

# 基于矩阵填充的相位检索

张 芬 张 成 程 鸿 沈 川 韦 穗

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

**摘要** 相位检索利用直接测量得到的强度分布恢复相位信息, 从而重建波函数, 是光学和图像处理中的重要研究方向。提出衍射成像中新的利用相位掩模的结构光照明设置, 在这种新的设置中, 物体和掩模紧贴在一起, 并且相互之间的位置可以互换, 采用多结构光照明, 收集多个不同的衍射图样, 在没有信号额外信息情况下求解相位。模拟实验结果表明, 这种新的设置形式简单, 可以成功地实现相位检索。此外, 提出应用托普利兹掩模和循环掩模收集衍射图样以检索相位, 它们比二进制掩模需要收集更少的衍射图样; 与高斯掩模需要收集的衍射图样数目相当, 但是物理上比高斯掩模更易于实现。

**关键词** 图像处理; 相位检索; 矩阵填充; 多结构光照明; 相位提升; 相位掩模

**中图分类号** O439 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.0711002

## Phase Retrieval Based on Matrix Completion

Zhang Fen Zhang Cheng Cheng Hong Shen Chuan Wei Sui

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract** Phase retrieval technique using the directly measured intensity distribution to recover phase information and reconstruct the wave function is an important research area of optics and image processing. A new setup for structured illuminations in diffraction imaging is proposed. In the new setup, the object is placed against the mask, and mutual position can be interchanged. Multiple structured illuminations are used to collect several diffraction patterns. In the absence of extra information of the signal, the phase information is obtained. Simulation results show that the new setup is simple, and can achieve the success of phase retrieval. In addition, the Toeplitz mask and circulant mask are used to collect diffraction patterns for phase retrieval. The two masks need to collect fewer diffraction patterns than binary mask does and need to collect diffraction patterns as many as Gaussian mask does. Compared with Gaussian mask, the two masks are easy to realize in physics.

**Key words** image processing; phase retrieval; matrix completion; multiple structured illuminations; phase lift; phase mask

**OCIS codes** 100.5070; 100.3010; 110.2945; 110.7348

## 1 引 言

在成像、遥感和图像处理问题中, 探测器仅仅能够记录一个物体散射光源的傅里叶变换或者频谱, 得到其强度分布。相位检索技术是指利用直接测量得到的强度分布来恢复相位, 从而重建波函数, 在光

学<sup>[1-2]</sup>、量子力学<sup>[3]</sup>和显微镜学<sup>[4]</sup>等领域有着广泛的应用。

1972 年, Gerchberg 等<sup>[5]</sup>提出了 Gerchberg-Saxton 算法(简称 GS 算法), 基本思想是利用已知的信息或约束在图像空间与傅里叶空间之间迭代求

**收稿日期**: 2013-01-15; **收到修改稿日期**: 2013-03-14

**基金项目**: NSFC-广东联合基金(U1201255)、高等学校博士学科点专项科研基金优先发展领域(20113401130001)、安徽高校省级自然科学研究重点项目(KJ2011A005)、安徽大学青年科学研究基金(KJQN1120)

**作者简介**: 张 芬(1980—), 女, 博士研究生, 讲师, 主要从事信号与信息处理与相位恢复等方面的研究。

E-mail: fenzhang2003@163.com

**导师简介**: 韦 穗(1946—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理与三维全息显示等方面的研究。

E-mail: swei@ahu.edu.cn

解。Fienup 等<sup>[6]</sup>提出各种改进算法,例如错误减少算法(ER)。迭代算法依赖于信号额外的信息,如非零支撑、非负性和频带限制等<sup>[7]</sup>。

在很多实际感兴趣的问题中,往往希望从一个低秩矩阵的子采样中将该矩阵恢复出来,称之为矩阵填充(MC)<sup>[8,9]</sup>,例如著名的 Netfilx 问题。矩阵填充在机器学习<sup>[10]</sup>、控制<sup>[11]</sup>和计算机视觉<sup>[12]</sup>中应用广泛,引起研究者们极大的关注和兴趣。

压缩感知(CS)是 Candès 等<sup>[13-14]</sup>提出的一种新兴采样理论,CS 的研究思想挑战了传统的 Shannon/Nyquist 采样定理,提出信号的采样与压缩同时进行,使得采样频率大大降低。CS 理论已用于成像<sup>[15]</sup>、图像重构<sup>[16-17]</sup>等多个领域,基于矩阵填充的相位检索技术正是 CS 技术应用类型的扩展<sup>[18]</sup>。

基于矩阵填充的相位检索方法<sup>[19]</sup>与迭代算法不同,考虑没有任何额外信息约束的信号相位检索问题,通过相位提升(PL),将满足相位检索方程的二次约束(QC)问题提升为一个秩为 1 的矩阵的仿射约束问题,采用多结构光照明(MSI),通过解决一个简单的凸优化问题高概率的恢复相位。目前国内还没有相关的文献发表。

本文对已有的衍射成像中利用相位掩模的结构光照明设置<sup>[19]</sup>进行改进。原设置中,物体和掩模之间有一定距离,收集的衍射图样形式复杂。新的设置采用物体和掩模紧贴放置,无论掩模放置在物体前面或后面,都可以收集到等值的衍射图样,使得收集到的衍射图样形式简单。实验结果表明新的设置是可行的,对于实际的物理实现具有重要意义。此外,提出利用托普利兹掩模和循环掩模记录物体的衍射图样,模拟实验表明它们能成功地实现相位检索,并且比目前已有文献中所用的高斯掩模或二进制掩模具有更优越的特性。

## 2 基于矩阵填充的相位检索方法

### 2.1 矩阵填充

矩阵填充考虑假设从一个矩阵随机的观察部分元素,如何将该矩阵未知的元素恢复出来的问题。矩阵填充问题描述如下:假设未知矩阵  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$  是低秩的,秩  $r \ll \min\{n_1, n_2\}$ ,观察元素的集合  $E \subseteq [n_1] \times [n_2]$  已知。令  $\mathbf{X}$  为  $n_1 \times n_2$  阶并包含集合  $E$  所有观察元素的矩阵,即  $\mathbf{X}$  满足

$$X_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & (i, j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

矩阵填充问题是从已知的观察矩阵  $\mathbf{X}$  和集合  $E$  寻找原始矩阵  $\mathbf{M}$  的低秩估计。解决下面的优化问题将会精确的恢复原始矩阵:

$$\begin{cases} \text{minimize} & R_{\text{rank}}(\mathbf{X}) \\ \text{subject to} & X_{ij} = M_{ij}, \quad (i, j) \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

minimize 和 subject to 分别表示最小化和约束于,  $R_{\text{rank}}(\mathbf{X})$  表示  $\mathbf{X}$  的秩。Candès 等<sup>[8]</sup>介绍了(2)式问题的一个凸松弛和不相干的概念,证明了对于一个秩为  $r$  的矩阵  $\mathbf{M}$  具有不相干特性,如果观察元素的数目  $|E|$  满足  $|E| \geq Cn^{1.2}r \lg n$ ,其中  $C$  表示正常数,  $n = \max(n_1, n_2)$  为矩阵尺寸,解决凸松弛问题可以高概率恢复未知矩阵。由于(2)式求秩最小化一般是 NP-难问题,即时间复杂度高,难以找到多项式算法解决的问题。可用核范数逼近(2)式求解,并推广到一般线性约束问题。矩阵填充的一般问题可表述为

$$\begin{cases} \text{minimize} & \|\mathbf{X}\|_* \\ \text{subject to} & A(\mathbf{X}) = \mathbf{b} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $A$  表示线性投影  $\mathbf{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , 向量  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^p$  已知,  $\|\mathbf{X}\|_*$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的核范数,即  $\mathbf{X}$  奇异值的和。目前有很多有效的算法解决(3)式低秩矩阵填充问题,如 SVT 算法<sup>[20]</sup>、FPCA 算法<sup>[21]</sup>、OptSpace 算法<sup>[22]</sup>等。

### 2.2 相位掩模

目前文献中采用的相位掩模-高斯矩阵  $\boldsymbol{\varphi}_{\text{Gauss}}$  是  $d_1 \times d_2$  大小的矩阵,其元素服从  $N(0, 1)$  高斯分布,有  $d_1 \times d_2$  个自由元素。高斯矩阵随机性好,但是其独立元素太多,不利于相位掩模的物理实现或物理制造的成本太高,不能大规模地使用。而这里提出的相位掩模-确定性矩阵  $\boldsymbol{\varphi}_{\text{Toeplitz}}$  和  $\boldsymbol{\varphi}_{\text{circulant}}$  分别只有  $d_1 + d_2 - 1$  和  $d_2$  个自由元素<sup>[23]</sup>,高斯、托普利兹和循环矩阵的具体形式分别为

$$\boldsymbol{\varphi}_{\text{Gauss}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,d_2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,d_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d_1,1} & a_{d_1,2} & \cdots & a_{d_1,d_2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\text{Toeplitz}} = \begin{bmatrix} a_{d_2} & a_{d_2-1} & \cdots & a_1 \\ a_{d_2+1} & a_{d_2} & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d_2+d_1-1} & a_{d_2+d_1-2} & \cdots & a_{d_1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\text{circulant}} = \begin{bmatrix} a_{d_2} & a_{d_2-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_{d_2} & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d_2-1} & a_{d_2-2} & \cdots & a_{d_2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

托普利兹矩阵和循环矩阵在各种应用中能很容易或者很自然地实现,减少独立随机变元个数的同时降低计算复杂度和硬件实现成本,因而更易于相位掩模元件的制造加工。

### 2.3 相位检索方法

设物体抽象为  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$  或  $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$  (或更高维形式), X 光束照射到物体上,通过图 1 中所示的相位掩模  $w[t]$  结构光照明,  $w[t]$  也可以是光栅等。通过探测器收集  $w[t]\mathbf{x}_0[t]$  的衍射图样,即记录了强度

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \{|\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}_0 \rangle|^2 : k = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7)$$

式中  $m$  表示总测量值的个数, 波形  $\mathbf{a}_k[t] \propto w[t] \exp(i2\pi\langle \omega_k, t \rangle)$ ,  $\propto$  表示正比于, 指数函数上标中的  $\omega_k$  是一个使  $\mathbf{a}_k[t]$  为复正弦形式的频率值, 且  $\mathbf{a}_k$  满足  $\|\mathbf{a}_k\|_2^2 = \sum_t |\mathbf{a}_k[t]|^2 = 1$ 。相位检索问题的目标是通过已知的  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$  恢复  $\mathbf{x}_0$ 。因此相位检索成为一个可行性问题:

$$\begin{cases} \text{find} & \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) := \mathbf{b}, \end{cases} \quad (8)$$

式中  $:=$  表示其前后的式子等价,  $\mathbf{b}$  表示多次测量得到的总的强度值。对(7)式中二次测量进行变换,即

$$|\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle|^2 = T_{\text{trace}}(\mathbf{x}^* \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^* \mathbf{x}) = T_{\text{trace}}(\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^* \mathbf{x} \mathbf{x}^*) := T_{\text{trace}}(\mathbf{A}_k \mathbf{X}), \quad (9)$$

式中  $T_{\text{trace}}(\mathbf{X})$  表示  $\mathbf{X}$  的迹, 即  $\mathbf{X}$  的特征值的和。矩阵  $\mathbf{A}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^*$  和  $\mathbf{X} = \mathbf{x} \mathbf{x}^*$  的秩为 1。设  $A$  为将正半定矩阵映射到  $\{T_{\text{trace}}(\mathbf{A}_k \mathbf{X}) : k = 1, \dots, m\}$  的线性算子。因此(8)式等价于

$$\begin{cases} \text{minimize} & T_{\text{rank}}(\mathbf{X}) \\ \text{subject to} & \mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{X} \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\mathbf{X} \geq 0$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  半正定, 其所有特征值非负。(10)式是一个 NP-难的问题, 可以用迹范数代替(10)式求解, 考虑有噪声的情况, 有

$$\begin{cases} \text{minimize} & T_{\text{trace}}(\mathbf{X}) \\ \text{subject to} & \|\mathbf{A}(\mathbf{X}) - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon, \quad \mathbf{X} \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

$\epsilon$  是一个处理噪声情况的常数, 通过求解(11)式可以得到解  $\hat{\mathbf{X}}^{[24]}$ , 将  $\hat{\mathbf{X}}$  写作

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \hat{\mathbf{a}}_j \hat{\mathbf{a}}_j^*, \quad \hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p \geq 0, \quad (12)$$

式中  $\hat{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots, p$  表示  $\hat{\mathbf{X}}$  的  $p$  个特征值, 并且值按降序排列。抽取  $\hat{\mathbf{X}}$  最大的秩 1 的元素估计  $\mathbf{x}$ , 得到相位检索问题的解为  $\mathbf{x} = \sqrt{\hat{\lambda}_1} \hat{\mathbf{a}}_1$ 。

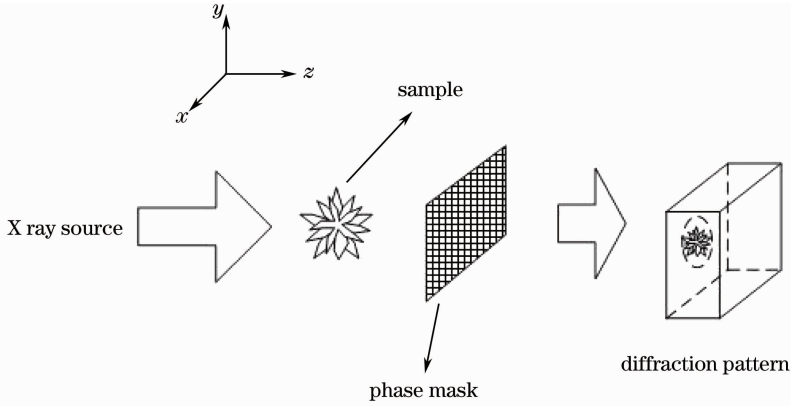


图 1 衍射成像中利用相位掩模的结构光照明设置

Fig. 1 Setup for structured illuminations in diffraction imaging using a phase mask

### 3 基于新的结构光照明设置的相位检索方法

这里给出新的结构光照明设置, 如图 2 所示。在图 2 结构光照明设置中, 一个已知结构的掩模与物体紧贴在一起, 无论掩模紧贴在物体的前面还是紧贴在物体的后面, 都可以收集到同样的衍射图样。

这里给出图 2 结构光照明设置下的 QC 表示。设光沿 Z 轴方向传播, 仍假设物体抽象为  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$  或  $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ ,  $w[t]$  为相位掩模, 波形  $\mathbf{a}_k[t] \propto w[t]$ 。可以得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \{|\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_0 \rangle|^2 : k = 1, 2, \dots, m\}, \quad (13)$$

式中的波形  $\mathbf{a}_k[t]$  的形式更为简单, 有利于相位的求解。对(13)式中二次测量做变换, 即

$$|\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{x} \rangle|^2 = T_{\text{trace}}(\mathbf{x}^* \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^* \mathbf{x}) = T_{\text{trace}}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^* \mathbf{x} \mathbf{x}^*) := T_{\text{trace}}(\mathbf{B}_k \mathbf{X}), \quad (14)$$

式中矩阵  $\mathbf{B}_k = \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^*$  和  $\mathbf{X} = \mathbf{x} \mathbf{x}^*$  的秩为 1。将(10)式中的  $\mathbf{A}$  重新定义为将正半定矩阵映射到  $\{T_{\text{trace}}(\mathbf{B}_k \mathbf{X}) : k = 1, \dots, m\}$  的线性算子, 利用上述 QC 方法同样的步骤求解(11)式即可以恢复原物体  $\mathbf{x}_0$ 。

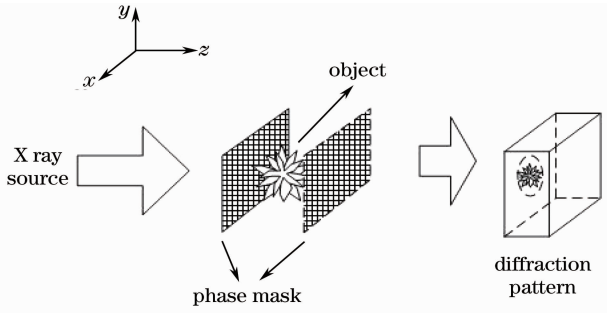


图 2 衍射成像中新的利用相位掩模的结构照明设置  
Fig. 2 New setup for structured illuminations in diffraction imaging using a phase mask

## 4 实 验

模拟实验中设初始信号为  $\mathbf{x}$ , 根据图 2 所示的结构照明设置经多次测量记录强度值  $\mathbf{b}$ , 由已知  $\mathbf{b}$  值重构原信号, 重构的信号记为  $\hat{\mathbf{x}}$ . 为了测试含噪声情况下的重构, 实验中给测量的  $\mathbf{b}$  值加上不同信噪比(SNR)值的高斯白噪声, 并定义重构信号的 SNR<sup>[24]</sup> 为

$$R_{\text{SN}} = 10 \lg \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2}. \quad (15)$$

实验中, 当相对残差  $\|A(\mathbf{x}\mathbf{x}^*) - \mathbf{b}\| / \|\mathbf{b}\| \leq 10^{-6}$  时迭代终止, 认为重构成功. 所用掩模尺寸为  $N \times s$ ,  $N$  为测试信号长度,  $s$  是掩模数目. 实验分别对一维(1D)信号和二维信号模拟仿真.

### 4.1 一维信号仿真

模拟实验中, 首先对信号处理中常见的实指数信号  $x = 0.9^N$  重构, 信号长度  $N = 64$ . 图 3(a) 是采用 5 个高斯掩模, 8 个二进制掩模, 5 个托普利兹掩模, 5 个循环掩模的重构结果, 可见各个掩模均能成功的重构. 图 3(b) 是采用 5 个高斯掩模, 5 个二进制掩模, 5 个托普利兹掩模, 5 个循环掩模的重构结果. 由图 3(b) 小方框中的细节可以明显地看出, 5 个二进制掩模重构结果与原信号有很大误差, 重构失败.

一维复信号选择的是长度  $N = 128$  的随机信号, 其实部与虚部都是随机高斯信号, 5 个高斯掩模, 8 个二进制掩模, 5 个托普利兹掩模和 5 个循环掩模分别用于重构. 该信号和不同掩模下重构信号的实部和虚部分别如图 4(a)、(b) 所示.

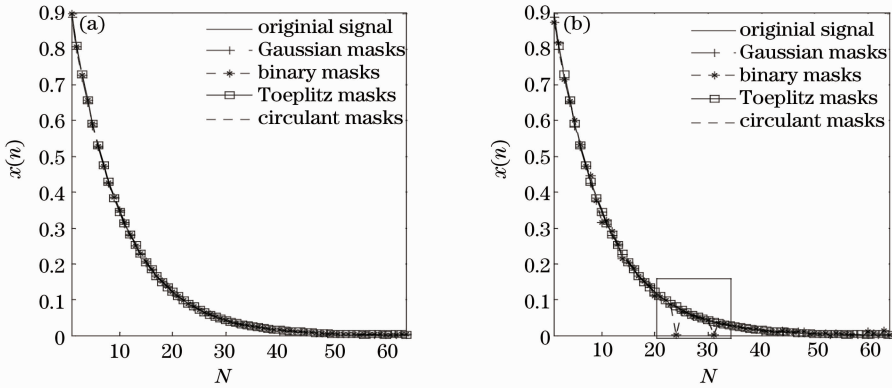


图 3 一维实信号及其重构信号。(a) 二进制掩模重构成功; (b) 二进制掩模重构失败

Fig. 3 1D real signal and its reconstruction. (a) Successful reconstruction using binary masks; (b) failed reconstruction using binary masks

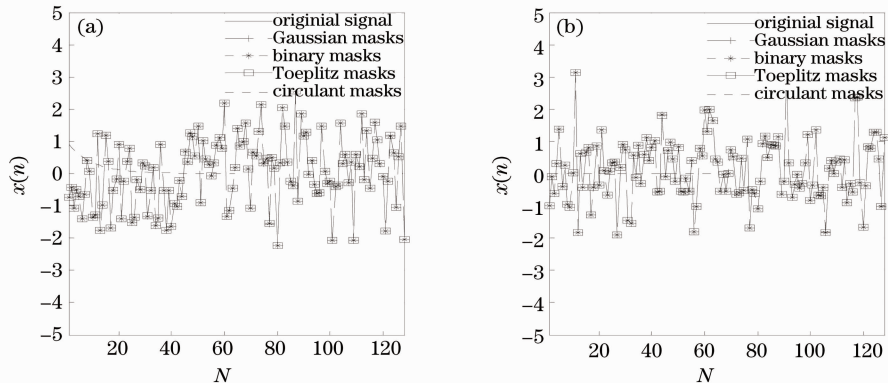


图 4 一维复信号重构。(a) 实部; (b) 虚部

Fig. 4 Reconstruction of 1D complex signal. (a) Real part; (b) imaginary part

由上述实验结果分析可知,同等数目的托普利兹掩模和循环掩模与随机高斯掩模可以成功重构原信号,而二进制掩模则需要测量更多的强度值才能成功重构。

对于含噪声测量的重构,实验仍采用上述同样的随机复信号。假设测量强度值  $b$  被 SNR 值为 50 dB 的高斯白噪声污染,获得新的强度值作为已知重构该复信号。表 1 给出了采用不同数目掩模,重构 10 次获得的平均的 SNR 值。当 SNR 值大于 35 dB 时认为重构成功,用  $\checkmark$  表示,反之认为重构失败,用  $\times$  表示。表 1 实验结果表明同等数目的托普利兹掩模、循环掩模与高斯掩模可以成功重构信号,而需要更多数目的二进制掩模才能成功重构。

图 5 给出了算法输入 SNR 和重构信号 SNR 的关系。实验中仍采用上述复信号,由 8 个托普利兹掩模

或 8 个循环掩模重构信号,测量强度的 SNR 值已知,根据(15)式计算重构信号的 SNR 值。实验中采用运行 100 次计算 SNR 的平均值。图 5(a)和 5(b)分别以输入 SNR 为横坐标,输出 SNR 为纵坐标,分别对应托普利兹掩模与循环掩模的测试结果。由图可见,输入 SNR 值与重构信号的 SNR 值呈线性关系,并且重构信号的 SNR 值比原 SNR 值有所提高。

表 1 不同掩模的重构结果比较

Table 1 Comparison of reconstruction results in different masks

Type of masks	Number of masks (a. u.)				
	4	5	6	7	8
Gaussian masks	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Binary masks	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Toeplitz masks	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Circulant masks	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

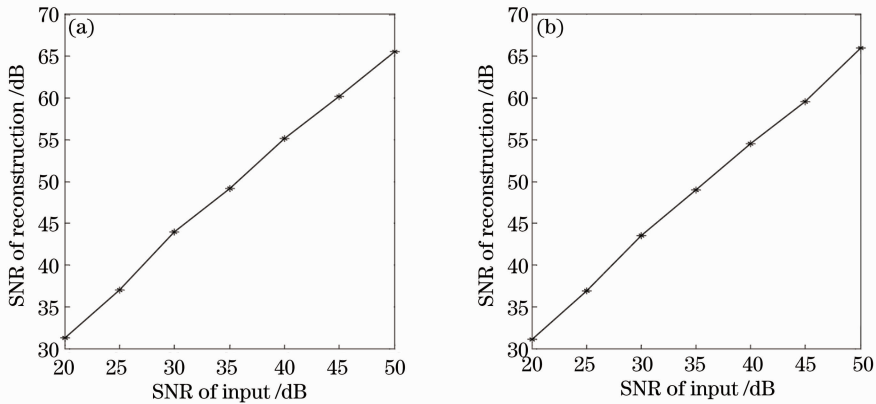


图 5 输入 SNR 和重构信号 SNR。(a) 8 个托普利兹掩模; (b) 8 个循环掩模

Fig. 5 SNR of input and SNR of reconstruction. (a) Eight Toeplitz masks; (b) eight circulant masks

#### 4.2 二维信号仿真

物平面的复振幅可记为  $x = \sqrt{I}\exp(i\varphi)$ , 其中  $\sqrt{I}$

表示振幅,  $\varphi$  为相位。二维信号仿真选择了一组  $64 \times 64$  的复值图像,图 6(a)是振幅,图 6(e)是相位,测量

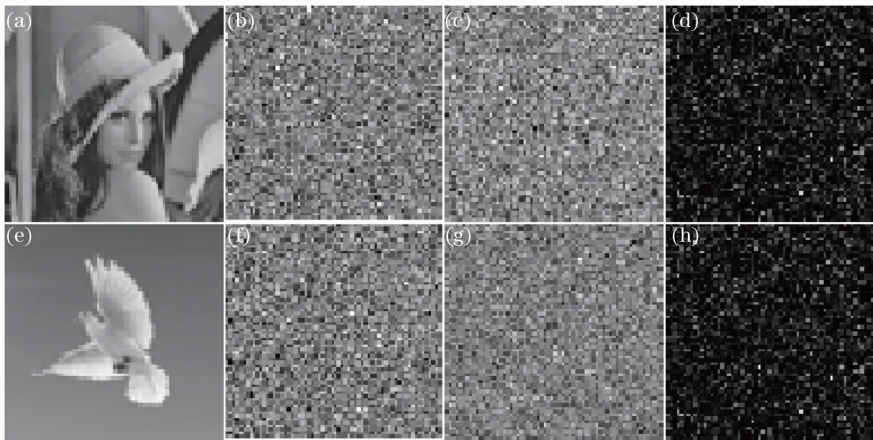


图 6 (a)原振幅和(e)相位;(b),(f)第一个高斯掩模;(c),(g)第二个高斯掩模;(d),(h)第一组和第二组强度值

Fig. 6 (a) Original amplitude and (e) phase; (b), (f) the first Gaussian mask; (c), (g) the second Gaussian mask; (d), (h) the first and the second intensity

是无噪声的。用 8 个高斯掩模重构,其中图 6(b)、(f) 分别是第一个高斯掩模的实部和虚部,图 6(c)、(g) 分别是第二个高斯掩模的实部和虚部,测量得到的强度值  $b_1$  和  $b_2$  如图 6(d)、(h) 所示。用 8 个高斯掩模,共记录 8 组  $64 \times 64$  的强度值,即强度值  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_8)$  矩阵的元素个数为  $64 \times 64 \times 8$ 。8 个高斯掩模、8 个托普利兹掩模和 8 个循环掩模重构得到的振幅分别如图 7(a)~(c) 所示,图 7(d)~(f) 分别对应重构的相位。

将上述测量的  $\mathbf{b}$  值加上不同 SNR 值的高斯白噪声,用托普利兹掩模重构。当高斯白噪声 SNR 为 50 dB 时,用 8 个托普利兹掩模重构,图 8(a)、(c) 分别是重构的振幅和相位,重构图像 SNR 为 103 dB。当高斯白噪声 SNR 为 20 dB 时,用 32 个托普利兹掩模重构,图 8(b)、图 8(d) 是分别是重构的振幅与相位,重构图像 SNR 为 120 dB。实验表明托普利兹掩模可以精确重构。

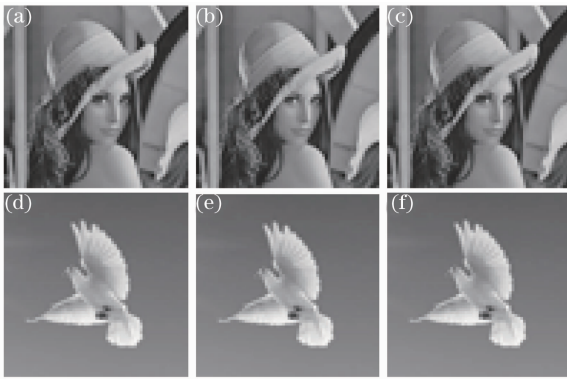


图 7 (a)~(c) 重构振幅;(d)~(f) 重构相位

Fig. 7 (a)~(c) Amplitude of reconstruction;  
(d)~(f) phase of reconstruction



图 8 (a)、(c) 噪声 SNR 为 50 dB 时重构振幅和相位;  
(b)、(d) 噪声 SNR 为 20 dB 时重构振幅和相位

Fig. 8 (a), (c) Amplitude and phase of reconstruction  
with  $R_{SN} = 50$ ; (b), (d) amplitude and phase of  
reconstruction with  $R_{SN} = 20$

## 5 结 论

本文提出衍射成像中新的利用相位掩模的结构光照明设置,能有效地实现物体相位重构,提出的托普利兹掩模和循环掩模比二进制掩模需要收集的衍

射图样的数目少得多,与高斯掩模相比所需数目是相当的,但是由于它们“不太随机”的特性,因此物理上更易于实现。下一步的研究工作是研究对于不同的输入信号,如何选择合适掩模重构,怎样才能用更少数目掩模有效重构,以及搭建实际的物理平台。

## 参 考 文 献

- Harrison R W. Phase problem in crystallography[J]. J Opt Soc Am A, 1993, 10(5): 1046–1055.
- Walther A. The question of phase retrieval in optics[J]. Opt Acta: Int J Opt, 1963, 10(1): 41–49.
- J V Corbett. The pauli problem, state reconstruction and quantum-real numbers[J]. Reports on Mathematical Physics, 2006, 57(1): 53–68.
- Miao J W, Ishikawa T, Shen Q, *et al.*. Extending X-ray crystallography to allow the imaging of noncrystalline materials, cells and single protein complexes[J]. Annual Review of Physical Chemistry, 2008, 59: 387–410.
- Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. Optik, 1972, 35(2): 237–246.
- Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. Appl Opt, 1982, 21(15): 2758–2769.
- Millane R P. Recent advances in phase retrieval[C]. SPIE, 2006, 6316: 63160E.
- Candès E J, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(6): 717–772.
- Keshavan R H, Montanari A, Oh S. Matrix completion from a few entries [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(6): 2980–2998.
- Amit Y, Fink M, Srebro N, *et al.*. Uncovering shared structures in multiclass classification [C]. Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning, 2007. 17–24.
- Mesbahi M, Papavassilopoulos G P. On the rank minimization problem over a positive semidefinite linear matrix inequality[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(2): 239–243.
- Tomasi C, Kanade T. Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method [J]. International Journal of Computer Vision, 1992, 9(2): 137–154.
- Candès E J. Compressive sampling[C]. Madrid: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006. 1433–1452.
- Donoho D. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289–1306.
- Zhang Cheng, Shen Chuan, Cheng Hong, *et al.*. Phase mask of sparse ternary Toeplitz matrix with random pitch in compressive imaging[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(2): 0211002.
- 张成, 沈川, 程鸿, 等. 随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵相位掩模压缩成像[J]. 光学学报, 2012, 32(2): 0211002.
- Lian Qiusheng, Xia Changcheng. Compressed sensing of color images based on local gaussian model in the dual-tree complex wavelet[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2011, 48(10): 101001.
- 练秋生, 夏长城. 基于双树复数小波局部高斯模型的彩色图像压缩感知[J]. 激光与光电子学进展, 2011, 48(10): 101001.
- Wu Yingchun, Wu Xuecheng, Wang Zhihua, *et al.*. Reconstruction of digital inline hologram with compressed sensing [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(11): 1109001.
- 吴迎春, 吴学成, 王智化, 等. 压缩感知重建数字同轴全息[J]. 光学学报, 2011, 31(11): 1109001.

- 18 Ohlsson H, Yang A Y, Dong R, *et al.*. Compressive phase retrieval from squared output measurements via semidefinite programming[J]. arXiv:1111.6323v3, 2012.
- 19 Candès E J, Eldar Y C, Strohmer T, *et al.*. Phase retrieval via matrix completion[J]. arXiv: 1109.0573v2, 2011.
- 20 Cai J F, Candès E J, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal Optimization, 2008, 20(4): 1956—1982.
- 21 Ma S., Goldfarb D., Chen L.. Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization[J]. Mathematical Programming, 2011, 128(1-2): 321—353.
- 22 Keshavan R H, Oh S. OptSpace: a gradient descent algorithm on the grassman manifold for matrix completion[J]. arXiv: 0910.5260v2, 2009.
- 23 Zhang Cheng, Yang Hairong, Wei Sui. Compressive double-lens imaging using circulant-toeplitz-block phase mask [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(8): 0811001.  
张 成, 杨海蓉, 韦 穗. 循环-托普利兹块相位掩模可压缩双透镜成像[J]. 光学学报, 2011, 31(8): 0811001.
- 24 Candès E J, Strohmer T, Voroninski V, *et al.*. PhaseLift: exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2012, 66(8): 1241—1274.

栏目编辑：何卓铭