

# 基于像对基础矩阵的多像一维标定方法

付仲良 周 凡 谢艳芳 秦 永

(武汉大学遥感信息工程学院, 湖北 武汉 430072)

**摘要** 针对基于灭点的一维相机标定法在抑制径向畸变上的缺陷, 提出了一种基于基础矩阵的一维标定法, 该方法通过基础矩阵恢复投影意义下的相机矩阵, 进而转换至欧式空间的方式来求解内方位元素矩阵。该标定方法中无需任何先验知识或计算灭点, 一维标定物能做任意的刚体运动, 可以对多个相机同时进行标定, 适合于非实验室环境下的相机快速标定。模拟数据的相关对比实验证明, 当径向畸变不可忽略时基于基础矩阵的标定法优于基于灭点的标定法, 真实数据的相关对比实验验证了该方法的实用性。

**关键词** 机器视觉; 相机标定; 基础矩阵; 一维标定; 径向畸变

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201333.0615003

## One-Dimensional Multi-Camera Calibration Based on Fundamental Matrix

Fu Zhongliang Zhou Fan Xie Yanfang Qin Yong

(School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan university,  
Wuhan, Hubei 430072, China)

**Abstract** With analyzing the defect of the methods based on vanishing point with radial distortion, a calibration algorithm is proposed. The fundamental matrix of binocular set is estimated, which allows to perform a projective calibration of each camera. The calibration is updated for the Euclidean space. The calibration is possible without imposing any restriction on the movement of the pattern and without any prior information about the cameras or calculating vanishing point. It can calibrate all the cameras at the same time. This method is suitable for the fast camera calibration in a non-laboratory environment. Finally, the experiments on synthetic images validate that the proposed method is superior to the calibration method based on the vanishing point when the radial distortion cannot be ignored. The experiments on real images show that its accuracy makes it suitable for practical applications.

**Key words** machine vision; camera calibration; fundamental matrix; one-dimensional calibration; radial distortion

**OCIS codes** 150.0155; 150.1488; 150.6910; 080.1753

## 1 引 言

在数字摄影测量和计算机视觉领域, 相机内方位元素的精确估计又称为相机标定。相机标定的目的是建立空间目标点在真实世界的三维(3D)几何位置与其在图像中对应点之间的数学关系。以标定物的几何维度为特征, 可以将常用的标定方法分为三维标定法<sup>[1]</sup>、二维(2D)标定法<sup>[2]</sup>、一维(1D)标定法<sup>[3~12]</sup>和自标定法<sup>[13,14]</sup>。三维或二维标定法因标定物造价成本或标定环境的原因, 有时难以满足标

定需求, 自标定法虽较其他标定方法灵活, 但在没有场景的几何知识或相机运动信息的情况下也难以进行标定。而一维标定物相对来说构造更加简便, 标定操作更加容易。但是一维标定物体由于控制点较少, 几何约束差, 所获得的标定精度和对噪声的抑制能力不如其他类型的方法。如何提高一维标定法的标定精度与稳健性是当前相机标定比较热门的一个研究问题。

基于一维标定物的标定方法是 Zhang<sup>[3]</sup>于 2004

**收稿日期:** 2012-11-13; **收到修改稿日期:** 2013-01-17

**基金项目:** 国家科技支撑计划项目(2011BAK07B02)资助课题。

**作者简介:** 付仲良(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理与分析、地理信息系统和虚拟现实技术等方面的研究。E-mail: fuzhl@263.net

年提出的,其通过拍摄一维标定物体在不同位置姿态下的多幅图像,利用图像点之间的对应及一维标定物蕴含的几何信息建立约束方程即可实现相机的标定。然而,该方法对噪声的抑制能力较弱,且最大的局限是一维标定物体必须有一个端点是固定的。在该方法的基础上,许多学者提出一定的改进,主要是利用交比不变性通过计算灭点的方式来计算相机的内方位元素矩阵<sup>[3~7]</sup>,但是在计算灭点的过程中,会存在一定的误差积累,特别是在径向畸变不可忽略时。José等<sup>[8]</sup>提出了一种投影空间向欧氏空间转换的方式来计算多像的相机矩阵,但是没有考虑径向畸变的影响。薛俊鹏等<sup>[9]</sup>提出了一种基于两个正交一维物体的相机标定法,但是需要两个一维标定物正交的先验知识。徐巧玉等<sup>[10,11]</sup>提出了一种基于像对基础矩阵的多像标定方法,但是需要准确地测量两个像对间基线的长度。

总体来说,在基于一维标定物的相机标定方法中,标定物固定一个端点或做平面运动可以进行单个相机的标定,但是误差较大。如果标定物任意移动,那么单个相机是无法进行标定的<sup>[3]</sup>;多个相机可以同时进行标定<sup>[4]</sup>,相关的标定方法有的需要先验知识<sup>[9~12]</sup>,有的需要计算灭点<sup>[3~7]</sup>。而基于先验知识的算法,结果很大程度上依赖于先验知识的准确度,并且不太灵活;基于灭点的算法虽然灵活性较好,但是对噪声的抑制能力较弱,特别是在径向畸变不可忽略时。

本文在总结上述算法的基础上,分析了基于灭点的相机标定法与基于基础矩阵的相机标定法在标定初始值运算过程中的差异,提出了一种基于像对基础矩阵的多像一维标定方法。在该方法中,一维标定物可以比较随意地移动,无需计算灭点及任何先验知识,能够为后续的光束法获得较好的标定初始值,以确保后续的迭代计算可以全局收敛。经过相关对比实验,验证了该方法的有效性,特别是在径向畸变较大时的稳健性。

## 2 多像一维物体的标定原理

设二维像平面点  $m = [u, v]^T$ , 三维空间坐标点  $M = [X, Y, Z]^T$ 。对应的齐次坐标记为  $\tilde{m} = [u, v, 1]^T$ ,  $\tilde{M} = [X, Y, Z, 1]^T$ 。相机模型为 5 参数的针孔模型, 三维坐标点  $M$  与像平面点  $m$  之间的关系为

$$\tilde{m} = K[R, t]\tilde{M}, \quad K = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \mu \\ 0 & \beta & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中  $s$  为比例因子,  $P = K[R, t]$  为相机矩阵,  $[R, t]$  表示世界坐标系到相机坐标系的旋转与平移,  $R$  为旋转参数,  $t$  平移参数,  $K$  为相机内方位元素矩阵;  $\alpha, \beta$  是影像  $x, y$  轴上的尺度因子,  $[\mu, \nu]$  为影像的主点,  $\gamma$  为倾斜因子。那么对相机的标定, 就是求解矩阵  $K$  中的五个未知参数,  $N$  个相机同时标定就是  $5N$  个内方位元素的未知参数。为了表示方便, 将世界坐标系设定为与第 1 个相机的相机坐标系重合, 则可以列出所有相机在欧式意义下的相机矩阵关系式

$$\begin{cases} \tilde{m}_1 = s_1 K_1 [I, 0] \tilde{M}_1 \\ \tilde{m}_2 = s_2 K_2 [R_2, t_2] \tilde{M}_2 \\ \vdots \\ \tilde{m}_n = s_n K_n [R_n, t_n] \tilde{M}_n \end{cases} \quad (2)$$

目前, 比较常用的方法是利用一维物体在投影变换中的交比不变性<sup>[3~7]</sup>, 先计算出灭点, 再由多个灭点计算出无穷远单应矩阵  $H_\infty$ <sup>[15]</sup>, 进而计算出相机矩阵, 其基本的理论公式为

$$f_{\text{cross}}(a, b, c, d) = \frac{\begin{vmatrix} ab & cd \\ ac & bd \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a'b' & c'd' \\ a'c' & b'd' \end{vmatrix}} = f_{\text{cross}}(a', b', c', d') = \quad (3)$$

式中  $a \sim d$  和  $a' \sim d'$  分别为一维标定物在不同影像上的像点平面坐标,  $f_{\text{cross}}$  为交比计算函数, 它在投影变换中是不变量<sup>[15]</sup>, 以此为基础可以计算出灭点。但是该方法精确的前提是  $a \sim d$  是绝对共线的, 而由于径向畸变的存在(如图 1 所示), 相机拍摄一维标定物体上的  $A, B$  两点, 理想状态下的成像点是  $a, b$ , 但由于径向畸变等相关因素的影响实际却是  $c, d$ 。那么以此为基础来计算灭点, 由于误差的传递性, 必然会影响到最终的结果, 当径向畸变较大时, 可能无法成功地进行标定。

因此, 必须通过一定的方法对像点量测的初始值进行一定的修正。如图 2 所示, 相机  $P_1, P_2$  拍摄

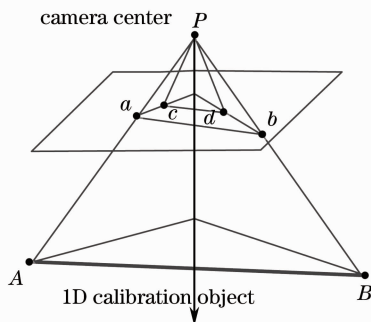


图 1 存在径向畸变的一维标定物影像  
Fig. 1 Radial distortion of one-dimensional object image

了控制点  $A$ ，它在两张影像上的理想像点是  $a_1$  和  $a_2$ 。但由于径向畸变以及其他因素的影响，实际像点却是  $\hat{a}_1$  和  $\hat{a}_2$ ，它们的间距分别为  $d_1$  和  $d_2$ 。

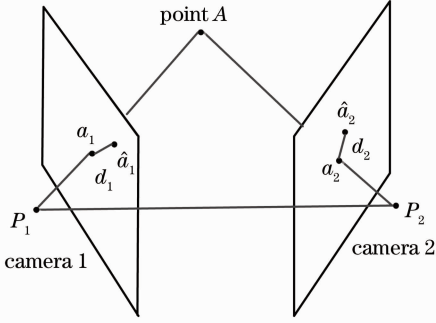


图2 像对量测点的误差

Fig. 2 Error of gauge point

以几何距离最小化为目的，构建像点平面坐标的修正值约束方程为

$$\min[d(a_1, \hat{a}_1)^2 + d(a_2, \hat{a}_2)^2], \quad (4)$$

式中的  $d(\cdot)$  为欧氏距离计算式，基础矩阵的求解方程为

$$a_1^T F a_2 = 0, \quad (5)$$

当控制点多于 8 个时，以 RANSAC 算法<sup>[16]</sup>为基础求出  $F$  的初始值，然后基于(4)式与(5)式利用最小二乘法计算出  $F$ 。

因此，基于灭点的相机标定法在计算灭点的时候，由于径向畸变以及其他因素的影响，所使用的像点坐标量测值带有一定的误差；而基于基础矩阵的标定法在计算基础矩阵的时候已经对像点的量测值进行了一定的修正，由误差的传递性可知，初始值运算的误差会影响到最终的计算结果。所以，基于像对基础矩阵的方法可以获得更加准确的初始值，其精度也直接决定了最后光束法迭代求解是否能够全局收敛。

### 3 一维标定物几何约束求解相机矩阵

#### 3.1 相关运算符号说明

如图 3 所示，一维标定物上存在  $A, B, C$  3 个控制点。为了论述方便，仅列出 3 个控制点，更多的控制点并不能提供新的关于相机内方位元素的独立约束<sup>[3]</sup>，但是考虑到数据冗余对抑制噪声的影响，因而在实际应用中更多的点能在一定程度上提高标定精度，仅考虑 3 个点构成的一维标定物，但结论可以扩展到更多的点。3 个控制点间的距离已知，有  $N$  个待标定的相机，一维标定物在三维场景中任意移动并拍摄下不同位姿下的  $J(J > 5)$  次影像。图 3 中的下标  $j$  表示第  $j$  次位姿下的影像，下标  $n$  表示第  $n$  个相机。

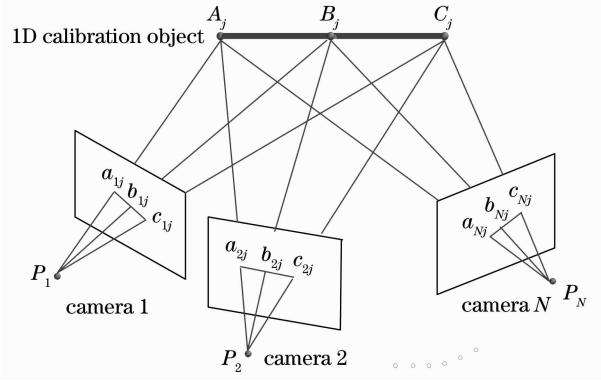


图3 用于多像标定的一维标定物

Fig. 3 1D calibration object for multi-camera calibration

该算法是分层求解的，即先计算投影意义下的相机矩阵  $P$ ，然后列出欧氏意义下的相机矩阵表达式  $\bar{P}$ ，它们的关系为  $\bar{P} = HP$ 。式中  $H$  为  $4 \times 4$  矩阵表示三维空间变换， $P$  可由像对间的基础矩阵  $F$  算出，如果  $H$  可以求得，那么就可以获得欧氏意义下的相机矩阵  $\bar{P}$ ，然后通过乔里斯基分解得到相机的内方位元素矩阵。所以关键的问题就是如何利用一维标定物所提供的几何约束求解  $H$ 。为了查看方便，现将相关的运算符列举在表 1 中。

表 1 符号列表

Table 1 List of symbols

Symbol	Meaning
$J, j$	$J$ is number of pattern displacements, $j$ is index
$N, n$	$N$ is number of cameras, $n$ is index
$A, B, C$	The coordinates of $A, B, C$ in the projective space, $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ are the homogeneous coordinates
$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$	The coordinates of $A, B, C$ in the Euclidean space, $\tilde{\bar{A}}, \tilde{\bar{B}}, \tilde{\bar{C}}$ are the homogeneous coordinates
$a_{nj}, b_{nj}, c_{nj}$	The image coordinates of $A, B, C$ by the $n$ -th camera after $j$ -th pattern displacements, $\tilde{a}_{nj}, \tilde{b}_{nj}, \tilde{c}_{nj}$ are the homogeneous coordinates
$P_1, P_2$	Projection matrices of the 1st camera and the 2nd camera
$\bar{P}_1, \bar{P}_2$	Euclidean matrices of the 1st camera and the 2nd camera
$H$	Projective transformation from projection space to Euclidean space, $\bar{P} = HP, \bar{A} = HA, \bar{B} = HB, \bar{C} = HC$

### 3.2 公式推导

由上面的论述可知,首先是要计算投影意义下的相机矩阵,先取第1个相机与第2个相机进行分析,投影意义下的相机矩阵表达式为<sup>[17]</sup>

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1 = [\mathbf{I}, \mathbf{0}] \\ \mathbf{P}_2 = [[\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{F}, \mathbf{e}] \end{cases}, \quad (6)$$

式中  $\mathbf{e}$  表示第1个相机在第2个相机影像上的核点,  $[\mathbf{e}]_{\times}$  为向量  $\mathbf{e}$  的反对称矩阵,  $\mathbf{F}$  为第1个相机与第2个相机的基础矩阵。虽然标定物上仅有共线的3个控制点,但是当拍摄一维标定物  $J (J > 5)$  次位姿下的影像时,依然可以得到多个非共线点的对应关系。使用上文所述的方法计算出  $\mathbf{F}$ , 然后可以比较精确地计算出在投影意义下的相机矩阵。欧氏意义下的相机矩阵与投影意义下的相机矩阵关系为

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{H}\mathbf{P}_1, \quad \bar{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{H}\mathbf{P}_2. \quad (7)$$

再列出三维空间变换  $\mathbf{H}$  的通式为<sup>[15]</sup>

$$\mathbf{H} = a \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & q \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中  $\mathbf{K}_1$  是(2)式中第1个相机的内方位元素矩阵,  $\mathbf{W} = a[\mathbf{Q}^T, q]^T$  是一个三维向量的齐次式表示无穷远平面<sup>[15]</sup>,  $a$  是非零系数。因为  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  可由(6)式计算得出,所以现在的问题就转换为如何利用一维标定物所提供的几何约束求解  $\mathbf{H}$ 。

先列出投影意义下的物方点坐标与欧氏意义下的物方点坐标关系为

$$\tilde{\mathbf{A}}_j = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_j, \quad \tilde{\mathbf{B}}_j = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{B}}_j, \quad \tilde{\mathbf{C}}_j = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{C}}_j. \quad (9)$$

投影意义下的物方点与像平面点坐标之间的关系是

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{a}}_{1j} = \mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{A}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_{1j} = \mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{B}}_j, \tilde{\mathbf{c}}_{1j} = \mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{C}}_j \\ \tilde{\mathbf{a}}_{2j} = \mathbf{P}_2\tilde{\mathbf{A}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_{2j} = \mathbf{P}_2\tilde{\mathbf{B}}_j, \tilde{\mathbf{c}}_{2j} = \mathbf{P}_2\tilde{\mathbf{C}}_j \end{cases}. \quad (10)$$

欧氏意义下的物方点之间的距离是可以直接量测获得的,因此可以列出

$$\bar{\mathbf{A}}_j = d_1\bar{\mathbf{B}}_j + d_2\bar{\mathbf{C}}_j, \quad (11)$$

式中的  $d_1$  和  $d_2$  为距离因子,是通过量测后可获得的已知数。然后将(8)式代入(9)式化简后得

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_j = \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}_j^T \mathbf{W}} a \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A}_j \\ \bar{\mathbf{B}}_j = \frac{1}{\tilde{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{W}} a \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{B}_j, \\ \bar{\mathbf{C}}_j = \frac{1}{\tilde{\mathbf{C}}_j^T \mathbf{W}} a \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{C}_j \end{cases}, \quad (12)$$

再将(12)式代入(11)式化简后得

$$\frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}_j^T \mathbf{W}} \mathbf{A}_j = \frac{d_1}{\tilde{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{W}} \mathbf{B}_j + \frac{d_2}{\tilde{\mathbf{C}}_j^T \mathbf{W}} \mathbf{C}_j. \quad (13)$$

然后等式两边同时叉乘  $\mathbf{A}_j$ , 那么等式左边为零,化简后得

$$\frac{d_1}{\tilde{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{W}} (\mathbf{B}_j \times \mathbf{A}_j) + \frac{d_2}{\tilde{\mathbf{C}}_j^T \mathbf{W}} (\mathbf{C}_j \times \mathbf{A}_j) = \mathbf{0}. \quad (14)$$

再等式两边同时点乘  $(\mathbf{C}_j \times \mathbf{A}_j)$ , 化简后得

$$\left[ \tilde{\mathbf{B}}_j + \frac{d_1 (\mathbf{B}_j \times \mathbf{A}_j) (\mathbf{C}_j \times \mathbf{A}_j)}{d_2 (\mathbf{C}_j \times \mathbf{A}_j) (\mathbf{C}_j \times \mathbf{A}_j)} \tilde{\mathbf{C}}_j \right]^T \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

至此,由投影意义下的物方点与可量测的距离因子构成了对  $\mathbf{W}$  的线性约束,其中的投影意义下的物方点坐标可由(10)式计算得出。由于  $\mathbf{W} = a[\mathbf{Q}^T, q]^T$  是三维向量齐次式,且与标定物的移动不相关,当标定物被拍摄不同位姿的影像超过3次时,可以构建  $\mathbf{W}$  的求解方程组。当  $\mathbf{W}$  计算得出后,(8)式中还存在未知数  $a$  与  $\mathbf{K}_1$ , 求解方法如下。

先列出欧氏意义下第一个相机物方点的深度表达式<sup>[15]</sup>

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_j = Z_j^a \mathbf{K}_1^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_{1j} \\ \bar{\mathbf{B}}_j = Z_j^b \mathbf{K}_1^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_{1j}, \\ \bar{\mathbf{C}}_j = Z_j^c \mathbf{K}_1^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{1j} \end{cases}, \quad (16)$$

式中  $Z_j^a, Z_j^b, Z_j^c$  为3个控制点在欧氏意义下的深度值,再结合(12)式可以得出

$$\begin{cases} Z_j^a = \frac{a\mathbf{A}_j}{\tilde{\mathbf{A}}_j^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{a}}_{1j}} \\ Z_j^b = \frac{a\mathbf{B}_j}{\tilde{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{b}}_{1j}}. \\ Z_j^c = \frac{a\mathbf{C}_j}{\tilde{\mathbf{C}}_j^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{c}}_{1j}} \end{cases}. \quad (17)$$

由于  $A, B, C$  3点在欧氏意义下的点间距离可以直接量测获得,因此可以列出

$$\begin{cases} \|\bar{\mathbf{B}}_j - \bar{\mathbf{A}}_j\| = d_3 \\ \|\bar{\mathbf{C}}_j - \bar{\mathbf{B}}_j\| = d_4 \end{cases}, \quad (18)$$

式中  $d_3$  和  $d_4$  是距离差值的绝对值,是已知量。然后将(16)式与(17)式代入(18)式得

$$\begin{cases} \left\| a \mathbf{K}_1^{-1} \left( \frac{\mathbf{B}_j}{\tilde{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{W}} - \frac{\mathbf{A}_j}{\tilde{\mathbf{A}}_j^T \mathbf{W}} \right) \right\| = d_3 \\ \left\| a \mathbf{K}_1^{-1} \left( \frac{\mathbf{C}_j}{\tilde{\mathbf{C}}_j^T \mathbf{W}} - \frac{\mathbf{B}_j}{\tilde{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{W}} \right) \right\| = d_4 \end{cases}, \quad (19)$$

式中除  $a\mathbf{K}_1^{-1}$  外均为已知值,能对  $a\mathbf{K}_1^{-1}$  提供1个独立的解算方程,当  $J > 5$  时即可解算出  $a\mathbf{K}_1^{-1}$ 。至此,(8)式中所有关于  $\mathbf{H}$  的要素全部解算出来。最后,通过(7)式可以得到第1个相机与第2个相机在欧氏意义下的相机矩阵,然后通过乔利斯基分解最终得到相机的内方位元素矩阵。

虽然相机内方位元素矩阵已经求解,但是考虑

到噪声的影响以及径向畸变对共线性的干扰,由基础矩阵  $F$  最终计算得出的内方位元素矩阵并不十分精确,所以需要使用光束法对内方位元素进行迭代运算。另外需要注意的是,在  $J$  个相机中选取第 1 个和第 2 个相机进行计算是随机选取的,并不具备特殊性。因为算法的目的是先计算出所有相机内方位元素矩阵的初始值,为下一步的光束法求解内方位元素做准备。为了保证相机矩阵初始值的有效性,以及后续的光束法迭代可以收敛,可以使用 RANSAC 算法<sup>[16]</sup>或最小平方中值法<sup>[18]</sup>来选取合适的影像对计算所有相机内方位元素矩阵的初始值。

当所有相机内方位元素矩阵  $K_j$  ( $1 \leq j \leq J$ ) 的初始值计算出来后,采用光束法进行相机内方位元素矩阵的精确计算。光束法解算是以相机矩阵和空间点为优化变量、以最小化重投影误差为优化目标的非线性迭代优化过程,当像平面测量点服从各向同性零均值的高斯分布且独立分布时,光束法可得到最大似然意义下的优化结果,求解式为

$$\min \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J [d(\bar{a}_{nj}, \bar{P}_n \bar{A}_j) + d(\bar{b}_{nj}, \bar{P}_n \bar{B}_j) + d(\bar{c}_{nj}, \bar{P}_n \bar{C}_j)], \quad (20)$$

式中  $\bar{a}_{nj}, \bar{b}_{nj}, \bar{c}_{nj}$  为像点测量值的齐次式,  $\bar{P}_n \bar{A}_j, \bar{P}_n \bar{B}_j, \bar{P}_n \bar{C}_j$  的初始值可由标定结果及(6)~(9)式算出,在具体的计算过程中有如下问题需要注意:

1) 因为总共最多可以列出  $NJ$  个对应式,计算时的矩阵行列数会非常庞大,会给运算带来比较大的麻烦。对此,可以采用矩阵简化或者稀疏的算法对原式进行处理<sup>[15]</sup>。

2) (20)式包括了对像平面量测值的迭代修正和相机矩阵的迭代修正,解起来比较复杂。可以采用分步循环的方式来计算,即先可以假设像平面测量值是真实值,仅对相机矩阵计算修正值,然后再假设相机矩阵为真实值,计算像平面测量值的修正值,如此循环地进行迭代运算。

3) 由于标定物是一维的,同 1 张影像上的所有观测点理论上应该是共线的,因此  $A, B, C$  3 点并不是线性独立的,(20)式需要稍作修改。先求出一维标定物的方向

$$t_j = \frac{\bar{C}_j - \bar{A}_j}{\|\bar{C}_j - \bar{A}_j\|} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_j \cos \theta_j \\ \sin \varphi_j \sin \theta_j \\ \cos \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (21)$$

则  $B$  点和  $C$  点的表达式分别为

$$\begin{cases} \bar{B}_j = \bar{A}_j + \|\bar{B}_j - \bar{A}_j\| t_j = \bar{A}_j + d_5 t_j, \\ \bar{C}_j = \bar{A}_j + \|\bar{C}_j - \bar{A}_j\| t_j = \bar{A}_j + d_6 t_j \end{cases}, \quad (22)$$

式中  $d_5, d_6$  为距离因子,是已知量,相应地可以将(20)式改写为

$$\min \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \{d(\bar{a}_{nj}, \bar{P}_n \bar{A}_j) + d[\bar{b}_{nj}, \bar{P}_n (\bar{A}_j + d_5 \bar{t}_j)] + d[\bar{c}_{nj}, \bar{P}_n (\bar{A}_j + d_6 \bar{t}_j)]\}. \quad (23)$$

### 3.3 算法流程

算法输入为  $N$  个相机拍摄一维标定物在不同位置姿态下的  $J$  次影像上的像平面点坐标值,以及一维标定物上多个控制点的间距。算法输出为  $J$  个相机的内方位元素,具体操作过程如图 4 所示。

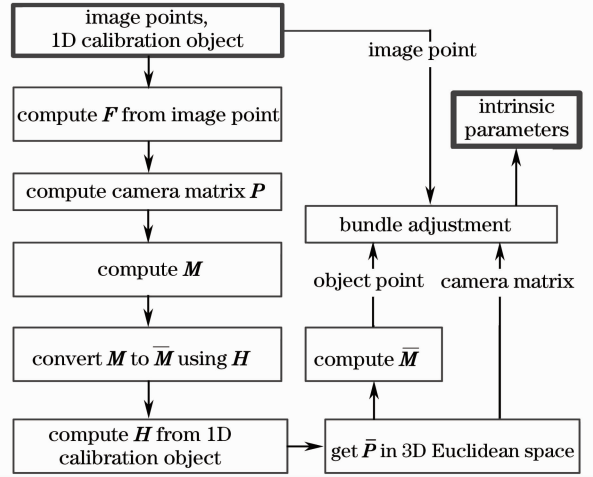


图 4 基于一维标定物的多像标定算法流程图  
Fig. 4 Algorithm for multi-camera calibration with 1D object

## 4 实验及结果分析

实验主要分为两个部分:1)基于模拟数据的实验,在模拟数据中加入高斯噪声,验证本文算法的有效性及抑噪性,并且与基于灭点的求解方法<sup>[4]</sup>进行对比分析。2)基于真实数据的实验,使用真实 CCD 相机拍摄的影像数据,验证该算法的实用性和有效性。

### 4.1 模拟数据

实验中模拟的相机个数为 4,影像的分辨率为  $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ 。内方位元素如表 2 所示,在像点坐标量测值中加入均值为 0、均方差为  $\sigma(0.2 \sim 2.0 \text{ pixel})$  的高斯噪声,使用本文提出的算法,拍摄了 30 次不同位姿下的影像。计算结果如图 5 所示,可以看出随着噪声的增大,误差也在增大,但基本上是呈线性增长,标定效果较好。

再深入分析径向畸变对噪声的影响,从表 2 可以看出第 1 个相机的倾斜因子  $\gamma=0$ ,而第 4 个相机的倾斜因子  $\gamma=3$  较大,相应的径向畸变也更明显<sup>[19]</sup>。

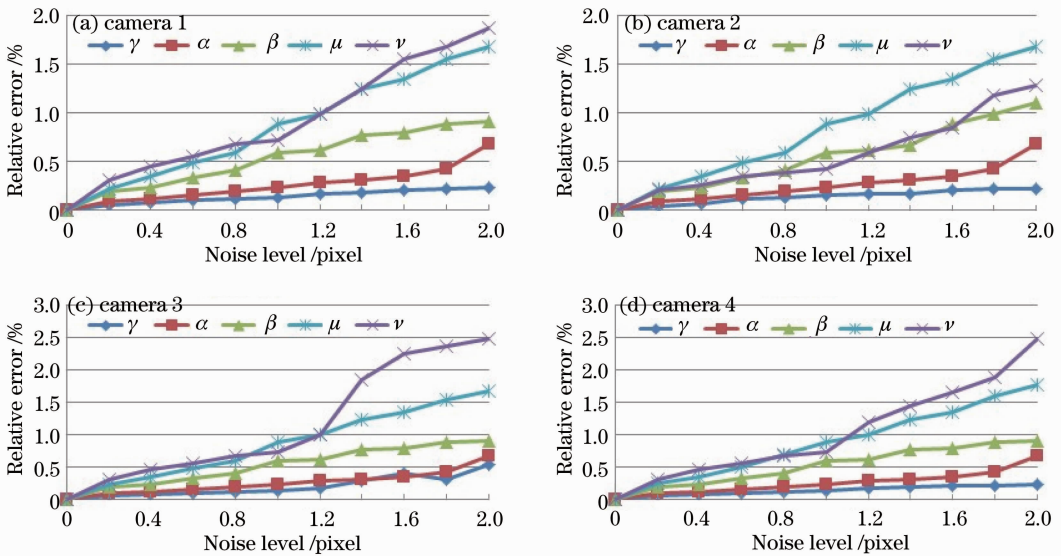


图 5 4 个模拟相机标定精度随误差变化的相对误差图

Fig. 5 Relative errors of four simulated cameras' intrinsic parameters

表 2 模拟数据参数表

Table 2 Intrinsic parameters of four cameras used to generate synthetic data

Camera	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\mu$	$\nu$
1	1000	1000	0	510	350
2	1200	1250	1.0	530	355
3	1150	1000	-1.0	525	380
4	1000	1050	3.0	545	385

以这两个相机的数据作对比实验,比较基于灭点的方法与基于相机基础矩阵的方法在径向畸变不同时的区别,使用下式作为相对距离误差  $R_{de}$  结果的评估依据:

$$R_{de} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J [d(\mathbf{a}_{nj}, \mathbf{a}_{nj}) + d(\mathbf{b}_{nj}, \hat{\mathbf{b}}_{nj}) + d(\mathbf{c}_{nj}, \hat{\mathbf{c}}_{nj})]}{3NJ}, \quad (24)$$

式中  $\mathbf{a}_{nj}, \mathbf{b}_{nj}, \mathbf{c}_{nj}$  为像点坐标的真实值,  $\hat{\mathbf{a}}_{nj}, \hat{\mathbf{b}}_{nj}, \hat{\mathbf{c}}_{nj}$  为计算标定结果后再反向计算像点的估计值,在像点坐标中加入均值为 0、均方差为  $\sigma(0.2 \sim 2.8 \text{ pixel})$  的高斯噪声,在第 4 个相机的像点坐标中加入额外的径向畸变干扰。

结果如图 6 所示,其中 H1, F1 是相机 1 分别基于灭点和基础矩阵的方法, H4, F4 是相机 4 分别基于灭点和基础矩阵的方法,可以看出在径向畸变不存在时,利用基于灭点的方式和基于基础矩阵的方式计算得出的结果相差不大,但是当径向畸变不可忽略时,基于灭点的方法所算的结果误差较大、不稳定,而基于基础矩阵的方法虽然误差也随之增大,但

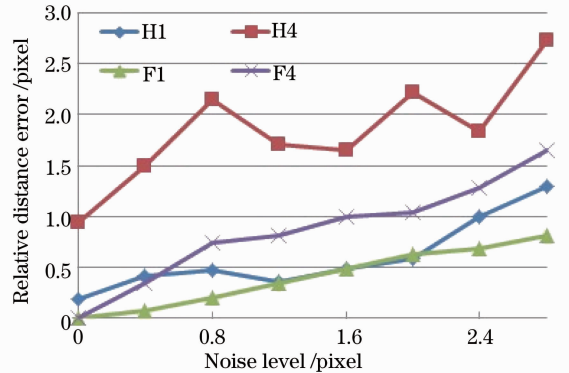


图 6 基于灭点的计算结果与基于基础矩阵的计算结果

Fig. 6 Results based on vanishing point and fundamental matrix

是增长幅度较小且较为稳定。

#### 4.2 真实数据

为了验证该算法的实用性,使用 7 个圆珠串在钢棍上制作了 1 个简易的一维标定物,使用 3 个 CCD 相机拍摄该一维标定物在 40 次不同位置姿态下的多张影像,改变运算所使用的一维标定物上控制点个数及拍摄次数,分析在实际应用中相关参数合适的取值范围。结果如图 7 所示,可以看出增加控制点个数对于精度的提高效果并不明显,而增加拍摄次数在 20 次以下可以显著地提高精度,超过 20 次以后,结果趋于稳定。

为了进行比较,同时对 3 个相机也进行了二维标定,结果如表 3 所示,其中二维标定法选用的是比较经典的张正友标定法<sup>[2]</sup>,一维标定法为本文的核心算法,一维捆绑调整法是以一维标定法计算的结

果为初值的光束法。由于所使用的一维标定物比较简易,是人工制造的,距离量测也未必十分精确,另外摄像时相机难免有所抖动,因此在图像的量测点

上存在一定的误差,尽管如此,可以看出一维标定与二维标定所获得的结果相差不大。

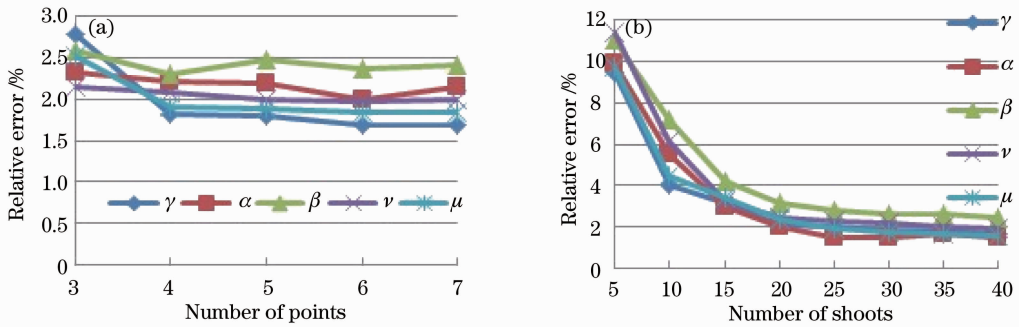


图 7 控制参数对实验结果的影响示意图

Fig. 7 Influence of experiment control parameters on results

表 3 真实相机影像内方位标定结果

Table 3 Calibration results of three cameras

		$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\mu$	$\nu$
Camera 1	1D method	1150.45	1182.51	2.52	549.25	274.36
	1D bundle adjustment	1142.30	1181.22	1.01	542.15	324.54
	2D method <sup>[2]</sup>	1140.99	1178.45	0.85	540.36	342.25
Camera 2	1D method	1198.34	1200.34	4.34	520.36	285.64
	1D bundle adjustment	1185.98	1212.36	2.25	515.36	300.25
	2D method <sup>[2]</sup>	1188.44	1215.45	1.45	512.36	321.25
Camera 3	1D method	2435.98	2454.36	-8.36	1106.36	1235.37
	1D bundle adjustment	2420.25	2440.36	-3.32	1198.36	1220.36
	2D method <sup>[2]</sup>	2415.23	2438.36	-3.18	1185.36	1218.56

## 5 结 论

在总结相关方法的基础上,提出了一种基于基础矩阵的多像一维标定法,该方法首先计算像对基础矩阵,在相机标定的初步操作中就获得较准确的投影意义下的相机矩阵初始值,然后充分利用一维标定物所蕴含的几何约束来计算投影空间与欧氏空间的三维转换矩阵  $\mathbf{H}$ ,进而求解出相机的内方位元素矩阵,最后利用光束法对标定结果进行精化。经过原理分析及相关实验,论证了基于基础矩阵的相机标定法在抑制径向畸变的影响上要优于基于灭点的相机标定法,该标定过程所需设备简单,操作方便,计算速度快,并且无需任何先验知识,一维标定物可以做任意的刚体运动,能够获得较好的标定结果。该方法适用于非实验室环境下相机的快速标定。

## 参 考 文 献

1 R. Y. Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV

cameras and lenses [J]. *IEEE J. Robotics and Automation*, 1987, **3**(4): 323~344

2 Z. Zhang. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations[C]. The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision, 1999, **1**: 666~673

3 Z. Zhang. Camera calibration with one-dimensional objects[J]. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(7): 892~899

4 Wang Liang, Wu Fuchao. Multi-camera calibration based on 1D calibration object [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(3): 225~231

王 亮, 吴福朝. 基于一维标定物的多摄像机标定[J]. *自动化学报*, 2007, **33**(3): 225~231

5 Wang Tao, Lü Naiguang, Yang Jian. The high precision calibration of machine vision based on one-dimensional object[J]. *J. Beijing Information Science and Technology University*, 2010, **25**(1): 21~25

王 涛, 吕乃光, 杨 剑. 基于一维标定物的高精度标定[J]. *北京信息科技大学学报:自然科学版*, 2010, **25**(1): 21~25

6 F. Wu, Z. Hu, H. Zhu. Camera calibration with moving one-dimensional objects [J]. *Pattern Recogn.*, 2005, **38**(5): 755~765

7 Y. Kojima, T. Fujii, M. Tanimoto. New multiple-camera calibration method for a large number of cameras[C]. *SPIE*, 2005, **5665**: 156~163

8 A. José, R. Marcelo, F. Maria. A new robust algorithmic for multi-camera calibration with a 1D object under general motions

- without prior knowledge of any camera intrinsic parameter[J]. *Pattern Recogn.*, 2012, **45**(10): 3636~3647
- 9 Xue Junpeng, Su Xianyu. Camera calibration with single image based on two orthogonal one-dimensional objects[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(1): 0115001  
薛俊鹏, 苏显渝. 基于两个正交一维物体的单幅图像相机标定[J]. *光学学报*, 2012, **32**(1): 0115001
- 10 Xu Qiaoyu, Yao Huai, Che Rensheng. Online calibration of stereo vision measurement system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(6): 1546~1551  
徐巧玉, 姚 怀, 车仁生. 立体视觉测量系统现场校准技术[J]. *光学学报*, 2009, **29**(6): 1546~1551
- 11 Xu Qiaoyu, Ye Dong, Che Rensheng. On-line calibration of stereo vision measurement system based on optical reference bar[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(1): 81~86  
徐巧玉, 叶 东, 车仁生. 基于光学参考棒的立体视觉测量系统现场标定技术[J]. *光学学报*, 2008, **28**(1): 81~86
- 12 Zhang Lingfei, Chen Gang, Ye Dong *et al.*. Cameras calibration based on one-dimensional reference object and improved evolutionary strategy[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3136~3142  
张灵飞, 陈 刚, 叶 东等. 基于一维标定物和改进进化策略的相机标定[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3136~3142
- 13 Xie Wenhan, Zhang Zuxun, Zhang Jianqing. New method of camera calibration with vanishing points [J]. *J. Harbin Institute of Technology*, 2004, **35**(11): 1384~1387  
谢文寒, 张祖勋, 张剑清. 一种新的基于灭点的相机标定方法[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2004, **35**(11): 1384~1387
- 14 Huo Ju, Yang Wei, Yang Ming. A self-calibration technique based on the geometry property of the vanish point [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 465~472  
霍 炬, 杨 卫, 杨 明. 基于消隐点几何特性的摄像机自标定方法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(2): 465~472
- 15 R. Hartley, A. Zisserman, I. Ebrary. *Multiple View Geometry in Computer Vision* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 16 A. Fischler, C. Bolles. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography [J]. *Commun. ACM*, 1981, **24**(6): 381~395
- 17 X. Armangu, J. Salvi. Overall view regarding fundamental matrix estimation [J]. *Image Vision Comput.*, 2003, **21**(2): 205~220
- 18 P. J. Rousseeuw. Least median of squares regression [J]. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1984, **79**(388): 871~880
- 19 Wang Huifeng, Wang Bingjian. Camera radial distortion calibrating method based on moving characteristic target[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(5): 0512007  
王会峰, 王炳健. 移动特征靶标的摄像机径向畸变标定[J]. *光学学报*, 2012, **32**(5): 0512007

栏目编辑: 李文喆