

基于单光弹调制器的米勒矩阵测量误差分析

曹绍谦^{1,2} 步 扬¹ 王向朝¹ 李思坤¹ 汤飞龙^{1,2} 李中梁¹

(¹ 中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学与光电技术实验室, 上海 201800)
² 中国科学院大学, 北京 100049

摘要 针对已有单光弹调制器米勒矩阵测量技术缺乏定量误差分析的不足, 提出了单光弹调制器米勒矩阵测量误差方程, 给出了相对误差分析方法, 并结合矩阵条件数得到了降低米勒矩阵各元素最大相对误差的两组 1/4 波片方位角优化组合。实验结果表明, 该两组 1/4 波片方位角优化组合, 测量得到的待测 1/4 波片米勒矩阵各元素的最大相对误差分别为 0.12% 和 0.20%, 相比传统 1/4 波片方位角优化组合 $\{-90^\circ, -45^\circ, 30^\circ, 60^\circ\}$ 条件下得到的各元素最大相对误差为 0.83%, 分别降低了 85.54% 和 75.90%。

关键词 测量; 偏振; 米勒矩阵; 单光弹调制器; 误差方程; 条件数

中图分类号 O436.3 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201333.0612010

Measurement Error Analysis for Mueller Matrix Based on a Single Photo-Elastic Modulator

Cao Shaoqian^{1,2} Bu Yang¹ Wang Xiangzhao¹ Li Sikun¹ Tang Feilong^{1,2} Li Zhongliang¹

¹ Laboratory of Information Optics and Opto-Electronic Technology,

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China

² University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract A measurement error equation and a relative error analysis method for the Mueller matrix measurement technique based on a single photo-elastic modulator are proposed. Considering the relative error and the condition number, two optimum angle sets for the quarter-wave plate are obtained, which diminish the maximum relative error of each element of the Mueller matrix. The experimental results show that the maximum relative errors of each element of the Mueller matrix of the measured quarter-wave plate are 0.12% and 0.20% respectively by using the two optimum angle sets above. Compared to the maximum relative error of 0.83% of the traditional optimum angle sets $\{-90^\circ, -45^\circ, 30^\circ, 60^\circ\}$ for the quarter-wave plate, the maximum relative errors of each element of the Mueller matrix of the measured quarter-wave plate are decreased by 85.54% and 75.90% respectively by using the two optimum angle sets above.

Key words measurement; polarization; Mueller matrix; single photo-elastic modulator; error equation; condition number

OCIS codes 120.2130; 120.5050; 120.5060; 120.5410; 260.1440; 260.5430

1 引 言

米勒矩阵是描述光学材料及元器件光学各向异性、旋光性的有效且普遍的方式^[1~5]。米勒矩阵通常无法采用理论推导获得, 一般通过使用米勒矩阵偏光

计进行实验测量来确定。米勒矩阵偏光计由偏振态发生器(PSG)和偏振态分析器(PSA)两部分组成^[6]。其所测得的待测样品米勒矩阵 \mathbf{M} 可用光强矩阵 \mathbf{I} 、PSG 米勒矩阵 \mathbf{T} 及 PSA 米勒矩阵 \mathbf{R} 表示^[7~9]。

收稿日期: 2012-12-24; 收到修改稿日期: 2013-02-25

基金项目: 国家自然科学基金(60938003, 61205102, 61275207)和科技部国际科技合作项目(2011DFR10010)资助课题。

作者简介: 曹绍谦(1986—), 男, 硕士研究生, 主要从事超大数值孔径光刻成像与图形保真技术等方面的研究。

E-mail: sqcao@siom.ac.cn

导师简介: 步 扬(1973—), 男, 研究员, 硕士生导师, 主要从事信息光电子技术等方面的研究。

E-mail: buyang@siom.ac.cn(通信联系人)

在测量过程中,光强矩阵中噪声会通过 PSG 米勒矩阵 T 及 PSA 米勒矩阵 R 进行传递和放大,给待测样品的米勒矩阵 M 带来测量误差^[8~11]。已有米勒矩阵测量误差分析文献主要集中在旋转光学元件法方面,但此法测量系统复杂,测量精度难以保证。相位调制法可以实现相位自动调制,调制频率高,可以保证米勒矩阵的测量精度。其中,光弹调制器(PEM)具有高灵敏度、宽光谱范围及高精度相位调制的特性,广泛应用在相位调制法米勒矩阵偏光计中^[12~15]。但有关单光弹调制器米勒矩阵测量定量误差分析的文献还未见详细报道。针对上述不足,本文提出单光弹调制器米勒矩阵测量误差方程,分析得到两组降低米勒矩阵各元素最大相对误差的 $1/4$ 波片方位角优化组合,最后通过对比实验进行验证。

2 原 理

2.1 矩阵范数及条件数

推导误差分析方程,首先需要引入矩阵范数和条件数。所有矩阵范数 $\|\cdot\|$ 都具有非负性和齐次性,并且满足三角不等式^[16],即

$$\begin{cases} \|A\| \geq 0 \\ \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{cases}, \quad (1)$$

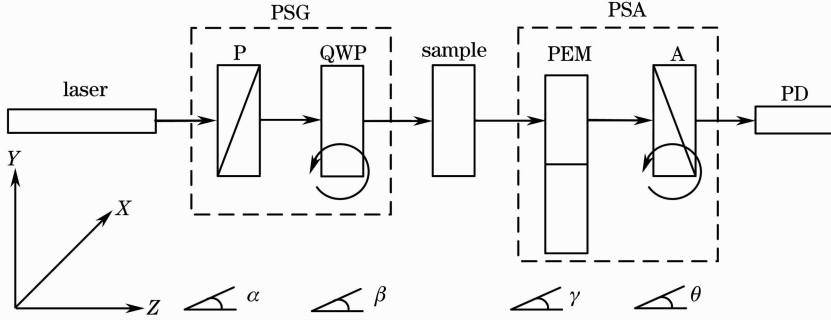


图 1 米勒矩阵测量装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram for measuring Mueller matrix

根据图 1,有^[8,9,17~22]

$$S_i^{\text{out}} = MS_i^{\text{in}} = M \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2 2\beta_i \\ \sin 2\beta_i \cos 2\beta_i \\ \sin 2\beta_i \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$S_i^{\text{out}} = \begin{bmatrix} S_{0i}^{\text{out}} \\ S_{1i}^{\text{out}} \\ S_{2i}^{\text{out}} \\ S_{3i}^{\text{out}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

式中 A, B 为主矩阵,其范数为 2-范数,即

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}, \quad (2)$$

式中 $\lambda_{\max}(A)$ 为矩阵 A 的最大特征值, A^T 为矩阵 A 的共轭转置矩阵。该范数同时满足相容性不等式^[8,16]

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (3)$$

根据弱扰动单位矩阵可逆性原理,如果扰动 P 的范数较小,即 $\|P\| < 1$,令 I 为单位矩阵,则 $I-P$ 可逆,且满足^[16]

$$\|(I-P)^{-1}\| \leq (1 - \|P\|)^{-1}. \quad (4)$$

条件数 κ 定义为

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (5)$$

2.2 单光弹调制器米勒矩阵测量原理

单光弹调制器米勒矩阵测量装置如图 1 所示,其中 α 为起偏器透振方向角, β 为 $1/4$ 波片快轴方位角, r 为光弹调制器振动轴方向角, θ 为检偏器透振方向角。起偏器 P 透振方向沿 X 轴,设为 0° ,光弹调制器振动轴方向和起偏器透振方向平行,检偏器 A 透振方向在两种状态下与 X 轴分别成 45° 和 22.5° 。起偏器 P 和 $1/4$ 波片(QWP)组成 PSG 发生器,光弹调制器和检偏器组成 PSA。激光器出射的准直激光束通过 PSG、待测样品及 PSA 后,由光电探测器(PD)接收。

式中 S_i^{in} 为通过 PSG 后的入射光, S_i^{out} 为 S_i^{in} 经过待测样品后的出射光, M 为待测样品米勒矩阵, β_i 为 $1/4$ 波片 QWP 快轴方位与 X 轴夹角。

当 PSG 中 QWP 有产生四束偏振光的角度组合 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 时,(6)式可变为

$$R = MT. \quad (8)$$

式中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos^2 2\beta_1 & \cos^2 2\beta_2 & \cos^2 2\beta_3 & \cos^2 2\beta_4 \\ \sin 2\beta_1 \cos 2\beta_1 & \sin 2\beta_2 \cos 2\beta_2 & \sin 2\beta_3 \cos 2\beta_3 & \sin 2\beta_4 \cos 2\beta_4 \\ \sin 2\beta_1 & \sin 2\beta_2 & \sin 2\beta_3 & \sin 2\beta_4 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} S_{01}^{\text{out}} & S_{02}^{\text{out}} & S_{03}^{\text{out}} & S_{04}^{\text{out}} \\ S_{11}^{\text{out}} & S_{12}^{\text{out}} & S_{13}^{\text{out}} & S_{14}^{\text{out}} \\ S_{21}^{\text{out}} & S_{22}^{\text{out}} & S_{23}^{\text{out}} & S_{24}^{\text{out}} \\ S_{31}^{\text{out}} & S_{32}^{\text{out}} & S_{33}^{\text{out}} & S_{34}^{\text{out}} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

若 PSG 产生的四束偏振光线性无关, 矩阵 \mathbf{T} 可逆, 有

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}. \quad (11)$$

通过测量矩阵 \mathbf{T} 和 \mathbf{R} , 即可得到待测样品米勒矩阵 \mathbf{M} 。其中矩阵 \mathbf{T} 通过 1/4 波片方位角的组合 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 求得^[11]。矩阵 \mathbf{R} 则是通过 PSA 测量得到^[23]。

2.3 单光弹调制器米勒矩阵测量误差方程

设米勒矩阵 \mathbf{T} 和 \mathbf{R} 在实验中的误差分别为 $\delta\mathbf{T}$ 和 $\delta\mathbf{R}$, 二者共同引起待测样品 \mathbf{S} 米勒矩阵 \mathbf{M} 的误差为 $\delta\mathbf{M}$, 则(8)式的误差方程变为^[8,11]

$$(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})(\mathbf{T} + \delta\mathbf{T}) = \mathbf{R} + \delta\mathbf{R}. \quad (12)$$

相对误差 $\|\delta\mathbf{M}\| / \|\mathbf{M}\|$ 越小, 表示米勒矩阵 \mathbf{M} 越接近真实值。矩阵 \mathbf{T} 中所有元素都小于等于 1, 假设 $\delta\mathbf{T}$ 足够小, 且满足

$$\|\delta\mathbf{T}\| \|\mathbf{T}^{-1}\| < 1, \quad (13)$$

根据(4)式, $(1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})$ 可逆, (12)式两边依次右乘 \mathbf{T}^{-1} 和 $(1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})^{-1}$ 有

$$\mathbf{M} + \delta\mathbf{M} = (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R})\mathbf{T}^{-1} (1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})^{-1}, \quad (14)$$

则

$$\delta\mathbf{M} = (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R})\mathbf{T}^{-1} (1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})^{-1} - \mathbf{M}, \quad (15)$$

(15)式两边取范数, 结合(1)、(3)、(8)式有

$$\|\delta\mathbf{M}\| \leq (\|\mathbf{R}\| + \|\delta\mathbf{R}\|) \|\mathbf{T}^{-1}\| \|(1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})^{-1}\| + \|\mathbf{M}\| \leq (\|\mathbf{M}\| \|\mathbf{T}\| + \|\delta\mathbf{R}\|) \|\mathbf{T}^{-1}\| \|(1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})^{-1}\| + \|\mathbf{M}\|. \quad (16)$$

根据(3)、(4)式有

$$\|(1 + \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\delta\mathbf{T}\| \|\mathbf{T}^{-1}\|}, \quad (17)$$

$$\|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{M}\mathbf{T}\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{T}\|, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{M}\| \|\mathbf{T}\|} \leq \frac{1}{\|\mathbf{R}\|}. \quad (19)$$

结合(5)、(17)~(19)式, (16)式变为

$$\frac{\|\delta\mathbf{M}\|}{\|\mathbf{M}\|} \leq \left(\|\mathbf{T}\| + \frac{\|\delta\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{M}\|} \right) \|\mathbf{T}^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\delta\mathbf{T}\| \|\mathbf{T}^{-1}\|} + 1 = \|\mathbf{T}\| \|\mathbf{T}^{-1}\| \left(1 + \frac{\|\delta\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{M}\| \|\mathbf{T}\|} \right) \frac{1}{1 - \|\delta\mathbf{T}\| \|\mathbf{T}^{-1}\|} + 1 \leq \frac{\kappa(\mathbf{T})}{1 - \frac{\kappa(\mathbf{T}) \|\delta\mathbf{T}\|}{\|\mathbf{T}\|}} \left(1 + \frac{\|\delta\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{R}\|} \right) + 1. \quad (20)$$

如果 $\delta\mathbf{T}$ 满足(13)式, 误差方程(20)式对于所有相容性范数都成立。当 \mathbf{T} 的条件数 $\kappa(\mathbf{T})$ 、相对误差 $\|\delta\mathbf{T}\| / \|\mathbf{T}\|$ 及 \mathbf{R} 的相对误差 $\|\delta\mathbf{R}\| / \|\mathbf{R}\|$ 越小, 相对误差 $\|\delta\mathbf{M}\| / \|\mathbf{M}\|$ 就越小, 米勒矩阵 \mathbf{M} 就越接近真实值。

下面着重讨论 \mathbf{T} 的相对误差 $\|\delta\mathbf{T}\| / \|\mathbf{T}\|$ 、条件数 $\kappa(\mathbf{T})$ 对单光弹调制器米勒矩阵测量精度的影响。

3 误差分析

3.1 相对误差分析

根据(6)、(9)式, \mathbf{T} 的误差主要包括起偏器透振方向定位误差、1/4 波片快轴方位定位误差和 1/4 波片相位延迟角标定误差。相对误差 $\|\delta\mathbf{T}\| / \|\mathbf{T}\|$ 和通过 PSG 后的入射光 \mathbf{S}^{in} 相对误差呈正相关关系。因此研究 \mathbf{S}^{in} 相对误差大小即可间接研究相对误差 $\|\delta\mathbf{T}\| / \|\mathbf{T}\|$ 大小。

当起偏器透振方向为 α , 1/4 波片快轴方位角为 β , 1/4 波片的延迟角度为 δ , 可以推导得到^[8,9]

$$\mathbf{S}^{\text{in}} = \mathbf{NQI} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha(\cos^2 2\beta + \cos \delta \sin^2 2\beta) - \cos 2\beta \sin 2\alpha \sin 2\beta(\cos \delta - 1) \\ \sin 2\alpha(\cos \delta \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta) - \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta(\cos \delta - 1) \\ \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin \delta - \cos 2\beta \sin 2\alpha \sin \delta \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中 \mathbf{N}, \mathbf{Q} 分别为 1/4 波片、起偏器的米勒矩阵, 单位激光束 $\mathbf{I} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{S}^{\text{in}} = (s_0 \ s_1 \ s_2 \ s_3)^T$. 定义 \mathbf{S}^{in} 的误差为

$$\Delta \mathbf{S}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial s_0}{\partial \alpha} \right|_{\epsilon_1} + \left. \frac{\partial s_0}{\partial \beta} \right|_{\epsilon_2} + \left. \frac{\partial s_0}{\partial \delta} \right|_{\epsilon_3} \\ \left. \frac{\partial s_1}{\partial \alpha} \right|_{\epsilon_1} + \left. \frac{\partial s_1}{\partial \beta} \right|_{\epsilon_2} + \left. \frac{\partial s_1}{\partial \delta} \right|_{\epsilon_3} \\ \left. \frac{\partial s_2}{\partial \alpha} \right|_{\epsilon_1} + \left. \frac{\partial s_2}{\partial \beta} \right|_{\epsilon_2} + \left. \frac{\partial s_2}{\partial \delta} \right|_{\epsilon_3} \\ \left. \frac{\partial s_3}{\partial \alpha} \right|_{\epsilon_1} + \left. \frac{\partial s_3}{\partial \beta} \right|_{\epsilon_2} + \left. \frac{\partial s_3}{\partial \delta} \right|_{\epsilon_3} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

\mathbf{S}^{in} 的椭圆取向角理论值为^[13]

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{s_2}{s_1}\right), \quad (23)$$

式中 ϵ_1, ϵ_2 和 ϵ_3 分别为起偏器透振方向定位误差、1/4 波片快轴方位角定位误差及 1/4 波片相位延迟角标定误差。

当起偏器透振方向为 0° , 1/4 波片快轴方位角为 β , 1/4 波片相位延迟角度为 90° 时, 由 (21)~(23) 式可得, \mathbf{S}^{in} 的误差与椭圆取向角分别为

$$\Delta \mathbf{S}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} 0 \\ |\sin 4\beta|\epsilon_1 + |2\sin 4\beta|\epsilon_2 + |\sin^2 2\beta|\epsilon_3 \\ |2\sin^2 2\beta|\epsilon_1 + |2\cos 4\beta|\epsilon_2 + \left|\frac{1}{2}\sin 4\beta\right|\epsilon_3 \\ |2\cos 2\beta|\epsilon_1 + |2\cos 2\beta|\epsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Delta s_2 + s_2}{\Delta s_1 + s_1}\right). \quad (25)$$

当 $\epsilon_1 = 0.2^\circ, \epsilon_2 = 0.2^\circ, \epsilon_3 = 1.2^\circ$ 时(对应 1/4 波片相位延迟量标称偏差 $\lambda/300$), \mathbf{S}^{in} 的误差及椭圆取向角分别如图 2、3 所示。

根据图 2, \mathbf{S}^{in} 的误差主要由 Δs_1 决定, 当快轴方位角为 $\pm 33.75^\circ$ 和 $\pm 56.25^\circ$ 时, 其误差最大为 1.264%, 优化 1/4 波片快轴方位角的取值范围, 可以减小误差。由图 3 可知, \mathbf{S}^{in} 椭圆取向角理论值为一条倾斜直线, 模拟计算值直线部分与理论值基本重合, 在部分角度范围内出现波动, 导致椭圆取向角呈现较大误差。根据图 3(b), 当 1/4 波片快轴方位角取

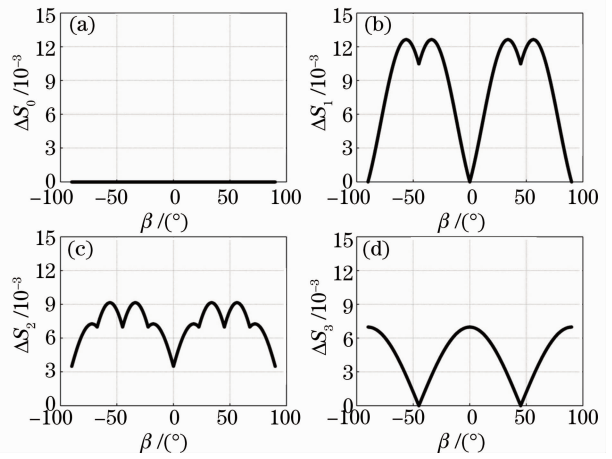


图 2 斯托克斯参量误差与 1/4 波片快轴方位角的关系
Fig. 2 Error of Stokes parameters versus fast axis angle of quarter-wave plate

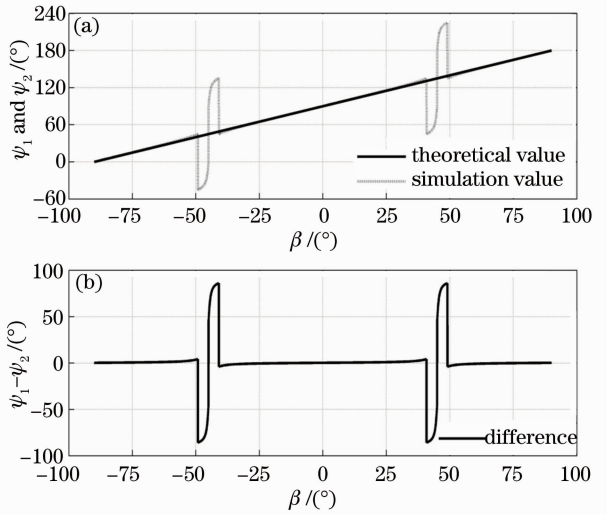


图 3 椭圆取向角与 1/4 波片快轴方位角的关系。(a) 理论值与模拟计算值; (b) 理论值与模拟计算值之间差值

Fig. 3 Orientation angle versus fast axis angle of quarter-wave plate. (a) Theoretical value and simulation value; (b) difference between theoretical value and simulation value

值范围为 $[-90^\circ, -49.22^\circ] \cup [-40.97^\circ, 40.78^\circ] \cup [49.03^\circ, 90^\circ]$ 时, 其差值近似为零, 误差很小。

进一步模拟计算表明, 当起偏器透振方向角和 1/4 波片快轴方位角定位误差均减小到 0.05° , 1/4

波片相位延迟量标称偏差降低到 $\lambda/500$ 时, S^m 误差 Δs_1 最大值减小到 0.6545%。当 1/4 波片快轴方位角取值范围扩大为 $[-90^\circ, -48.23^\circ] \cup [-41.82^\circ, 41.77^\circ] \cup [48.18^\circ, 90^\circ]$ 时, 差值仍然近似为零, 误差很小。因此, 提高检偏器透振方向角及 1/4 波片快轴方位角的定位精度, 降低 1/4 波片相位延迟量标称偏差可以进一步降低 S^m 误差 Δs_1 的最大值, 即降低待测 1/4 波片米勒矩阵各元素的最大相对误差, 并且拓展 1/4 快轴方位角的取值范围。

表 1 1/4 波片的优化方位角组合

Table 1 Optimum angle sets for the quarter-wave plate

No.	$\beta_1 / (^\circ)$	$\beta_2 / (^\circ)$	$\beta_3 / (^\circ)$	$\beta_4 / (^\circ)$	$\kappa(T)$
1	-90	-45	30	60	3.63
2	-22.5	0	22.5	45	10.35
3	-45	0	30	60	3.63
4	-45	45	67.5	90	5.77
5	-50	-13	16	52	3.28
6	-73	-36	40	79	3.32
7	-77	-45	-13	45	4.09
8	-77.02	-45.00	-12.98	45.00	4.09

根据表 1, 传统优化 1/4 波片方位角组合第 1~4 组及组合第 8 组中, 含有 $\pm 45^\circ$, 在图 3(b) 中 1/4 波片快轴方位角取值范围 $[-90^\circ, -49.22^\circ] \cup [-40.97^\circ, 40.78^\circ] \cup [49.03^\circ, 90^\circ]$ 之外, 均存在较大误差。为了降低误差, 在 1/4 波片快轴方位角取值范围之内对 1/4 波片方位角进行优化, 优化步长为 1° , 得到优化组合如表 1 中第 5 和第 6 组所示。其中, 优化组合第 7 组和传统优化 1/4 波片方位角组合第 8 组中各对应角度及条件数均近似相等, 因此, 优化组合第 7 组可以等效传统优化 1/4 波片方位角组合第 8 组。为验证优化组合第 5 和第 6 组比传统优化 1/4 波片方位角组合第 1~4 组及组合第 7 组具有更小误差的正确性, 进行相关对比实验。

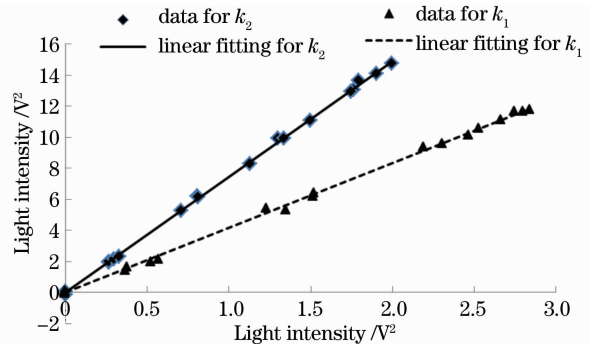
4 实验

采用参考文献[23]同一实验装置进行实验, 实

3.2 条件数分析

传统条件数优化分析中, 没有考虑 T 的相对误差, 即起偏器透振方向定位误差、1/4 波片快轴方位角定位误差和 1/4 波片相位延迟角标定误差。因此, 传统优化 1/4 波片方位角组合 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ (如表 1 中第 1~4 组^[11]及第 8 组^[8]所示) 存在较大误差, 其中 β 取值范围为 $-\pi/2 \leq \beta_i \leq \pi/2 (i=1, 2, 3, 4)$ 。

校准曲线如图 4 所示, 校准曲线与校准原理线性关系相一致。

图 4 k_1 和 k_2 的校准曲线Fig. 4 Calibration curves for k_1 and k_2

利用表 1 中优化 1/4 波片方位角组合第 1~7 组分别对快轴方位角为 0° , 相位延迟量标称偏差为 $\lambda/300$ 的待测 1/4 波片的米勒矩阵进行测量, 测量结果如表 2 所示。

表 2 不同优化方位角组合下的测量结果

Table 2 Measurement results under different optimum angle sets

No.	$\delta / (^\circ)$					$\varphi / (^\circ)$			
	δa	δb	δc	avg1	Error	φ_a	φ_b	φ_c	avg2
1	90.30	90.48	90.48	90.42	0.42	0.34	0.33	0.03	0.23
2	91.13	89.06	89.04	89.74	-0.26	1.22	1.22	0.77	1.07
3	90.47	90.45	90.45	90.46	0.47	0.27	0.27	-0.02	0.17
4	87.93	90.11	90.11	89.38	-0.62	-0.54	-0.54	0.35	-0.24
5	90.15	90.00	90.00	90.05	0.05	0.06	0.06	-0.01	0.03
6	90.37	89.6373	89.64	89.88	-0.12	0.02	0.02	0.13	0.06
7	91.38	90.1088	90.11	90.53	0.53	0.14	0.14	-0.55	-0.09

表 2 中 δa 、 δb 、 δc 和 φ_a 、 φ_b 、 φ_c 分别表示运用不同测量算法得到的待测 1/4 波片的相位延迟量及快轴方位角^[23]：

$$\begin{cases} \delta a = \arccos(m_{22} + m_{33} - m_{11}) \\ \delta b = \arctan \frac{\sqrt{(m_{42} - m_{24})^2 + (m_{34} - m_{43})^2}}{2m_{44}} + 180^\circ, \\ \delta c = \arccos m_{44} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \varphi_a = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \frac{m_{23} + m_{32}}{m_{11} - m_{33}} \right) \\ \varphi_b = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2(m_{23} + m_{32})(m_{11} + m_{44})}{(m_{34} - m_{43})^2} \right], \\ \varphi_c = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{m_{24} - m_{42}}{m_{34} - m_{43}} \right) \end{cases} \quad (27)$$

式中 m_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$) 为待测 1/4 波片米勒矩阵各对应元素。表 2 中的 avg1、avg2 和 error 分别表示同种优化方位角组合情况下三种不同算法得到的平均相位延迟量、平均快轴方位角、平均相位延迟量与标准 1/4 波片相位延迟量 90° 的差值。从表 2 可以看出，不同优化组合所对应的相位延迟量及快轴方位角误差的大小不同。

根据图 5，相比传统优化 1/4 波片方位角组合第 1~4 组及组合第 7 组，优化组合第 5 组和第 6 组测量得到的平均相位延迟量误差和平均快轴方位角误差分别只有 0.05° 、 0.12° 和 0.03° 、 0.06° ，即同时具有最小的相位延迟量及快轴方位角测量误差。

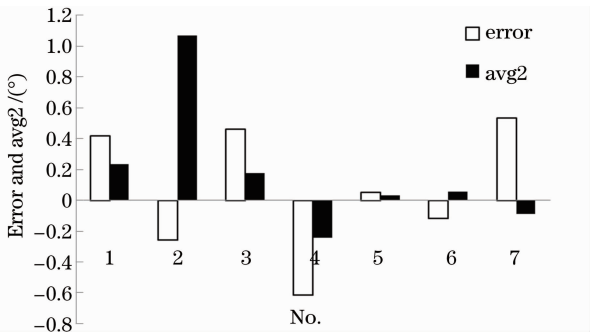


图 5 不同优化方位角组合下的误差分布
Fig. 5 Error distribution under different optimum angle sets

优化组合第 5 组和第 6 组测量得到的快轴方位角为 0° ，相位延迟量标称偏差为 $\lambda/300$ 的 1/4 波片的米勒矩阵分别如下：

$$\mathbf{M}_{\text{No.5}} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0012 & -0.0012 \\ 0.0000 & 0.0012 & -0.0009 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0012 & -1.0000 & -0.0009 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_{\text{No.6}} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0020 & -0.0020 \\ 0.0000 & 0.0020 & 0.0020 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0020 & -1.0000 & 0.0020 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

根据(28)、(29)式，相对于标准米勒矩阵^[24]，优化组合第 5 组和第 6 组测量得到的待测 1/4 波片米勒矩阵各元素最大相对误差分别为 0.12% 和 0.20% ，相比传统优化 1/4 波片方位角组合 $\{-90^\circ, -45^\circ, 30^\circ, 60^\circ\}$ 情况下米勒矩阵各元素的最大相对误差 0.83% ^[23] 分别提高了 85.54% 和 75.90% 。采用优化组合第 5 组和第 6 组提高了待测样品米勒矩阵的测量精度。

5 结 论

本文提出了单光弹调制器米勒矩阵测量误差方程，给出了相对误差分析方法，并结合矩阵条件数得到了降低米勒矩阵各元素最大相对误差的两组 1/4 波片方位角优化组合。实验结果表明，该两组 1/4 波片方位角优化组合，测量得到的待测 1/4 波片米勒矩阵各元素的最大相对误差分别为 0.12% 和 0.20% ，相比传统 1/4 波片方位角优化组合 $\{-90^\circ, -45^\circ, 30^\circ, 60^\circ\}$ 的最大相对误差 0.83% ，分别降低了 85.54% 和 75.90% ，优化组合测量得到的平均相位延迟量误差和平均快轴方位角误差分别只有 0.05° 、 0.12° 和 0.03° 、 0.06° ，同时具有最小的相位延迟量及快轴方位角测量误差。进一步模拟计算表明，提高检偏器透振方向角及 1/4 波片快轴方位角的定位精度，降低 1/4 波片相位延迟量标称偏差可以进一步降低待测 1/4 波片米勒矩阵各元素的最大相对误差，并且扩大了 1/4 快轴方位角的取值范围。

参 考 文 献

- 1 M. Losurdo, M. Bergmair, G. Bruno *et al.*. Spectroscopic ellipsometry and polarimetry for materials and systems analysis at the nanometer scale: state-of-the-art, potential, and perspectives [J]. *Nanopart. Res.*, 2009, **11**(7): 1521~1554
- 2 M. Losurdo, M. M. Giangregorio, P. Capezzuto *et al.*. Structural and optical properties of nanocrystalline Er_2O_3 thin films deposited by a versatile low-pressure MOCVD approach [J]. *Electrochem. Soc.*, 2008, **155**(2): G44~G50
- 3 S. B. Hatit, M. Foldyna, A. De Martino *et al.*. Angle-resolved Mueller polarimeter using a microscope objective [J]. *Phys. Stat. Sol. A*, 2008, **205**(4): 743~747
- 4 G. R. McIntyre, J. Kye, H. Levinson *et al.*. Polarization aberrations in hyper-numerical-aperture projection printing: a comparison of various representations [J]. *J. Micro Nanolith.*, *MEMS, MOEMS*, 2006, **5**(3): 033001
- 5 R. A. Chipman. Handbook of Optics [M]. New York: McGraw

- Hill, Inc., 1995
- 6 D. Goldstein. Polarized Light [M]. New York: Marcel Dekker, Inc., 2003
- 7 S. Breugnot, P. Clemenceau. Modeling and performances of a polarization active imager at $\lambda=806$ nm [J]. *Opt. Eng.*, 2000, **39**(10): 2681~2688
- 8 I. J. Vaughn, B. G. Hoover. Noise reduction in a laser polarimeter based on discrete wave plate rotations [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(3): 2091~2108
- 9 Y. Takakura, J. E. Ahmad. Noise distribution of Mueller matrices retrieved with active rotating polarimeters [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(30): 7354~7364
- 10 J. Zallat, S. Ainouz, M. P. Stoll. Optimal configurations for imaging polarimeters: impact of image noise and systematic errors [J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2006, **8**(9): 807~814
- 11 A. Ambirajan, D. C. Look Jr. Optimum angles for a polarimeter; part II [J]. *Opt. Eng.*, 1995, **34**(6): 1656~1658
- 12 A. Zeng, F. Li, L. Zhu *et al.*. Simultaneous measurement of retardance and fast axis angle of a quarter-wave plate using one photoelastic modulator [J]. *Appl. Opt.*, 2011, **50**(22): 4347~4352
- 13 W. Guan, P. J. Cook, G. A. Jones *et al.*. Experimental determination of the Stokes parameters using a dual photoelastic modulator system [J]. *Appl. Opt.*, 2010, **49**(14): 2644~2652
- 14 W. Guan, G. A. Jones, Y. W. Liu *et al.*. The measurement of the Stokes parameters: a generalized methodology using a dual photoelastic modulator system [J]. *Appl. Phys.*, 2008, **103**(4): 043104
- 15 Y. W. Liu, G. A. Jones, Y. Peng *et al.*. Generalized theory and application of Stokes parameter measurements made with a single photoelastic modulator [J]. *Appl. Phys.*, 2006, **100**(6): 063537
- 16 R. Kress. Numerical Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998
- 17 Li Fanyue, Han Jie, Zeng Aijun *et al.*. Method for measuring retardation by swinging quarter-wave plate with phase modulator [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(2): 0208003
- 李凡月, 韩杰, 曾爱军等. 基于相位调制和样品摆动的1/4波片相位延迟量测量方法[J]. *中国激光*, 2011, **38**(2): 0208003
- 18 Yang Kun, Zeng Aijun, Wang Xiangzhao *et al.*. Fast axis calibration of quarter-wave plate by fundamental component extinction [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(11): 1554~1556
- 杨坤, 曾爱军, 王向朝等. 基于基频分量消光的1/4波片快轴标定方法[J]. *中国激光*, 2007, **34**(11): 1554~1556
- 19 Hu Jianming, Zeng Aijun, Wang Xiangzhao. Method to measure phase retardation of wave plate based on photoelastic modulation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(11): 1681~1686
- 胡建明, 曾爱军, 王向朝. 基于光弹调制技术的波片相位延迟量测量方法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(11): 1681~1686
- 20 Wang Yonghui, Zheng Chunlong, Zhao Zhentang. Multi-point calibration method based on Stokes ellipsometry system [J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(11): 1108013
- 王勇辉, 郑春龙, 赵振堂. 基于斯托克斯椭偏测量系统的多点定标法[J]. *中国激光*, 2012, **39**(11): 1108013
- 21 Li Zhicheng, Tang Zhilie, Chen Ping *et al.*. Study of photoelastic stress distribution and imaging method based on Stokes parameters [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(5): 0512005
- 李志诚, 唐志列, 陈萍等. 基于斯托克斯参量的光弹性应力分布及成像方法研究[J]. *光学学报*, 2012, **32**(5): 0512005
- 22 Hou Junfeng, Yu Jia, Wang Dongguang *et al.*. Phase retardation measurement of wave plates based on the self-calibration method [J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(4): 0408007
- 侯俊峰, 于佳, 王东光等. 自校准法测量波片相位延迟[J]. *中国激光*, 2012, **39**(4): 0408007
- 23 Cao Shaoqian, Bu Yang, Wang Xiangzhao *et al.*. Measurement technique for the Mueller matrix based on a single photo-elastic modulator [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, **33**(1): 0112006
- 曹绍谦, 步扬, 王向朝等. 基于单光弹调制器的米勒矩阵测量技术[J]. *光学学报*, 2013, **33**(1): 0112006
- 24 B. Wang, T. C. Oakberg. A new instrument for measuring both the magnitude and angle of low level linear birefringence [J]. *Rev. Sci. Instrum.*, 1999, **70**(10): 3847~3854

栏目编辑: 何卓铭