- L^1 -Curvelet 重建结果

Fig. 7 Reconstructions in noisy condition. (a), (b) ART- L^1 reconstruction results; (c), (d) ART- L^1 -Curvelet reconstruction results

围,此处 $P=255$ 。SSIM 表示用来对比的两幅图像之间的结构相似性大小,包括亮度、对比度及结构上的对比,为更好地评价图像质量提供了一种新的评价标准。

分别给出在理想和噪声条件下,两个算法关于 Shepp-Logan 图形和校徽图案的重建结果的质量评价图,如图 8~11 所示。其中,图 8~11 中的图(a)表示 ART- L^1 和 ART- L^1 -Curvelet 算法的均方误

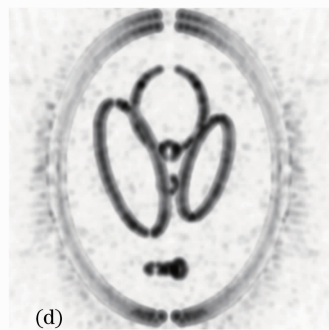
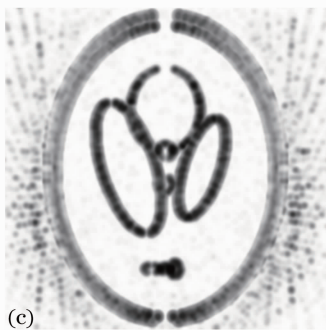
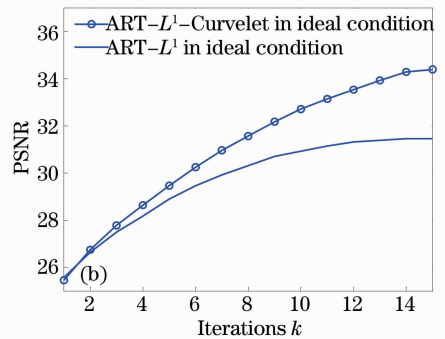
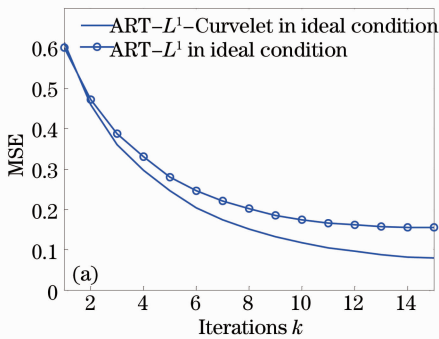


图 8 在理想条件下两重建算法关于 Shepp-Logan 图像的三种评价标准对比图。(a)均方误差; (b)峰值信噪比; (c) ART- L^1 算法和(d) ART- L^1 -Curvelet 算法的 SSIM 分布图

Fig. 8 Comparison of the three evaluation standards of the two algorithms for Shepp-Logan model in ideal condition. (a) MSE; (b) PSNR; SSIM index distribution maps of (c) ART- L^1 and (d) ART- L^1 -Curvelet

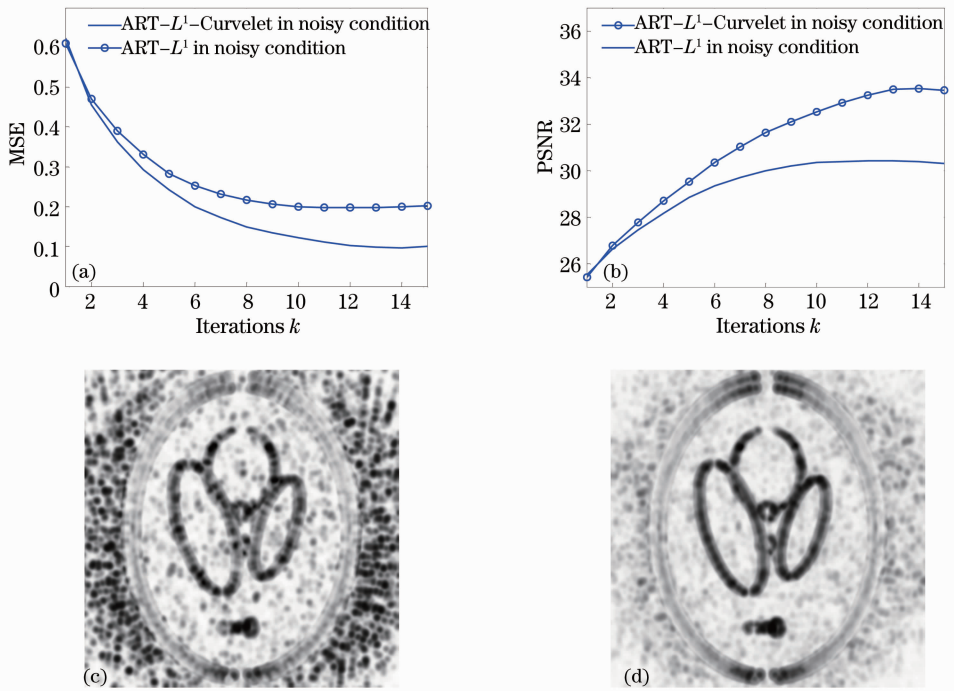


图 9 噪声条件下两重建算法关于 Shepp-Logan 图像的三种评价标准对比图。(a)均方误差；(b)峰值信噪比；
(c) ART- L^1 算法和(d) ART- L^1 -Curvelet 算法的 SSIM 分布图

Fig. 9 Comparison of the three evaluation standards of the two algorithms for Shepp-Logan model in noisy condition.

(a) MSE; (b) PSNR; SSIM index distribution maps of (c) ART- L^1 and (d) ART- L^1 -Curvelet

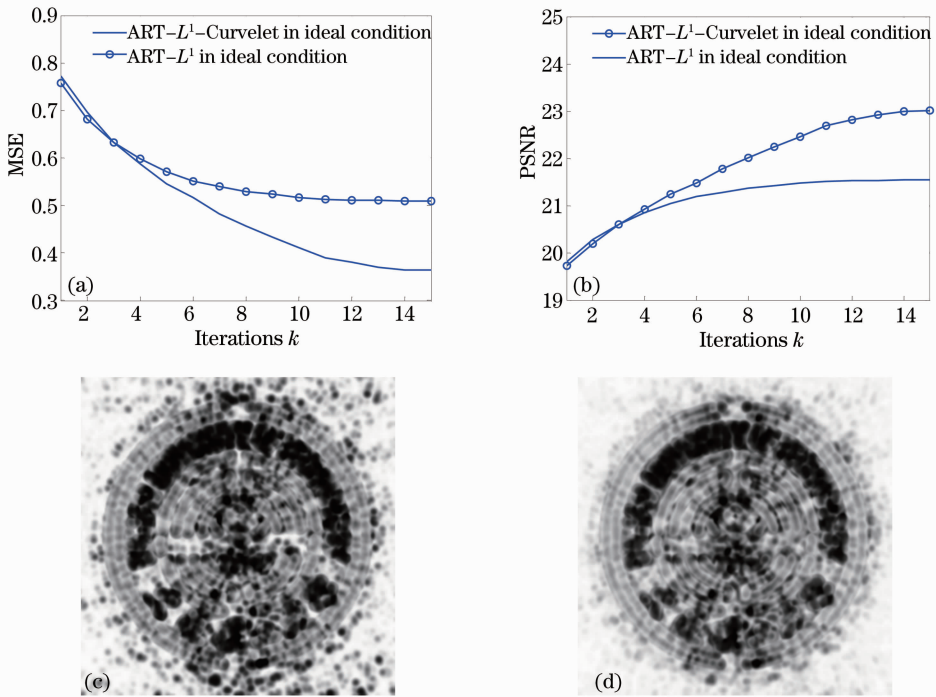


图 10 理想条件下两重建算法关于校徽图像的三种评价标准对比图。(a)均方误差；(b)峰值信噪比；
(c) ART- L^1 算法和(d) ART- L^1 -Curvelet 算法的 SSIM 分布图

Fig. 10 Comparison of the three evaluation standards of the two algorithms for Badge model in ideal condition.

(a) MSE; (b) PSNR; SSIM index distribution maps of (c) ART- L^1 and (d) ART- L^1 -Curvelet

差收敛曲线对比图;图 8~11 中的图(b)表示 ART- L^1 和 ART- L^1 -Curvelet 算法的峰值信噪比收敛曲线对比图;图 8~11 中的图(c)表示 ART- L^1 算法的结构相似性指数分布图;图 8~11 中的图(d)表示 ART- L^1 -Curvelet 算法的结构相似性指数分布图。

均方误差和峰值信噪比曲线变化的趋势反映了算法在迭代次数意义下的收敛速度;而结构相似性指数分布图中的局部亮度则代表着当前位置指数的幅值大小,亮度越高,则代表相似度越大,反之,则越小。

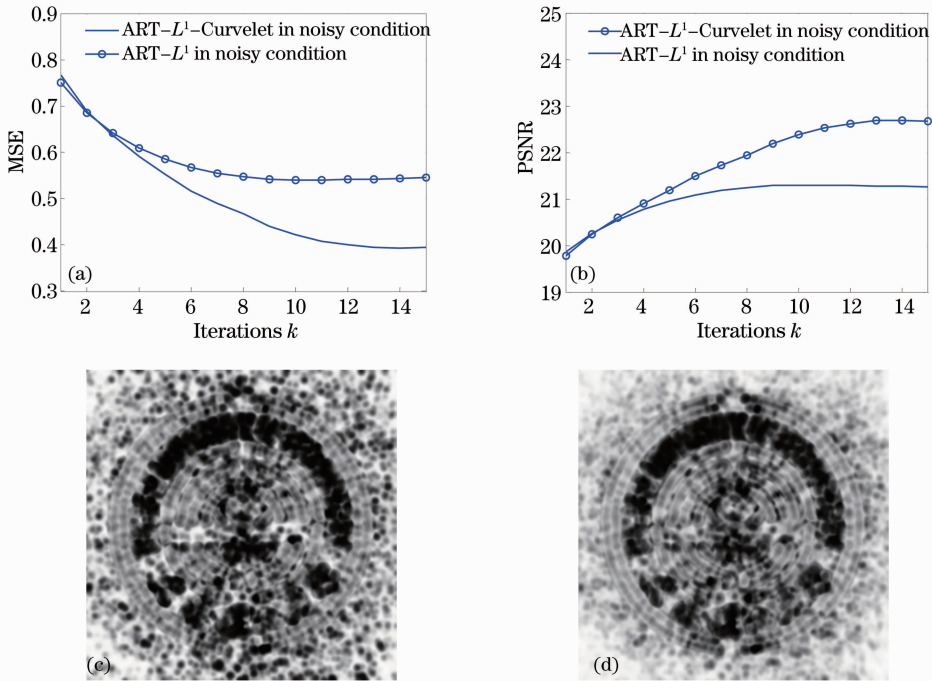


图 11 噪声条件下两重建算法关于校徽图像的三种评价标准对比图。(a)均方误差;(b)峰值信噪比;(c) ART- L^1 算法和(d) ART- L^1 -Curvelet 算法的 SSIM 分布图

Fig. 11 Comparison of the three evaluation standards of the two algorithms for Badge model in noisy condition.

(a) MSE; (b) PSNR; SSIM index distribution maps of (c) ART- L^1 and (d) ART- L^1 -Curvelet

中央处理器为 Intel Core I5-2320, 3 GHz, 2.49 G内存的个人电脑上,采用 Matlab(2011a)软件分别对本节涉及到的算法进行仿真,ART- L^1 和 ART- L^1 -Curvelet 算法关于 Shepp-Logan 模型和 Badge 模型 MSE,PSNR,MSSIM 和算法执行时间见表 1。由图 6~11 和表 1 可知,由于引入了曲波系数修正,本文算法可以有效地区分出点状噪声及图像中的边缘结构,很好地解决了 ART- L^1 算法重建图

像中存在的点状噪声现象,因此,ART- L^1 -Curvelet 算法使得重建图像的信噪比和结构相似性都得到显著提高,重建结果质量优于 ART- L^1 算法,且随着迭代次数的增加,该优势更加明显,除此之外,本文算法对噪声的稳健性也更好。但由于曲波变换消耗了大量的时间,在迭代次数相同的条件下,ART- L^1 -Curvelet 算法消耗的时间远大于 ART- L^1 算法。

表 1 MSE、PSNR、MSSIM 与算法执行时间

Table 1 MSE, PSNR, MSSIM and CPU times of algorithms

Model	Algorithm	MSE		PSNR		MSSIM		CPU time /s
		Ideal	Noisy	Ideal	Noisy	Ideal	Noisy	
Badge model	ART- L^1	0.5090	0.5423	21.543	21.265	0.5837	0.5043	0.8460
	ART- L^1 -Curvelet	0.3659	0.3940	23.001	22.673	0.6406	0.5771	14.928
Shepp-Logan model	ART- L^1	0.1554	0.2046	31.441	30.320	0.8316	0.6893	0.8460
	ART- L^1 -Curvelet	0.0824	0.1021	34.378	33.451	0.8606	0.7885	14.928

从重建结果中可以看出 ART- L^1 -Curvelet 重建算法对于消除重建结果中斑点状的噪声效果显著,

对于图像中的边缘和线段有着更好的重建效果,并在很少的迭代次数下就达到了良好的收敛结果,该

算法对于区分图像重建中的噪声和图像有着积极的意义。

4.2 实际实验

本实验是在北京同步辐射装置 4W1A-X 射线成像实验站根据衍射增强成像原理完成的,实验所

用的两块晶体为 Si[111]晶体,探测器像素大小为 $11 \mu\text{m}$ 。实验样品为密封在胶囊中的蜜蜂,蜜蜂样品的投影与断层图像如图 12 所示,胶囊外圈直径约为 8 mm 。实验使用 10 keV 的同步辐射光对蜜蜂样品进行 180° 的 CT 扫描,扫描间隔为 0.5° 。

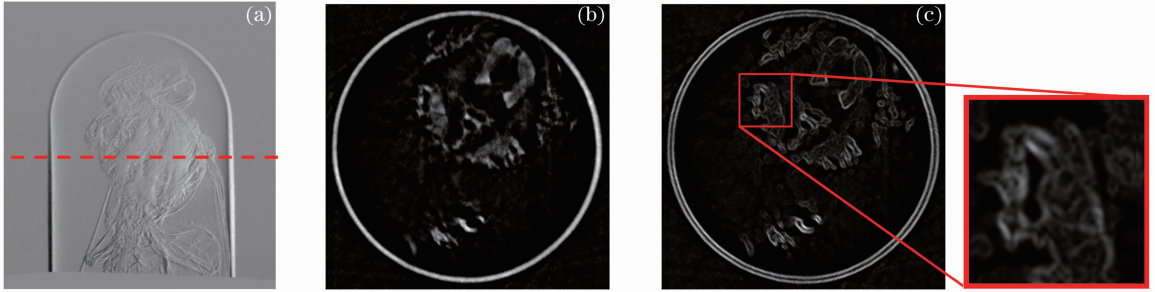


图 12 蜜蜂样品的投影与断层图像。(a)折射角图像;(b)FBP算法给出的重建断层;(c)重建断层的边沿
Fig. 12 Projection and reconstruction of bee-model. (a) Refraction-angle image; (b) reconstructed slice provided by FBP algorithm; (c) edge of reconstruction slice

晶体 Si[111]的达尔文宽度 θ_D 约为 3.76×10^{-5} ^[15]。在位移曲线左右腰处分别采集 360 幅投影图像,并采用几何光学近似法(GOA)^[16]提取出 360 幅折射角图像,每幅图像的真实大小为 $1300 \text{ pixel} \times 1030 \text{ pixel}$,如图 12(a)所示。

在实际实验中,通常不可能给出待重建图像的真实值。为了便于比较,采用经典的滤波反投影法(FBP)给出图 12(a)中虚线处的断层作为可参照的重建结果,如图 12(b)所示。在获得断层图像后,采用一阶差分算子提取出图像的边沿,得到重建断层

的边缘,如图 12(c)所示。

在这组实际实验中,设置以 3° 为间隔,等间隔地选取 60 幅折射角图像,并按 3.2 节中介绍的算法流程分别对相位项的水平方向导数 $\partial\delta/\partial x$ 和垂直方向导数 $\partial\delta/\partial y$ 进行重建。为便于观察,本实验给出二者的绝对值之和 $|\partial\delta/\partial x| + |\partial\delta/\partial y|$ 作为重建结果,它代表图像的边沿,在理想情况下应为若干条极细的线。在本次试验中,将外层迭代次数设定为 15 次,重建结果如图 13 所示。

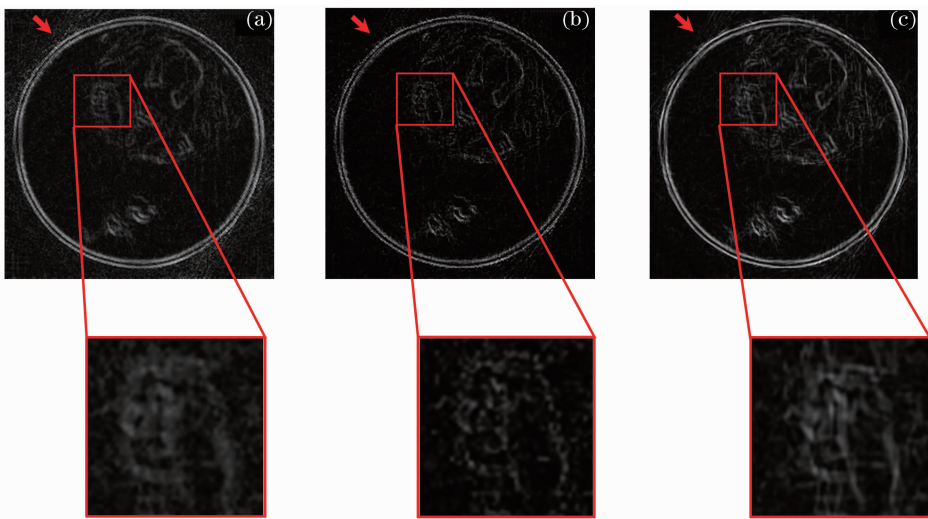


图 13 重建结果。(a) ART 算法;(b) ART- L^1 算法;(c) ART- L^1 -Curvelet 算法

Fig. 13 Reconstruction results. (a) ART algorithm; (b) ART- L^1 algorithm; (c) ART- L^1 -Curvelet algorithm

从重建结果图 13 中的箭头所指区域可以看出,ART- L^1 -Curvelet 算法对于弱小边缘的恢复较佳;从放大的方框区域中可以看出,ART- L^1 -Curvelet

算法对于蜜蜂组织结构的边缘轮廓比 ART- L^1 方法重建的更清晰;且本文算法对于消除斑点状的噪声效果更明显,但算法中的曲波变换过程消耗了很

多时间,重建时间多于 ART- L^1 算法。

5 结 论

将压缩感知理论引入到 DPC-CT 重建中,针对恢复物体的相位项梯度,测试了经典的 ART 算法和 ART- L^1 算法在 DPC-CT 中的重建效果。根据 DPC-CT 的特点,将经典的 ART 算法中加入了 L^1 范数和曲波变换系数的双重约束,提出了适合相位项梯度重建的 ART- L^1 -Curvelet 算法。仿真实验结果表明,该算法在祛除点状噪声和图像边缘重建方面效果显著,在均方误差意义上重建精度优于 ART- L^1 算法。实际实验验证结果明了该算法的有效性,为 DPC-CT 的实际应用提供了一种有效的解决方案。

参 考 文 献

- 1 J Fu, P Li, Q L Wang, *et al.*. A reconstruction method for equidistant fan beam differential phase contrast computed tomography [J]. *Phys Med Biol*, 2011, 56(14): 4529–4538.
- 2 Z T Wang, Z Li, Z Huang, *et al.*. An ART iterative reconstruction algorithm for computed tomography of diffraction enhanced imaging [J]. *Chin Phys C*, 2009, 33(11): 975–980.
- 3 P P Zhu, K Zhang, Z L Wang. Low-dose, simple, and fast grating-based X-ray phase-contrast imaging [J]. *Proc Natl Acad Sci*, 2011, 107(31): 13576–13581.
- 4 G Chen, Z Qi. Image reconstruction for fan-beam differential phase contrast computed tomography [J]. *Phys Med Biol*, 2008, 53(4): 1015–1025.
- 5 P Oskoui-Fard, H Stark. Tomographic image reconstruction using the theory of convex projection [J]. *IEEE Trans Medical Imaging*, 1998, 7(1): 45–58.

- 6 E J Candes, D L Donoho. Curvelets—a Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges [R]. Stanford: Stanford University, 1999.
- 7 E J Candes, D L Donoho. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(2): 219–266.
- 8 S Palakkal, K M M Prabhu. Poisson image denoising using fast discrete curvelet transform and wave atom [J]. *Signal Processing*, 2012, 92(9): 2002–2017.
- 9 M Deepa. Wavelet and curvelet based thresholding techniques for image denoising [J]. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Electronics Engineering*, 2012, 1(10): 77–81.
- 10 Li Jing, Sun Yi. Sparse angular differential phase-contrast CT reconstruction using L^1 norm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(3): 0311002.
李 镜, 孙 怡. 基于 L^1 范数的微分相位衬度 CT 稀疏角度重建算法[J]. *光学学报*, 2012, 32(3): 0311002.
- 11 E Candes, L Demanet, D Donoho, *et al.*. Fast discrete curvelet transforms [J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2006, 5(3): 861–899.
- 12 J Wright, A Y Yang, A Ganesh, *et al.*. Robust face recognition via sparse representation [J]. *IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 31(2): 210–227.
- 13 Jianwei Ma, Gerlind Plonka. The curvelet transform [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(2): 118–133.
- 14 Zhou Wang, Alan C Bovik, Hamid R Sheikh, *et al.*. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. *IEEE Trans image processing*, 2004, 13(4): 600–612.
- 15 Huang Zhifeng. Research on Extraction Methods of Phase Information and CT Reconstruction Algorithms in Diffraction Enhanced Imaging [D]. Beijing: Tsinghua University, 2006.
黄志峰. 衍射增强成像的相位信息提取方法和 CT 重建算法研究 [D]. 北京: 清华大学, 2006.
- 16 D Chapman, W Thomlinson, R E Johnston, *et al.*. Diffraction enhanced X-ray imaging [J]. *Phys Med Biol*, 1997, 42(11): 2015–2025.

栏目编辑: 史 敏