

# 异常空心光束通过大数值孔径光阑透镜后焦区电场和磁场的相位奇异特性

陈淑琼 罗亚梅\* 唐碧华

(泸州医学院生物医学工程系, 四川 泸州 646000)

**摘要** 运用矢量德拜衍射公式研究了线偏振异常空心高斯光束在大数值孔径光阑透镜后焦区的相位奇异特性。数值分析结果表明,焦区的电场和磁场分量相位奇异特性与截断参数和数值孔径有关。随着截断参数的逐渐变化,焦区的电场和磁场分量的相位奇点会有所移动、分裂和湮灭,且焦平面上的鞍点对和相位奇点对都会随着截断参数的增大而有所靠近,产生亚波长结构。伴随相位奇点,有鞍点的出现且和相位奇点有相似的变化规律,但鞍点对比相应相位奇点对先靠拢而消失。对于相同的截断参数,电场和磁场分量所对应的相位奇点分裂和湮灭所需的截断参数的临界值不同。用计算例对结果做了说明并做了比较。

**关键词** 物理光学;异常空心光束;大数值孔径光阑透镜;相位奇点

**中图分类号** O441.4; O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.s114005

## Phase Singularities of Anomalous Hollow Beams' Electric and Magnetic Field Focused by a High Numerical Aperture Objective

Chen Shuqiong Luo Yamei Tang Bihua

(Department of Biomedical Engineering, Luzhou Medical College, Luzhou, Sichuan 646000, China)

**Abstract** Based on the vectorial Debye diffraction theory and taking linearly polarized anomalous hollow beam as an example, the phase singularities in the focal region are studied. It is found that electric and magnetic phase singularities depend on the truncation parameter and numerical aperture. By varying the truncation parameter, the motion, creation and annihilation of phase singularities of electric and magnetic field take place in the focal region. By accompanying phase singularities, a pair of saddle points may appear and behave similarly. A pair of saddle points and the corresponding pair of phase singularities approach, and then annihilate each other, which leads to the subwavelength structure. However, the singularities annihilate behind saddle points. There exists the different critical point of truncation parameter, where the creation or annihilation occurs at the same numerical aperture. The results are illustrated and compared by numerical examples.

**Key words** physical optics; anomalous hollow beam; high numerical aperture objective; phase singularity

**OCIS codes** 050.1960; 050.4865; 260.2110

## 1 引言

近年来,大数值孔径光阑透镜的聚焦在光信息存储、光刻和共焦显微等方面的广泛应用引起了越来越多的关注和研究<sup>[1~11]</sup>。Karman 和 Liu 等<sup>[12,13]</sup>对线偏振光经过大数值孔径光阑透镜后焦区的相位奇异特性作了研究。Diehl 等<sup>[14]</sup>分析了径向偏振

光,经过大数值孔径聚焦系统后,相位奇点随透镜光阑的半角宽度和光束宽度的变化情况。然而,这些文献都只考虑了电场分量的焦区相位奇异特性,未曾详细研究磁场分量的相位奇异特性。本文以线偏振的异常空心光束为例,用德拜公式详细分析了经过大数值孔径光阑透镜后电场、磁场分量的相位奇

收稿日期: 2012-11-15; 收到修改稿日期: 2013-01-14

基金项目: 四川省教育厅自然科学基金(10ZB029)资助课题。

作者简介: 陈淑琼(1965—),女,实验师,主要从事激光技术方面的研究。E-mail: 245686575@qq.com

\* 通信联系人。E-mail: luoluoyan@126.com

异特性与截断参数和数值孔径的关系,并对电场和磁场分量的相位奇异特性做了比较。

## 2 理论模型

如图 1 所示,考虑无球差且满足正弦条件的大数值孔径聚焦系统,设坐标系原点  $O$  取在焦距为  $f$  的透镜焦点处,半角宽度和光阑半径分别为  $\theta_{\max}$  和  $a$  ( $a \gg \lambda$ )。若电场矢量为沿  $x$  方向偏振的光束入射到此系统,则在球坐标系中,根据矢量德拜公式<sup>[15,16]</sup>

$$e_x(P) = -\frac{ikf}{2}(I_0 + I_2 \cos 2\varphi_P), \quad (1a)$$

$$e_y(P) = -\frac{ikf}{2}I_2 \sin 2\varphi_P, \quad (1b)$$

$$e_z(P) = -kfI_1 \cos \varphi_P, \quad (1c)$$

$$h_x(P) = -\frac{ikf}{2}I_2 \sin 2\varphi_P, \quad (2a)$$

$$h_y(P) = -\frac{ikf}{2}(I_0 - I_2 \cos 2\varphi_P), \quad (2b)$$

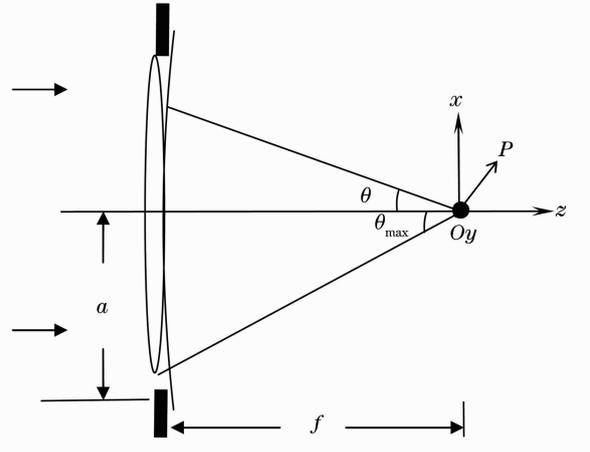


图 1 聚焦示意图

Fig. 1 Notation relating to the focusing geometry

$$e_z(P) = -kfI_1 \sin \varphi_P, \quad (2c)$$

式中  $e_x, e_y, e_z, h_x, h_y, h_z$  为场点  $P$  的电场矢量和磁场矢量的各分量,波数  $k$  与波长  $\lambda$  的关系为  $k = 2\pi/\lambda$ , 且

$$I_0 = \int_0^{\theta_{\max}} l_0(\theta) \sqrt{\cos \theta} \sin \theta (1 + \cos \theta) J_0\left(\frac{v \sin \theta}{NA}\right) \exp\left(\frac{i u \cos \theta}{NA^2}\right) d\theta, \quad (3a)$$

$$I_1 = \int_0^{\theta_{\max}} l_0(\theta) \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta J_1\left(\frac{v \sin \theta}{NA}\right) \exp\left(\frac{i u \cos \theta}{NA^2}\right) d\theta, \quad (3b)$$

$$I_2 = \int_0^{\theta_{\max}} l_0(\theta) \sqrt{\cos \theta} \sin \theta (1 - \cos \theta) J_2\left(\frac{v \sin \theta}{NA}\right) \exp\left(\frac{i u \cos \theta}{NA^2}\right) d\theta, \quad (3c)$$

式中的  $l_0(\theta)$  为光瞳切趾函数,  $J_m(\cdot)$  为第一类  $m$  阶贝塞尔函数,  $u, v$  是为了计算方便引入的两无量纲变量  $u = kz \sin^2 \theta_{\max}, v = kr \sin \theta_{\max}$ 。  $NA$  为数值孔径且  $NA = \sin \theta_{\max}$ 。

设异常空心光束的光瞳切趾函数为<sup>[17]</sup>

$$l_0(\theta) = \left(-2 + \frac{8\delta^2 \sin^2 \theta}{NA^2}\right) \exp\left(-\frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{NA^2}\right). \quad (4)$$

式中截断参数  $\delta = a/w_0$ ,  $w_0$  为束腰宽度。

由(1)~(4)式可知,光束经过大数值孔径光阑透镜后的各电场、磁场分量由截断参数  $\delta$ 、数值孔径  $NA$ 、位置  $u, v$  以及场点  $P$  关于  $x$  轴的方位角  $\varphi_P$  决定。以下数值计算中,取参数  $f = 25000\lambda$ , 菲涅耳数  $N_a = NA^2 f/\lambda \gg 1$ , 以确保德拜公式的有效性<sup>[18]</sup>。

## 3 电场和磁场各分量的相位奇异特性

图 2 为异常空心光束经过不同截断参数和数值

孔径的光阑透镜后在焦区  $\{0 < v \leq 12, -5 \leq u \leq 5\}$  电场  $e_x$  分量  $\varphi_P = \pi/6$  的等相位线分布。由图可见,若  $NA$  取一定值,当  $\delta$  较小时,焦面上有一系列相位奇点。例如  $NA = 0.6, \delta = 1.700$  [图 2(a)], 焦面上有  $A, B, C$  三个奇点,根据奇点处等相位线的分布和旋转状态<sup>[19]</sup> 知各奇点的拓扑电荷均为  $m = +1$ , 总拓扑电荷数为  $+3$ 。当  $\delta$  增大到  $1.798$  时,  $C$  分裂成  $C, D, E$  三个相位奇点 [图 2(b)]。  $D, E$  两奇点对称分布于焦平面前后且其拓扑电荷均为  $m = +1$ , 而此时焦面上重新命名为  $C$  的奇点拓扑电荷为  $m = -1$ 。随  $\delta$  进一步增大到  $1.946$ , 带有相反拓扑电荷  $m = \pm 1$  的相位奇点对  $B, C$  已靠拢直至湮灭。在相位奇点分裂和湮灭的过程中,总拓扑电荷数守恒,均为  $+3$ 。

由图 2(a)~(c)和图 2(d)~(f)对比可见,  $NA$  越大,奇点  $C$  产生分裂所对应的  $\delta$  越大,而相位奇点

$B$ 、 $C$  湮灭所需的  $\delta$  越小。图 3 给出了电场分量  $e_x$  在不同  $NA$  时焦面上相位奇点随截断参数的位置变化，(a)  $NA = 0.6$ ，(b)  $NA = 0.8$ 。由图可见，当  $NA$  一定时，离光轴最近的相位奇点  $A$  随  $\delta$  的增大逐渐远离光轴但不参加湮灭过程；离轴越远的相位奇点对湮灭所需的  $\delta$  越大； $NA$  越大，对应的相位奇点

对湮灭所需的  $\delta$  越小。例如  $NA = 0.6$  时，相位奇点对 I、II、III 湮灭所对应的  $\delta$  分别为 1.946、2.620、3.155； $NA = 0.8$  时，相位奇点对 I、II、III 湮灭所对应的  $\delta$  分别为 1.928、2.599、3.135。此外，在相位奇点对湮灭前会有亚波长结构的产生。如图 3(a) 中， $\delta = 1.916$  时， $B$ 、 $C$  间的距离为  $0.247\lambda$ 。

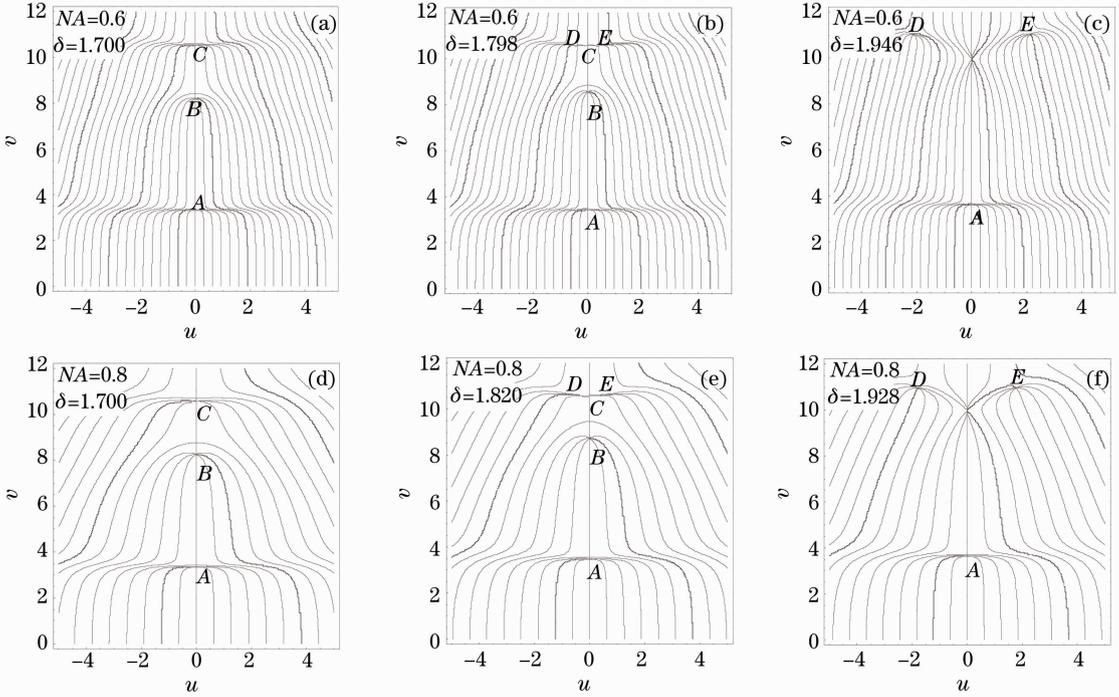


图 2 电场  $e_x$  分量的等相位线分布

Fig. 2 Contour lines of the phase of electric-field component  $e_x$

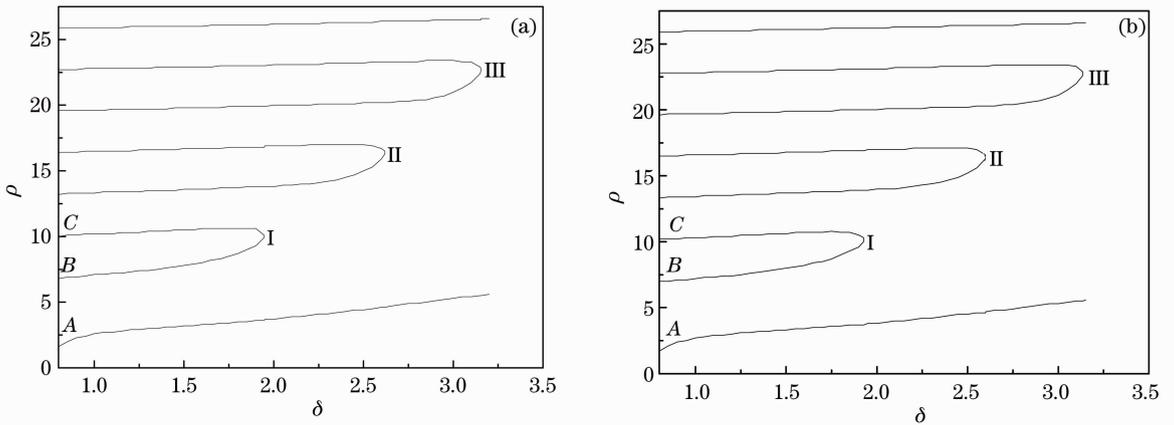


图 3 焦面上  $e_x$  分量的相位奇点随截断参数的位置变化

Fig. 3 Position of phase singularities of the electric field component  $e_x$  versus the truncation parameter  $\delta$

由图 2(a)，(b) 可见，相位奇点附近都伴随有一鞍点，在该点的相位梯度为 0<sup>[12]</sup>。图 4 给出了  $NA = 0.6$ ，(a)  $\delta = 1.834$  和 (b)  $\delta = 1.894$  时  $e_x$  分量的等相位线分布，(c) 为焦面上相位奇点对  $B$ 、 $C$  和鞍点对  $B_s$ 、 $C_s$  间距离  $\Delta\lambda$  随  $\delta$  的变化关系图。由图可见，奇

点对  $B$ 、 $C$  和鞍点对  $B_s$ 、 $C_s$  间距离随  $\delta$  的增加而减小。当  $\delta$  从 1.834 增大到 1.894 时，焦面上鞍点  $B_s$ 、 $C_s$  消失，但奇点  $B$ 、 $C$  仍然存在 [图 4(b)，(c)]。 $\delta$  进一步增大到 1.946 时，奇点  $B$ 、 $C$  湮灭 [图 2(c) 和图 4(c)]。

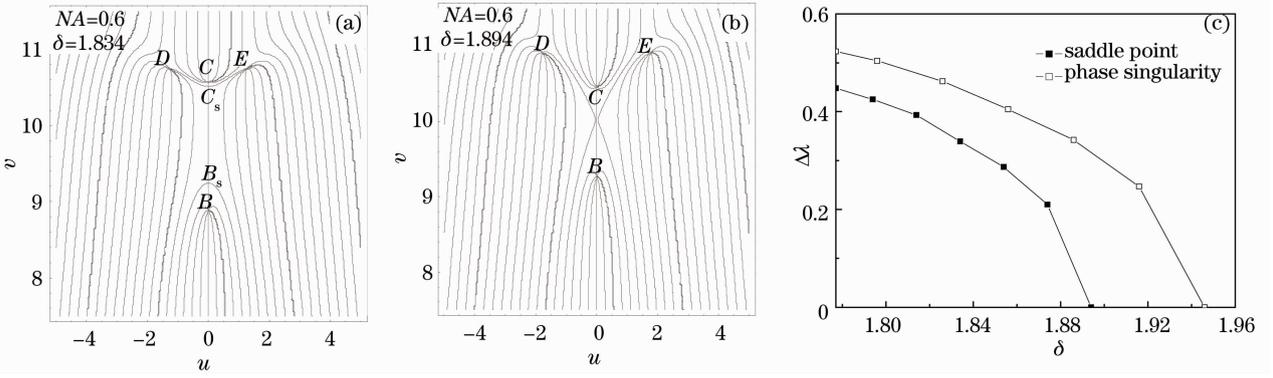


图 4 鞍点对和相位奇点对的距离随截断参数  $\delta$  的变化

Fig. 4 Distance between phase singularities  $B$  and  $C$ , and saddle points  $B_s$  and  $C_s$  versus the truncation parameter  $\delta$

图 5 为异常空心光束经过不同截断参数和数值孔径的光阑透镜后在焦区  $\{0 < v \leq 12, -5 \leq u \leq 5\}$  磁场  $h_x$  分量的等相位线分布。由图 5 可见,随  $\delta$  的增大,  $h_x$  的相位奇点发生分裂和湮灭,且由图 5(a) ~ (c) 和图 5(d) ~ (f) 对比可见,  $NA$  越大,奇点  $C$  产生分裂所对应的  $\delta$  越大,这和  $e_x$  的规律是相同的,但和相对应的  $e_x$  的相位奇点分裂所需的  $\delta$  临界值并不相同。由图 5(b), (e) 可见,  $h_x$  在  $NA = 0.6$  和  $0.8$  时

相位奇点  $C$  分裂时对应的  $\delta$  为  $2.159$  和  $2.226$ , 分别大于  $e_x$  的  $NA = 0.6$  和  $0.8$  时相位奇点  $C$  分裂时对应的值。但是  $NA$  越大,相位奇点  $B, C$  湮灭所需的  $\delta$  越大,这和  $e_x$  的规律是相反的。由图 5(c), (f) 可见,  $h_x$  在  $NA = 0.6$  和  $0.8$  时相位奇点  $B, C$  湮灭时对应的  $\delta$  为  $2.363$  和  $2.407$ , 且大于  $e_x$  的  $NA = 0.6$  和  $0.8$  时相位奇点  $B, C$  湮灭时对应的值。

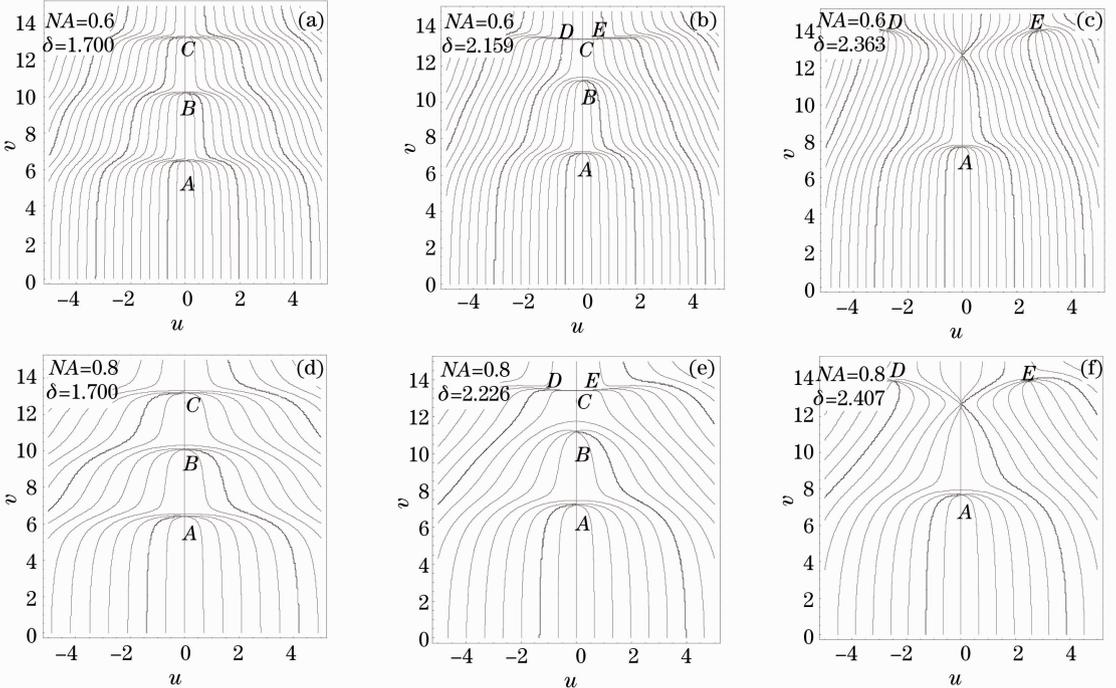


图 5 磁场  $h_x$  分量的等相位线分布

Fig. 5 Contour lines of the phase of magnetic field component  $h_x$

需要说明的是,磁场分量焦面上的鞍点和相位奇点也会随着  $\delta$  的增大而靠近产生亚波长结构,但鞍点对还是比相应相位奇点对先靠拢而消失(图 5 未给出)。

## 4 结 论

本文对线偏振异常空心高斯光束经过大数值孔径光阑透镜后焦区的相位奇异特性做了详细研究,分析了光阑截断参数  $\delta$ 、数值孔径  $NA$  对相位奇点的

影响并做了数值计算。随着  $\delta$  的逐渐增大, 电场和磁场在焦区的相位奇点会产生移动、分裂和湮灭, 但分裂和湮灭的临界值并不相同。以  $\varphi_P = \pi/6$  为例, 仅考虑电场分量  $e_x$  和仅考虑磁场分量  $h_x$  两种情况比较可知,  $NA$  越大, 两者所对应的相位奇点的分裂所需的  $\delta$  越大。然而,  $NA$  增大时,  $e_x$  相应相位奇点湮灭所需的  $\delta$  越大,  $h_x$  的规律恰恰相反, 且  $h_x$  相位奇点分裂时对应的  $\delta$  大于  $e_x$  相位奇点分裂时对应的值。此外, 焦面上的鞍点和相位奇点都会随着  $\delta$  的增大而靠近产生亚波长结构, 但鞍点对比相应相位奇点对先靠拢而消失。本文所得结果深化了对电磁波在焦区的相位奇异特性的认识, 有助于其在光捕捉、微粒操控等方面的应用。

### 参 考 文 献

- 1 C. J. R. Sheppard, T. Wilson. The image of a single point in microscope of large numerical aperture [J]. *Proc. R. Soc. London A*, 1982, **379**(1776): 145~158
- 2 M. O. Scully, M. S. Zubairy. Simple laser accelerator: optics and particle dynamics [J]. *Phys. Rev. A*, 1991, **44**(4): 2656~2663
- 3 K. S. Youngworth, T. G. Brown. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams [J]. *Opt. Express*, 2000, **7**(2): 77~87
- 4 S. Quabis, R. Dorn, M. Eberler *et al.*. Focusing light to a tighter spot [J]. *Opt. Commun.*, 2000, **179**(1-6): 1~7
- 5 L. Novotny, M. R. Beversluis, K. S. Youngworth *et al.*. Longitudinal field modes probed by single molecules [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**(23): 5251~5254
- 6 E. P. Walker, T. D. Milster. Beam shaping for optical data storage [C]. *SPIE*, 2001, **4443**: 73~92
- 7 Liu Fei, Li Yanqiu. Design of high numerical aperture projection objective for industrial extreme ultraviolet lithography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(2): 0222003  
刘菲, 李艳秋. 大数值孔径产业化极紫外投影光刻物镜设计 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(2): 0222003
- 8 Leng Mei, Yang Yanfang, He Ying *et al.*. Effect factors of the focal shift in spatial-variant polarized vector beams [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(5): 0526001  
冷梅, 杨艳芳, 何英等. 影响空间变化偏振矢量光束强聚焦后焦斑移位的因素 [J]. *光学学报*, 2012, **32**(5): 0526001
- 9 Tang Yan, Hu Song, Zhao Lixin *et al.*. Polarization property of photon sieves with high numerical aperture [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(12): 1205002  
唐燕, 胡松, 赵立新等. 大数值孔径光子筛偏振特性研究 [J]. *光学学报*, 2012, **32**(12): 1205002
- 10 Zhou Yuan, Li Yanqiu, Liu Guangcan. Study on pellicle optimization and polarization aberration induced by pellicle in hyper numerical aperture lithography [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(4): 0407001  
周远, 李艳秋, 刘光灿. 超大数值孔径光刻中掩模保护膜优化及偏振像差研究 [J]. *中国激光*, 2011, **38**(4): 0407001
- 11 Ren Hongliang, Ding Panfeng, Li Xiaoyan. Design and adjust for optical tweezers based on finite conjugate microscope systems [J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(s1): s116002  
任洪亮, 丁攀峰, 李小燕. 基于有限远光学系统的光镊设计和调整 [J]. *中国激光*, 2012, **39**(s1): s116002
- 12 G. P. Karman, M. W. Beijersbergen, A. Van Duijl *et al.*. Airy pattern reorganization and subwavelength structure in a focus [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(4): 884~899
- 13 P. Liu, B. Lü. Phase singularities of the transverse field component of high numerical aperture dark-hollow Gaussian beams in the focal region [J]. *Opt. Commun.*, 2007, **272**(1): 1~8
- 14 D. W. Diehl, R. W. Schoonover, T. D. Visser. The structure of focused, radially polarized fields [J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(7): 3030~3038
- 15 B. Richards, E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems II. structure of the image field in an aplanatic system [J]. *Proc. R. Soc. London A*, 1959, **253**(1274): 358~379
- 16 M. Gu. *Advanced Optical Imaging Theory* [M]. Springer-Verlag, 2000
- 17 Y. Cai. Model for an anomalous hollow beam and its paraxial propagation [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(21): 3179~3181
- 18 M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* [M]. Cambridge University Press, 1999
- 19 I. Freund, N. Shvartsman. Wave-field phase singularities; the sign principle [J]. *Phys. Rev. A*, 1994, **50**(6): 5164~5172

栏目编辑: 李文喆