偏振光学的四元数方法

丁光涛
（安徽师范大学物理与电子信息学院，安徽 芜湖 241000）

摘要 在偏振光学中系统地引入四元数方法。分别给出了在 Poincare 球和斯托克斯参数基础上建立的偏振光四元数表示，并证明这两种表示是等价的。讨论了偏振光四元数表示的多样性。导出了偏振器件和系统的四元数表示。利用四元数表示证明了偏振系统的等效定理，导出了等价简化系统的组成和四元数表示。提出了偏振系统的四元数矩阵计算方法，得到了四元数表示和 Mueller 矩阵之间的变换关系。讨论了根据四元数矩阵乘法有条件的交换性优化偏振系统的四元数矩阵算法的途径，并指出了这种算法的应用前景。

关键词 物理光学；四元数；偏振光；偏振器件；斯托克斯参数
中图分类号 O436.3　　**文献标识码** A　　**doi:** 10.3788/AOS201333.0726001

Quaternion Method in Polarization Optics

Ding Guangtao
(*College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui* 241000, *China*)

Abstract The quaternion method is introduced into the polarization optics systematically. Two quaternion representations of polarized light are presented which are based on the Poincare sphere representation and the Stokes parameters, respectively, and their equivalence relation is proved. The diversity of the quaternion representations of the polarized light is discussed. The quaternion representations of polarizing devices and systems are obtained. By using the quaternion representation, the equivalent theorem of polarizing system is proved, and the composition and the quaternion representations of the reduced equivalent system are deduced. The quaternion matrix calculation method for polarizing systems is presented, and the transform relations between the quaternion representations and the Mueller matrixes are obtained. Based on the conditional commutative low of the quaternion matrix multiplication, the optimization way of the quaternion matrix calculation method are discussed, and the application prospects of the algorithm are pointed.

Key words physical optics; quaternion; polarized light; polarizing devices; Stokes parameters
OCIS codes 260.0260; 260.5430; 000.3860

1 引　　言

1843 年哈密顿提出了四元数概念，以推广平面问题中的复数方法来解决三维空间中的问题。早期在刚体运动学、结晶学中四元数得到简单应用，也曾应用于初期电磁理论。近几十年来，在现代物理学的许多学科，如经典力学、相对论、量子理论、电磁理论和引力理论等，四元数形式的理论一直在发展中。由于同一个物理理论可以有多种表述形式，不同的表述可能具有不同的优点和特点，这些四元数物理理论在传统领域中与其他数学形式的理论是等价的。但是，有些四元数理论在突破传统领域后却能够得到不同的结果[1-7]，因此，研究四元数物理理论是有一定理论意义的。另一方面，由于 20 世纪中叶以来现代科学技术，如现代控制理论、计算机科学、高速交通工具、复杂机械制造等工业技术的发展，使得四元数在许多领域，特别是航天技术和机器人制造等领域中应用越来越广[7-8]。但是在光学学科以及相关的技术中，四元数并没有得到重视和应用。以偏振光学为例，光的偏振态的表示，偏振器件功能的描述，偏振系统参数的计算，有多种不同的方法[9]，曾经有人利用四元数作为分析和计算偏振光的辅助方法[10-11]。在试图将四元数引入到光学领域

收稿日期： 2013-01-05；**收到修改稿日期：** 2013-03-08

作者简介： 丁光涛（1941—），男，教授，主要从事经典力学、理论物理方面的研究。E-mail: dgt695@sina.com

的过程中，或者说在光学中应用四元数的过程中，研究人员提出过两种处理偏振光的四元数方法：一种是将偏振光的 Poincare 球表示和四元数的球面表示对应起来，由此导出偏振光的四元数表示；另一种是直接将斯托克斯参数作为四元数的 4 个元导出偏振光的四元数表示。两者都给出了偏振光和偏振器件的四元数表示，以及偏振器件和系统的 Mueller 矩阵的计算，并重新证明了偏振系统的等效定理[12-14]。偏振光学有些研究是基于数值计算的，有的研究中利用了不同的数学表示得到了新的结果[15-17]。因此，本文进一步系统地研究偏振光学中的四元数方法，在总结已有的结果的基础上，进一步证明提出的两种四元数表示，虽然形式上不同，但是在本质上是等价的，能够相互变换，而且指出偏振光有多种四元数表示。此外，利用四元数矩阵乘法有条件的交换性，给出实用的偏振系统四元数矩阵计算方法，并讨论了这种算法的优化方法和实际应用的可能性。

2　四元数及其矩阵乘法

四元数是由实单位 1，3 个虚单位 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，4 个数元 a_0、a_1、a_2、a_3 组成的超复数

$$\boldsymbol{A} = a_0 + \boldsymbol{e}_1 a_1 + \boldsymbol{e}_2 a_2 + \boldsymbol{e}_3 a_3, \tag{1}$$

数元可以是实数或复数，本文只讨论实数情况。单位 1 和 $\boldsymbol{e}_k$ 的乘积法则为

$$1\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k 1 = \boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl}\boldsymbol{e}_l,\quad (j,k,l = 1,2,3). \tag{2}$$

定义 $\boldsymbol{A}$ 的共轭四元数为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = a_0 - \boldsymbol{e}_1 a_1 - \boldsymbol{e}_2 a_2 - \boldsymbol{e}_3 a_3. \tag{3}$$

$\boldsymbol{A}$ 的模为

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \tag{4}$$

模等于 1 的四元数称为单位四元数。

四元数可以表示成列阵或方阵形式，即

$$\{\boldsymbol{A}\} = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3]^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

其中{ }表示列阵，[ ]表示方阵。

两个四元数 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{AB} = &(a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_1 + \\ &(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned} \tag{7}$$

(7)式可以表示成两种矩阵形式，即

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{B}\},\ [\boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}]. \tag{8}$$

在一般情况下，四元数乘法是不可交换的，对应的矩阵乘积也是不可对易的，即

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA},\ [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{B}\} \neq [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{A}\},\quad [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}] \neq [\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]. \tag{9}$$

然而，在引入蜕变矩阵概念后，四元数矩阵乘法能够实现一种有条件的交换性[7-8]。$\boldsymbol{A}$ 的蜕变矩阵为

$$[\boldsymbol{A}]^{*} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

(6)式和(10)式表明四元数的矩阵和蜕变矩阵之间存在简单而又明确的对应关系。直接计算可以验证，矩阵乘积(8)式能够改写成

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{B}]^{*}\{\boldsymbol{A}\},\ [\boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{B}]^{*}[\boldsymbol{A}], \tag{11}$$

比较(8)式和(11)式，可知四元数矩阵乘法的有条件交换性，这个性质使四元数矩阵算法在实用上具有很大的优越性。

共轭四元数 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 同样可以表示成方阵或列阵形式，同样能引入蜕变矩阵。

3　偏振光的两种四元数表示及其等价性

3.1　椭圆偏振光的基本描述

设平面单色椭圆偏振光沿 z 轴正方向传播，在空间某定点的电场强度矢量的分量为

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t + \delta_x),\quad E_y = E_{0y}\cos(\omega t + \delta_y), \tag{12}$$

式中 E_x，E_y 分别为 x，y 方向上的电场强度，E_{0x}，E_{0y} 分别为 x，y 方向上的振幅，δ_x，δ_y 分别为 x，y 方向上的相位，ω 为圆频率，t 为时间。

在电场强度矢量的端点描画一个椭圆，其大小、形状、方位和端点转向，由分振动振幅 E_{0x}，E_{0y}，以及相位差 $\delta = \delta_y - \delta_x$ 决定。设椭圆的长短半轴为 a 和 b，长轴方位角为 θ，引入两个参量 α 和 β，定义

$$\tan\alpha = E_{0y}/E_{0x},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4,\quad \tan\beta = \pm b/a,\ -\pi/4 \leqslant \beta \leqslant \pi/4, \tag{13}$$

式中“＋”对应右旋偏振光，“－”对应左旋偏振光。

这些描述偏振光的参量之间存在下列关系

$$\tan(2\theta)=\tan(2\alpha)\cos\delta,\quad \sin(2\beta)=\sin(2\alpha)\sin\delta,\tag{14}$$

如果不考虑光强，即不计椭圆大小，则参量 θ 和 β 就确定了椭圆的形状、方位和电场矢量的转向，也就是确定了光的偏振态，可将 θ 和 β 作为描述偏振态的基本参量。

3.2 偏振光的两种四元数表示

从偏振光的 Poincare 球表示能够导出一种偏振光的四元数表示[12]。完全偏振光的偏振态可以用 Poincare 球面上的点来表示，而单位四元数也可以用单位球面上的点来表示。将两个球面合二为一，使两个球面上的点一一对应，就得到偏振光的一种四元数表示，记为

$$\boldsymbol{Q}_p=\rho+\boldsymbol{e}_2\mu+\boldsymbol{e}_3\nu,\tag{15}$$

式中

$$\begin{cases}\rho=\cos(2\beta)\cos(2\theta),\\ \mu=-\sin(2\beta),\\ \nu=\cos(2\beta)\sin(2\theta).\end{cases}\tag{16}$$

光的偏振态通常用斯托克斯参量描述，在这个基础上也能够引入偏振光的另一种四元数表示[14]。对完全偏振光斯托克斯参量为

$$I=E_{0x}^2+E_{0y}^2,\ M=E_{0x}^2-E_{0y}^2,$$
$$C=2E_{0x}E_{0y}\cos\delta,\ S=2E_{0x}E_{0y}\sin\delta.$$

不考虑光强，可以用下列斯托克斯列阵表示偏振态

$$[s_0,s_1,s_2,s_3]^{\mathrm{T}}=[1,M/I,C/I,S/I]^{\mathrm{T}}.\tag{17}$$

参量 s_0,s_1,s_2,s_3 与参量 θ 和 β 之间的关系为

$$\begin{cases}s_1=\cos(2\beta)\cos(2\theta),\\ s_2=\cos(2\beta)\sin(2\theta),\\ s_3=\sin(2\beta).\end{cases}\tag{18}$$

将参量 s_0,s_1,s_2,s_3 作为四元数的 4 个数元，则得到另一种偏振光的四元数表示

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}=s_0+\boldsymbol{e}_1s_1+\boldsymbol{e}_2s_2+\boldsymbol{e}_3s_3=1+\boldsymbol{e}_1s_1+\boldsymbol{e}_2s_2+\boldsymbol{e}_3s_3.\tag{19}$$

3.3 两种四元数表示等价性证明

对比(15)式和(19)式可知，两种四元数表示之间有明显差别，但是，这种差别是形式上的，本质上两者是等价的。论证如下：

1) 根据(16)式和(18)式，可以得到两种表示的数元之间存在对应关系

$$\rho=s_1,\ \mu=-s_3,\ \nu=s_2.\tag{20}$$

也就是说，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}$ 之间存在直接对应的关系，给定了 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$ 就给定了 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}$，反之亦然。

2) 应当指出，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}$ 中 $s_0=1$，与光的强度相关，描述偏振态的是它的矢量部分

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}})=\boldsymbol{e}_1s_1+\boldsymbol{e}_2s_2+\boldsymbol{e}_3s_3.\tag{21}$$

由 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$ 可以得到 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}})$，作如下简单的变换

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}\rightarrow\boldsymbol{Q}'_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\rho+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\mu+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\nu=\boldsymbol{e}_1\rho+\boldsymbol{e}_2\nu-\boldsymbol{e}_3\mu.\tag{22}$$

将(20)式代入，就得到

$$\boldsymbol{Q}'_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{e}_1s_1+\boldsymbol{e}_2s_2+\boldsymbol{e}_3s_3=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}),\tag{23}$$

同理，也可以从 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}})$ 通过简单变换得到 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$，即(15)式和(19)式给出的两种四元数表示是等价的。

(22)式的变换是右乘以 $\boldsymbol{e}_1$，相当于单位四元数球面上的点的四元数坐标变换，实质上是给与此单位四元数球面重合的 Poincare 球面上的点重新赋值，这样就得到偏振光的另一个四元数表示。如果右乘的不是 $\boldsymbol{e}_1$，而是其他的单位四元数，那么又会得到一个新的四元数表示，这些不同的表示都是等价的。这就是说，偏振光的四元数表示不是唯一的，可以根据情况选择某种表示。由于斯托克斯参量是广泛使用的偏振光的参量，故下面的讨论选择 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}$ 表示，在这种表示基础上确定偏振器件和系统的四元数处理方法。

4 偏振器件和系统的四元数表示

4.1 两种主要偏振器件的四元数表示

物理学中应用四元数有一个优点，即在很多情况下它既可以表示物理量本身，又可以表示物理量的变换。例如，力学中四元数可以作为描述刚体方位的参数，又可以作为表示刚体转动的变换因子[7]；狭义相对论中四元数可以表示时空坐标等物理量，又可以表示时空坐标变换，如空间转动和洛仑兹变换[1]。在偏振光学中应用四元数方法，仍然能够保留这个优点，既可以用四元数表示光的偏振态，又可以用四元数表示偏振器件和系统对偏振光的变换作用[12-14]。

1) 旋转角为 ψ 的旋光器件

以 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{o}}$ 分别表示入射和出射的偏振光，$\boldsymbol{R}$ 表示旋光器件的作用，则变换关系为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{o}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}\overline{\boldsymbol{R}},\tag{24}$$

式中

$$\boldsymbol{R}=\cos\psi+\boldsymbol{e}_3\sin\psi,\tag{25}$$

$\boldsymbol{R}$ 为单位四元数。

2) 快轴方位角为 φ 延迟相位差为 Δ 的延迟器件

以 $\boldsymbol{B}$ 表示延迟器件的作用，则偏振光的变换关系为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}\bar{\boldsymbol{B}}, \tag{26}$$

式中

$$\boldsymbol{B} = \cos\frac{\Delta}{2} - [\boldsymbol{e}_1\cos(2\varphi) + \boldsymbol{e}_2\sin(2\varphi)]\sin\frac{\Delta}{2}, \tag{27}$$

$\boldsymbol{B}$ 也为单位四元数。(24)式和(26)式都是四元数表示的旋转变换，在刚体力学和狭义相对论中都有相似形式的变换。

上述两种偏振器件的偏振光的变换作用，可以统一表示为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}\bar{\boldsymbol{P}}, \tag{28}$$

式中

$$\boldsymbol{P} = p_0 + \boldsymbol{e}_1 p_1 + \boldsymbol{e}_2 p_2 + \boldsymbol{e}_3 p_3, \tag{29}$$

$\boldsymbol{P}$ 为单位四元数，即

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \tag{30}$$

当 $p_1 = p_2 = 0$ 时，$\boldsymbol{P}$ 表示旋光器件；当 $p_3 = 0$ 时，$\boldsymbol{P}$ 表示延迟器件。

4.2 偏振系统的四元数表示和等效定理

设由 N 个偏振器件串列组成偏振系统，第 k 个器件的四元数表示为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_k = p_{k0} + \boldsymbol{e}_1 p_{k1} + \boldsymbol{e}_2 p_{k2} + \boldsymbol{e}_3 p_{k3}, \\ &p_{k0}^2 + p_{k1}^2 + p_{k2}^2 + p_{k3}^2 = 1. \end{aligned} \tag{31}$$

连续利用(28)式，得到系统对偏振光的变换作用，表示为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{P}_N\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}\bar{\boldsymbol{P}}_1\bar{\boldsymbol{P}}_2\cdots\bar{\boldsymbol{P}}_N. \tag{32}$$

系统总的变换作用由下列合成四元数表示

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_N\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = p_0 + \boldsymbol{e}_1 p_1 + \boldsymbol{e}_2 p_2 + \boldsymbol{e}_3 p_3. \tag{33}$$

根据四元数乘积的共轭变换规则，有

$$\bar{\boldsymbol{P}} = \bar{\boldsymbol{P}}_1\bar{\boldsymbol{P}}_2\cdots\bar{\boldsymbol{P}}_N, \tag{34}$$

故(32)式可以写成与(28)式相同的形式，而且由于每个器件的四元数都是单位四元数，故它们的乘积(合成四元数)也是单位四元数。

在偏振系统的研究中，存在一个系统的等效变换和简化问题，即偏振系统是否与一个偏振器件等价的问题，这个问题已经由 Poincare 和 Jones 证明的等效定理所解决，利用四元数表示可以给这个等效定理以新的简捷的证明[13−14]。

对于组成系统的每一个器件都是旋光器件的情况，即

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{R}_k = \cos\psi_k + \boldsymbol{e}_3\sin\psi_k,\ k = 1,2,\cdots,N. \tag{35}$$

代入(31)式，直接计算可以得到

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} = \cos\psi + \boldsymbol{e}_3\sin\psi, \tag{36}$$

式中

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_N. \tag{37}$$

即全部由旋光器件组成的系统与一个旋光器件等效，合成旋光器件的旋转角等于全部旋光器件旋转角的代数和。

对于除了上述特殊情况外的一般情况，系统由旋光器件和延迟器件组成或者全部由延迟器件组成，这样的系统不能等效于一个旋光器件或一个延迟器件，但是能够证明它与一个旋光器件和一个延迟器件组成的简单系统等效。设等效的简化系统由一个旋光器件串列一个延迟器件组成，即(33)式的合成四元数

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R} = r_0 + \boldsymbol{e}_3 r_3, \\ &\boldsymbol{B} = b_0 + \boldsymbol{e}_1 b_1 + \boldsymbol{e}_2 b_2, \end{aligned} \tag{38}$$

式中，r_0、r_3、b_0、b_1、b_2 可利用四元数表示计算求得，即

$$\begin{aligned} &r_0 = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + p_3^2}},\ r_3 = \frac{p_3}{\sqrt{p_0^2 + p_3^2}}, \\ &b_0 = \sqrt{p_0^2 + p_3^2},\ b_1 = \frac{p_0 p_1 - p_2 p_3}{\sqrt{p_0^2 + p_3^2}}, \\ &b_2 = \frac{p_0 p_2 + p_1 p_3}{\sqrt{p_0^2 + p_3^2}}. \end{aligned} \tag{39}$$

根据(25)式和(27)式，等效系统的旋光器件旋转角，以及延迟器件方位角和延迟相位为

$$\begin{aligned} &\psi = \arctan(p_3/p_0), \\ &\Delta = 2\arccos\sqrt{p_0^2 + p_3^2}, \\ &\varphi = \frac{1}{2}\arctan\frac{p_0 p_2 + p_1 p_3}{p_0 p_1 - p_2 p_3}. \end{aligned} \tag{40}$$

上述利用四元数方法对等效定理的再证明简单明晰，说明在理论表述方面四元数表示确实存在优势。

5 偏振光学中的四元数矩阵算法

5.1 Mueller 矩阵的计算

四元数乘积本来是不可交换的，但写成矩阵形式并引入蜕变矩阵后，就得到形式上的交换性，这就使得四元数算法在实用上具有很大的优越性[7−8]。例如，从(24)～(29)式，可以直接计算得到偏振器件和系统的 Mueller 矩阵。

对旋光器件，(24)式的矩阵形式为

$$[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{o}}] = [\boldsymbol{R}][\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}][\bar{\boldsymbol{R}}] = [\boldsymbol{R}][\bar{\boldsymbol{R}}]^*[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}}]. \tag{41}$$

将(25)式代入，得到旋光器件的 Mueller 矩阵为

$$[\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}] = [\boldsymbol{R}][\bar{\boldsymbol{R}}]^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\psi) & -\sin(2\psi) & 0 \\ 0 & \sin(2\psi) & \cos(2\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

对延迟器件，(26)式的矩阵形式为

$$[\boldsymbol{Q}_s^o]=[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{Q}_s^i][\bar{\boldsymbol{B}}]=[\boldsymbol{B}][\bar{\boldsymbol{B}}]^*[\boldsymbol{Q}_s^i].\quad(43)$$

将(27)式代入，得到延迟器件的 Mueller 矩阵为

$$[\boldsymbol{M}_b]=[\boldsymbol{B}][\bar{\boldsymbol{B}}]^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_2^2+s_2^2\beta & c_2s_2(1-\beta) & -s_2\mu\\ 0 & c_2s_2(1-\beta) & s_2^2+c_2^2\beta & c_2\mu\\ 0 & s_2\mu & -c_2\mu & \beta\end{bmatrix},\quad(44)$$

式中 $s_2=\sin(2\varphi)$，$c_2=\cos(2\varphi)$，$\mu=\sin\Delta$，$\beta=\cos\Delta$。通过相同的途径，得到偏振系统的 Mueller 矩阵为

$$[\boldsymbol{M}_s]=[\boldsymbol{P}][\bar{\boldsymbol{P}}]^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_0^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2 & 2(p_1p_2-p_0p_3) & 2(p_0p_2+p_1p_3)\\ 0 & 2(p_0p_3+p_1p_2) & p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2 & 2(p_2p_3-p_0p_1)\\ 0 & 2(p_1p_3-p_0p_2) & 2(p_0p_1+p_2p_3) & p_0^2-p_1^2-p_2^2+p_3^2\end{bmatrix}.\quad(45)$$

(42)式、(44)式和(45)式给出了四元数表示和 Mueller 矩阵之间的变换关系。

5.2 四元数矩阵算法的优化

利用(45)式计算系统的 Mueller 矩阵的前提是由(33)式计算合成四元数，该式的矩阵形式为

$$[\boldsymbol{P}]=[\boldsymbol{P}_N]\cdots[\boldsymbol{P}_2][\boldsymbol{P}_1],\quad(46)$$

在实际偏振系统中，有些器件是给定不变的，有些器件是可调变化的，如果能够将变化的器件分离出来，会简化计算机计算过程。而利用四元数矩阵乘法的有条件交换性，可以实现这个分离，并将变化器件的矩阵移动到最后。假设 N 个器件中第 j 个器件是变化的，这时可以将(46)式改写为

$$[\boldsymbol{P}]=[\boldsymbol{P}_N]\cdots[\boldsymbol{P}_{j+1}][\boldsymbol{P}_{j-1}]^*\cdots[\boldsymbol{P}_2]^*[\boldsymbol{P}_1]^*[\boldsymbol{P}_j]=[\boldsymbol{P}'][\boldsymbol{P}_j],\quad(47)$$

式中

$$[\boldsymbol{P}']=[\boldsymbol{P}_N]\cdots[\boldsymbol{P}_{j+1}][\boldsymbol{P}_{j-1}]^*\cdots[\boldsymbol{P}_2]^*[\boldsymbol{P}_1]^*.\quad(48)$$

$[\boldsymbol{P}']$是不变的，可以预先计算出来存储备用，这样处理有利于实际计算的进行。这是四元数矩阵运算的一种优化处理，或者说，是偏振光学中四元数方法的一种优越性。

另一方面，由于四元数既能表示为方阵，又能表示为列阵，故(47)式可以等价地写成

$$\{\boldsymbol{P}\}=[\boldsymbol{P}_N]\cdots[\boldsymbol{P}_{j+1}][\boldsymbol{P}_{j-1}]^*\cdots[\boldsymbol{P}_2]^*[\boldsymbol{P}_1]^*\{\boldsymbol{P}_j\}=[\boldsymbol{P}']\{\boldsymbol{P}_j\}.\quad(49)$$

这样处理也是一种优化，将减少实际计算工作量、节省机时，这也是偏振光学中四元数方法的一种优越性。

如果实际偏振系统在运行时，入射偏振光是变化的，则可将(32)式写成如下矩阵形式

$$\{\boldsymbol{Q}_s^o\}=[\boldsymbol{P}_N]\cdots[\boldsymbol{P}_2][\boldsymbol{P}_1][\bar{\boldsymbol{P}}_1]^*[\bar{\boldsymbol{P}}_2]^*\cdots[\bar{\boldsymbol{P}}_N]^*\{\boldsymbol{Q}_s^i\}=[\boldsymbol{P}][\bar{\boldsymbol{P}}]^*\{\boldsymbol{Q}_s^i\},\quad(50)$$

这里综合利用了上述两种优化处理。

6 结　　论

系统研究和深入讨论了偏振光学中的四元数方法，得到了如下结果：

1）给出分别在 Poincare 球表示和斯托克斯参量基础上导出的偏振光的两种四元数表示，证明了两种表示的等价性，同时指出偏振光四元数表示的多样性；

2）利用四元数既可以作为状态变量，又可以描述状态变换的特性，在斯托克斯参量导出的偏振光四元数表示的基础上，得到偏振器件和系统的四元数表示，并利用这种表示再次证明了偏振系统的等效定理，导出了偏振系统的简化结果，体现了四元数表示在理论表述上的特点和优势；

3）从四元数表示导出了偏振器件和系统的 Mueller 矩阵，给出了四元数表示和 Mueller 矩阵之间的变换关系；

4）利用四元数矩阵表示既可以是列阵也可以是方阵，并且四元数矩阵乘法具有条件交换性的特点，讨论了如何优化偏振光学中四元数矩阵算法，表明了在偏振光学计算方面四元数方法的优越性。四元数算法在偏振光学以及相关技术中可以得到应用，具有较好的应用前景。

参　考　文　献

1 P R Girard. The quaternion group and modern physics[J]. Eur J Phys, 1984, 5(1): 25－32.

2 A Waser. Application of bi-quaternions in physics [J/OL]. 2007, www. Andre-waser. ch/pulications/Application of Bi-

quaternions in physics.
3 S De Jeo, G Ducati. Quaternionic groups in physics: a panoramic review[J]. Int J Theor Phys, 1999, 38: 2179－2220.
4 A P Yefremov. Quaternions: algebra, geometry and physical theories[J]. Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, 2004, 1(1): 104－119.
5 Ding Guangtao. Bi-quaternion form of electromagnetism thoery [J]. Scientia Sinica Physica, Mechanic & Astronomica, 2012, 42(10): 1029－1039.
丁光涛. 双四元数形式的电磁理论[J]. 中国科学:物理学 力学 天文学,2012, 42(10): 1029－1039.
6 Xu Fangguan. Quaternion Physics [M]. Beijing: Beijing University Press, 2012.
许方官. 四元数物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.
7 Xiao Shangbin. The method of quaternion and its application[J]. Advances in Mechanics, 1993, 23(2): 249－260.
肖尚彬. 四元数方法及其应用[J]. 力学进展, 1993, 23(2): 249－260.
8 B P Ickes. A new method for performing digital control system attitude computations[J]. AIAA J, 1970, 8(1): 13－17.
9 Liao Yanbiao. Polarization Optics[M]. Beijing: Science Press, 2003. 45－63.
廖延彪. 偏振光学[M]. 北京: 科学出版社, 2003. 45－53.
10 M Richartz, H Y Hsu. Analysis of elliptical polarization[J]. J Opt Soc Am, 1949, 39(2): 136－157.
11 J Cernosec Simple geometrical method for analysis of elliptical polarization [J]. J Opt Soc Am, 1971, 61(3): 324－327.
12 Ding Guangtao. Quaternion representation of polarized light [J]. Huanghuai Journal, 1993, 9(1): 43－48.
丁光涛. 偏振光的四元数表示[J]. 黄淮学刊, 1993, 9(1): 43－48.
13 Ding Guangtao. Quaternion representations of polarizing devices [J]. Huanghuai Journal, 1993, 9(2): 23－30.
丁光涛. 偏振器件的四元数表示[J]. 黄淮学刊, 1993, 9(2): 23－30.
14 Ding Guangtao. A quaternion representation of polarization optics [J]. Journal of Anhui Normal University (Natural Science), 1993, 16(1): 31－38.
丁光涛. 偏振光的四元数表示 [J]. 安徽大学学报(自然科学版), 1993, 16(1): 31－38.
15 Wang Haixia, Ding Chaoliang, Zhang Yongtao, *et al*.. Polarization properties of spatially and spectrally partially coherent electromagnetic Hermite-Gaussian pulsed beams [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(3): 0326001.
王海霞, 丁超亮, 张永涛, 等. 部分空间相干部分光谱相干厄米-高斯脉冲电磁光束的偏振特性 [J]. 光学学报, 2011, 31(3): 0326001.
16 Leng Mei, Yang Yanfang, He Ying, *et al*.. Effect actors of the focal shift in spatial-variant polarized vector beams [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(5): 0526001.
冷 梅, 杨艳芳, 何 英, 等. 影响空间变化偏振矢量光束强聚焦后焦斑移位的因素[J]. 光学学报, 2012, 32(5): 0526001.
17 Chang Qiang, Yang Yanfang, He Ying, *et al*.. Focusing features of concentric three-ring non-uniform mixing polarization vector beams [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(6): 0626001.
常 亮, 杨艳芳, 何 英, 等. 三环非均匀混合偏振同轴矢量光束的聚焦特性[J]. 光学学报, 2012, 32(6): 0626001.

栏目编辑: 张 腾