

# 提高 S 变换轮廓术测量精度的方法

湛秋菊 陈文静 钟 敏 苏显渝

(四川大学电子信息学院光电科学技术系, 四川 成都 610064)

**摘要** S 变换结合了短时傅里叶变换和小波变换的优点, 是一种无损可逆的非平稳信号时频分析方法, 具有线性、多分辨率、逆变换唯一, 且与傅里叶变换保持着直接联系等特点。针对基于“脊”分析原理的 S 变换轮廓术中, 相位采用一阶泰勒展开描述时存在的不足, 提出了更为精确的二阶泰勒展式的相位描述方法。通过严格的理论分析, 得到了更准确的相位场的计算公式, 弥补了采用一阶泰勒展式描述相位的不足, 大大提高了 S 变换“脊”方法重建三维面形的精度。完成了相应的计算机模拟和实验验证, 并将 S 变换三维重建效果与以前的基于相位一阶展式的结果进行了对比。

**关键词** 测量; S 变换; 条纹分析; 泰勒展开; 三维面形重建

**中图分类号** O438 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201333.0612009

## Method for Improving the Accuracy of S-Transform Profilometry

Shen Qiuju Chen Wenjing Zhong Min Su Xianyu

(Department of Optoelectronic Science and Technology, College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

**Abstract** S Transform combines the advantages of the windowed Fourier transform and the wavelet transform. It is a kind of nondestructive and reversible time-frequency analysis method for the non-stationary signals with the characteristics of the linearity, multi-resolution and the only one inverse transformation existing. In addition, it has direct relationship with Fourier transform. Due to the shortage of the phase description based on the 1st-order Taylor expansion in the S transform “ridge” method, a more accuracy phase expression based on the 2nd-order Taylor expansion is proposed. According to the strictly theoretical analysis, a more accuracy calculation expression formula of the phase field is gotten and corresponding computer simulation and experiment are finished, which enriches the theory of S transform and improves the measurement accuracy of S transform. The three-dimensional (3D) reconstruction results based on the 1st-order Taylor expansion are also compared with that based on our method in S transform “ridge” method. The simulations and experiments show that the reconstruction of the surface from the 2nd-order Taylor expansion has higher measurement precision.

**Key words** measurement; S transform; fringe pattern analysis; Taylor expansion; 3D reconstruction

**OCIS codes** 120.2650; 120.6650; 070.2590

## 1 引 言

基于结构光投影的主动光学三维测量技术具有无损、快速和分辨率高等优点, 在地质勘探、生物医学、机器视觉和工业自动检测等领域存在广泛应用<sup>[1~3]</sup>。测量中采集到的变形条纹是待测参数的信息载体, 通过对其进行相位解调, 可获得待测物理量。常用的条纹分析方法包括相位测量轮廓术

(PMP)<sup>[4]</sup>、傅里叶变换轮廓术<sup>[5]</sup>、窗口傅里叶变换轮廓术<sup>[6,7]</sup>、小波变换轮廓术<sup>[8,9]</sup>以及 S 变换轮廓术<sup>[10~14]</sup>等。相位测量轮廓术可以从具有一定相差的多帧变形条纹图中解算出相位信息, 从而重建物体的三维面形。傅里叶变换轮廓术、窗口傅里叶变换轮廓术、小波变换轮廓术以及 S 变换轮廓术<sup>[5~15]</sup>等只需单帧变形条纹图, 就能解调出相位信息, 完成

**收稿日期:** 2013-02-01; **收到修改稿日期:** 2013-03-05

**基金项目:** 国家自然科学基金(61177010)和四川省学术和技术带头人培养资金(2012DTPY011)资助课题。

**作者简介:** 湛秋菊(1987—), 女, 硕士研究生, 主要从事光学三维传感方面的研究。E-mail: 419509383@qq.com

**导师简介:** 陈文静(1968—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事光学三维传感和光学信息处理等方面的研究。

E-mail: chenwj0409@scu.edu.cn(中国光学学会会员号: S042011341S)

三维面形重建。它们在实时和动态过程测量中具有广泛的应用前景。傅里叶变换轮廓术<sup>[5]</sup>采用全局信号分析方法,具有速度快、频率分辨率高等优点。当被测面形的高度变化小时,则能得到满意的三维测量结果。由于傅里叶变换缺乏局部分析能力,被测物体的面形复杂时,变形条纹图则具有明显的非平稳特征,条纹局部不完善所引起的相位计算误差将会传递到全场,导致重建结果出现错误。

近年来,时频分析技术[窗口傅里叶变换(WFT)<sup>[6,7]</sup>、小波变换(WT)<sup>[8,9]</sup>和S变换(ST)<sup>[10~14]</sup>等]被引入到光学三维面形测量中,弥补了傅里叶变换的不足。窗口傅里叶变换采用大小固定的窗口对所覆盖区的局部条纹进行分析,在获得条纹的局部频谱的同时,还保留了信号不同分量的空间位置信息。该技术用于条纹相位解调时,包括窗口傅里叶滤波方法和窗口傅里叶“脊”方法。文献[7]对窗口傅里叶变换在不同类条纹图中的相位解调应用做了详尽的分析。连续小波变换方法用于光学三维面形重建时,通过变形条纹与子小波函数族之间的卷积运算,利用局部信号和小波函数之间的相似关系,来求取小波变换“脊”处的相位,从而获得被测物体的三维面形。S变换<sup>[10~14]</sup>是一种无损可逆的时频分析方法,采用大小受信号瞬时频率控制的Gauss函数为窗函数,且所有的局部S变换谱沿窗口移动方向的叠加重构傅里叶谱。由于窗口大小可调,S变换也具有类似小波变换的多分辨率特性。S变换有基于“脊”处理和基于“滤波”处理的两种方法。在条纹分析中,S变换“脊”分析方法是研究热点<sup>[11]</sup>。

本文就S变换“脊”分析方法中,局部相位用一阶泰勒展式描述时存在的不足,提出相位基于二阶泰勒展式的S变换“脊”的描述方法。利用指数函数的性质,通过严格的理论分析,得到此时“脊”处的相位表达式。同相位采用一阶泰勒展开的分析相比,由于二阶泰勒展开式描述的瞬时相位的表达式中增加了与相位的二阶导数和条纹的瞬时频率有关的修正项,因此更符合实际情况,特别是在被测物体的高度变化率大的地方,测量精度更高。对比研究了相位基于一阶泰勒展开和二阶泰勒展开的S变换“脊”方法的三维面形重建。理论研究和实验证明:利用相位的二阶导数修正后,能够从“脊”信息中更准确地重建待测的三维面形。

## 2 S变换基本理论

S变换定义为(以一维为例)<sup>[10]</sup>

$$S(b, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)w(b-x, f)\exp(-j2\pi fx)dx, \quad (1)$$

式中  $j$  为虚数,  $g(x)$  为待分析信号,  $w(b-x, f)$  为大小受到频率参数  $f(f > 0)$  控制的伸缩高斯窗函数, 可以表示为

$$w(b-x, f) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2}\right], \quad (2)$$

式中  $b$  为移动因子, 控制窗口中心在  $x$  轴方向的移动, 窗宽  $\Delta x = \frac{\sqrt{2}}{2f}$ , 在空域, 信息集中在

$\left[b - \frac{\Delta x}{2}, b + \frac{\Delta x}{2}\right]$ 。窗口函数可以表示为

$$w(b-x, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha, f)\exp[j2\pi\alpha(b-x)]d\alpha, \quad (3)$$

式中  $W(\alpha, f)$  为  $w(x, f)$  的傅里叶谱,  $\alpha$  是频率域变量。S变换也可以表示为

$$S(b, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \times \exp(-j2\pi fx) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha, f)\exp[j2\pi\alpha(b-x)]d\alpha \right\} dx = \mathcal{F}^{-1}[G(\alpha+f)W(\alpha, f)], \quad (4)$$

式中  $G(\alpha)$  为  $g(x)$  的傅里叶变换,  $W(\alpha, f) = \exp\left(-\frac{2\pi^2\alpha^2}{f^2}\right)$ , 窗宽  $\Delta\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}f$ , 在  $\alpha$  域, 信息集中在  $\left[-\frac{\Delta\alpha}{2}, \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$ 。可见信息在  $x$  域和  $\alpha$  域都有良好的紧

支性, 可取得最小不确定度  $\Delta x \Delta\alpha = \frac{1}{2}$ 。S变换的时-频分辨率随待分析信号的瞬时频率自动调整, 在低频时, Gauss窗在时间域较宽频率域较窄, 因而具有高的频率分辨率; 反之亦然。

S变换的时频谱与傅里叶频谱有着内在联系, 即所有位置的“局部频谱”的叠加可表示为<sup>[12]</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(b, f)db = G(f). \quad (5)$$

## 3 基于S变换的三维面形重建原理

基于结构光投影的光学三维面形测量方法的原理示意图如图1所示<sup>[1,2]</sup>。

投影装置将正弦结构条纹投射到被测物体表面上, CCD从另一个方向获取受到物体表面高度调制

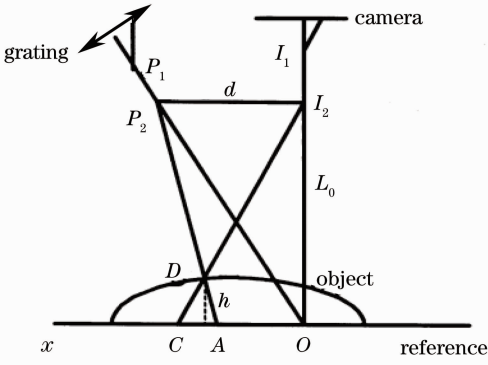


图 1 测量装置示意图

Fig. 1 Scheme of the geometry

的变形条纹图。其空间光场可以表示为(以单载频为例)

$$g(x, y) = I_0(x, y) \{1 + V(x, y) \times \cos[2\pi f_0 x + \varphi(x, y)]\}, \quad (6)$$

式中  $I_0(x, y)$ ,  $V(x, y)$  分别表征背景光场和条纹对比度,  $f_0$  为空间载频,  $\varphi(x, y)$  是由物体表面高度

$h(x, y)$  分布引起的相位调制。

设正弦变形条纹图中的任意一行表示为

$$g(x) = I_0(x) \{1 + V(x) \cos[2\pi f_0 x + \varphi(x)]\}. \quad (7)$$

根据(1)式,在任意位置  $b$  处, S 变换是在受到频率参数  $f$  控制的高斯窗确定的局部傅里叶基的支撑集上进行的。在目前已有的“脊”分析方法中,设  $I_0(x)$  和  $V(x)$  是变化很缓慢的函数,故在支撑集上可认为  $I_0(x) = I_0(b)$  和  $V(x) = V(b)$ ; 在  $b$  处,相位  $\varphi(x)$  由一阶泰勒级数近似表示为

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x - b). \quad (8)$$

实质上,被测物体存在高度变化大的区域时,仅用一阶泰勒展式近似描述相位将会带来较大的误差。需要采用二阶泰勒展式来描述相位,可表示为

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x - b) + \frac{\varphi''(b)(x - b)^2}{2}. \quad (9)$$

将(7)式代入(1)式,可以得到条纹的 S 变换的表达式为

$$\begin{aligned} S(b, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) w(b - x, f) \exp(-j2\pi f x) dx = \frac{I_0(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2} - j2\pi f x\right] dx + \\ &\frac{I_1(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[2\pi f_0 x + \varphi(x)] \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2} - j2\pi f x\right] dx = \\ &\frac{I_0(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2} - j2\pi f x\right] dx + \frac{I_1(b) |f|}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2} + j2\pi f_0 x + j\varphi(x) - j2\pi f x\right] dx + \\ &\frac{I_1(b) |f|}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2} - j2\pi f_0 x - j\varphi(x) - j2\pi f x\right] dx, \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $I_1(b) = I_0(b)V(b)$ , 即 S 变换系数可以表示为

$$S(b, f) = S_1(b, f) + S_2(b, f) + S_3(b, f), \quad (11)$$

式中,与背景有关的项  $S_1(b, f)$  表示为

$$\begin{aligned} S_1(b, f) &= \frac{I_0(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{f^2(b-x)^2}{2} - j2\pi f x\right] dx = \\ &\frac{I_0(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} f^2 b^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{f^2}{2} \left(x + \frac{f^2 b - j2\pi f}{f^2}\right)^2 + \frac{f^2}{2} \left(\frac{f^2 b - j2\pi f}{f^2}\right)^2\right] dx = \\ &\frac{I_0(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j2\pi f b - 2\pi^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{f^2}{2} \left[x + \frac{f^2 b - j2\pi f}{f^2}\right]^2\right\} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

由广义积分公式  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ , ( $a > 0$ ) 化简为

$$S_1(b, f) = \frac{I_0(b) |f|}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j2\pi f b - 2\pi^2) \sqrt{\frac{\pi}{f^2/2}} = I_0(b) \exp(-2\pi^2) \exp(-j2\pi f b). \quad (13)$$

将(9)式代入(10)式,经过严格的推导,可以计算出  $S_2(b, f)$  和  $S_3(b, f)$  为

$$S_2(b, f) = \frac{I_1(b) |f|}{2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{f^2(b-x)^2}{2} + j2\pi f_0 x + j\varphi(x) - j2\pi f x \right] dx =$$

$$\frac{I_1(b) |f|}{2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} [j\varphi''(b) - f^2] \left[ x + \frac{B}{j\varphi''(b) - f^2} \right]^2 + \frac{B[f^2 + j\varphi''(b)] + 2C\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \right\} dx, \quad (14)$$

式中

$$B = f^2 b + j\varphi'(b) + j2\pi f_0 - jb\varphi''(b) - j2\pi f,$$

$$C = j\varphi(b) - \frac{f^2 b^2}{2} - jb\varphi'(b) + \frac{jb^2 \varphi''(b)}{2}. \quad (15)$$

对  $S_2(b, f)$  进行积分, 并在化简的过程中采用如下的广义积分公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (a > 0), \quad (16)$$

则有

$$S_2(b, f) = \frac{I_1(b) |f|}{2 \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{[f^2 - j\varphi''(b)]/2}} \exp \left\{ \frac{j4\pi b(f_0 - f)\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} + \right.$$

$$\left. \frac{j2\varphi(b)\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\} - j\varphi''(b)[2\pi(f_0 - f) + \varphi'(b)]^2 - f^2[2\pi(f_0 - f) + \varphi'(b)]^2}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \right\} =$$

$$\frac{I_1(b) |f| \{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}^{-1/4}}{2} \exp \left\{ -\frac{f^2[2\pi(f_0 - f) + \varphi'(b)]^2}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \right\} \cdot$$

$$\exp \left\{ j \left\{ \varphi(b) + 2\pi b(f_0 - f) + \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''(b)}{f^2} \right] - \frac{\varphi''(b)[2\pi(f_0 - f) + \varphi'(b)]^2}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \right\} \right\}. \quad (17)$$

同理可得

$$S_3(b, f) = \frac{I_1(b) |f| \{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}^{-1/4}}{2} \exp \left\{ -\frac{f^2[2\pi(f_0 + f) + \varphi'(b)]^2}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \right\} \cdot$$

$$\exp \left\{ j \left\{ -\varphi(b) - 2\pi f_0 b - 2\pi f b - \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''(b)}{f^2} \right] + \frac{\varphi''(b)[2\pi(f_0 + f) + \varphi'(b)]^2}{2\{f^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \right\} \right\}, \quad (18)$$

而采用一阶泰勒展开得到的 S 变换系数对应项分别为<sup>[11]</sup>

$$S_1(b, f) = I_0(b) \exp(-2\pi^2) \exp(-j2\pi f b),$$

$$S_2(b, f) = \frac{I_1(b)}{2} \exp \left\{ -\frac{[2\pi(f_0 - f) + \varphi'(b)]^2}{2f^2} \right\} \exp \{ j[\varphi(b) + 2\pi(f_0 - f)] \},$$

$$S_3(b, f) = \frac{I_1(b)}{2} \exp \left\{ -\frac{[2\pi(f_0 + f) + \varphi'(b)]^2}{2f^2} \right\} \exp \{ j[-\varphi(b) - 2\pi(f_0 + f)] \}. \quad (19)$$

对比(12)、(17)、(18)式和(19)式, 当忽略与相位的二阶导数有关的修正项后, (12)、(17)、(18)式表示的 S 变换系数就依次完全退化为(19)式。

(11)式中, S 变换系数的  $S_2(b, f)$  和  $S_3(b, f)$  模值  $|S_2(b, f)|$  和  $|S_3(b, f)|$  是相位二阶导数的函数。由于  $\exp(-2\pi^2) < 10^{-8} \approx 0$ , 故  $S_1 \approx 0$ 。同时从(17)式中可知,  $|S_2(b, f)|$  在  $f_b = f_0 + \frac{\varphi'(b)}{2\pi} + K[\varphi''(b)]$  处取得最大值, 而在  $f_b$  处,  $|S_3(b, f)| \approx 0$ , 其中  $K[\varphi''(b)]$  为与  $\varphi''(b)$  相关的偏差量<sup>[14]</sup>。

可见,  $|S(b, f)|$  在  $f_b = f_0 + \frac{\varphi'(b)}{2\pi} + K[\varphi''(b)]$  取得脊值, 在“脊”处有,  $\frac{\varphi''(b)[2\pi(f_0 - f_b) + \varphi'(b)]^2}{2\{f_b^4 + [\varphi''(b)]^2\}} = \frac{\varphi''(b)4\pi^2 \{K[\varphi''(b)]\}^2}{2\{f_b^4 + [\varphi''(b)]^2\}} \approx 0$ , 其中  $K[\varphi''(b)]$  为偏差量。

故此时代 S 变换“脊”处系数可近似表示为

$$S(b, f_b) \approx \frac{I_1(b) |f_b|}{2} \{f_b^4 + [\varphi''(b)]^2\}^{-1/4} \exp \left\{ j \left\{ \varphi(b) + 2\pi(f_0 - f_b)b + \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''(b)}{f_b^2} \right] \right\} \right\}, \quad (20)$$

根据(20)式, 可从 S 变换系数中提取相位  $\phi_s(b, f_b)$ :

$$\phi_s(b, f_b) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[S(b, f_b)]}{\text{Re}[S(b, f_b)]} \right\} = \varphi(b) + 2\pi f_0 b - 2\pi f_b b + \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''(b)}{f_b^2} \right], \quad (21)$$

式中,  $\arctan$  代表反正切函数,  $\text{Im}$  和  $\text{Re}$  分别代表 S 变换系数的虚部和实部。 $\phi_s(b, f_b)$  由反正切函数所得, 分布在  $-\pi \sim \pi$  之间, 通过相位展开即可获得连续的相位分布, 即

$$\varphi(b) = \text{unwrap} \left\{ \phi_s(b, f_b) + 2\pi(f_b - f_0)b - \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''(b)}{f_b^2} \right] \right\}, \quad (22)$$

式中  $\text{unwrap}$  代表 Matlab 自带的相位展开函数。

通过类似的分析, 可得二维(2D)S 变换中采用二阶泰勒展开的相位表达式为

$$\varphi(u, v) = \text{unwrap} \left\{ \phi_s(u, v, f_u, f_v) + 2\pi(f_u - f_{0u})u + 2\pi(f_v - f_{0v})v - \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''_x(u, v)}{f_u^2} \right] - \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\varphi''_y(u, v)}{f_v^2} \right] \right\}. \quad (23)$$

当 S 变换过程遍历整幅条纹图后, 可以得到条纹中携带的相位分布  $\varphi(x, y)$ 。利用测量装置中的系统参数, 就可以重建被测物体的表面三维分布。

## 4 计算机模拟

计算机模拟验证了本文的分析。模拟物体为  $3.5f_{\text{peaks}}$ ,  $f_{\text{peaks}}$  函数表达式为

$$f_{\text{peaks}}(x, y) = 3(1-x)^2 \exp[-(x^2) - (y+1)^2] - 10(x/5 - x^3 - y^5) \exp(-x^2 - y^2) - \exp[-(x+1)^2 - y^2]/3, \quad (24)$$

考虑到噪声的影响, 模拟的参考条纹和变形条纹图分别表示为

$$I_{\text{re}} = 0.5 + 0.5 \cos \left( \frac{2\pi x + 2\pi y}{p} \right) + n(x, y),$$

$$I_{\text{de}} = 0.5 + 0.5 \cos \left[ \frac{2\pi x + 2\pi y}{p} + 3.5 f_{\text{peaks}}(x, y) \right] + n(x, y). \quad (25)$$

式中  $p=12$  pixel, 条纹尺寸为  $264 \text{ pixel} \times 264 \text{ pixel}$ ,  $n(x, y)$  表示噪音分布, 模拟时信噪比取为 12 dB。模拟物体和变形条纹分别如图 2(a) 和 (b) 所示。

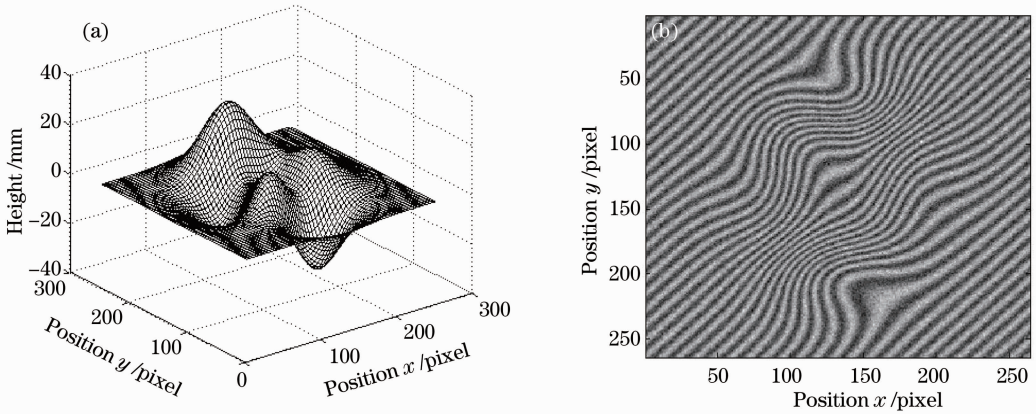


图 2 (a) 模拟物体; (b) 加噪声的变形条纹

Fig. 2 (a) Simulated object; (b) deformed fringe pattern with noise

图 3(a) 和 (b) 分别表示二维 S 变换“脊”方法中采用相位的一阶泰勒展开和二阶泰勒展开的重建结果, 图 3(c) 和 (d) 表示对应的误差分布。在图 3(e) 和 3(f) 中画出了对应被测物体高度变化较大的一行(108 行)采用相位二阶导数修正前后重建结果的

误差分布。

采用一阶泰勒展开的标准偏差为 0.14614; 采用二阶泰勒展开的标准偏差为 0.065036。可见在高度变化率大的地方, 采用二阶泰勒展开描述相位分布, 得到的重建面形更准确。

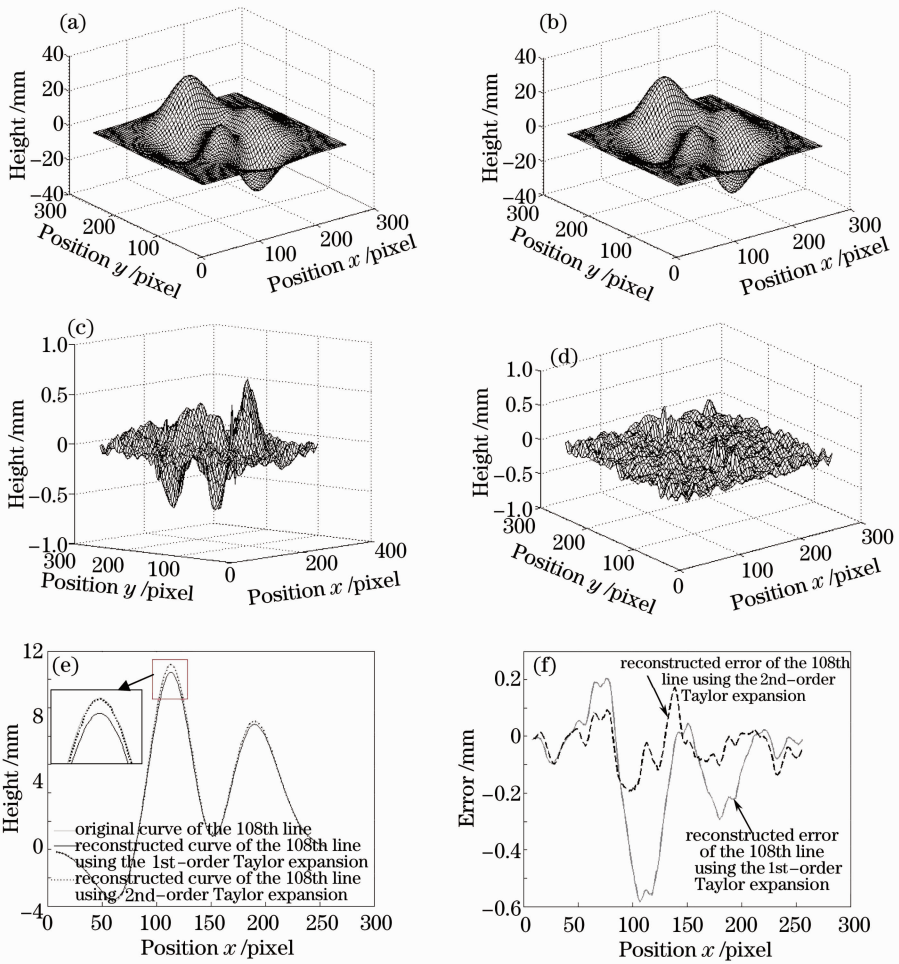


图 3 (a)重建面形(基于一阶泰勒展开); (b)重建面形(基于二阶泰勒展开); (c)重建误差(基于一阶泰勒展开); (d)重建误差(基于二阶泰勒展开); (e)第 108 行重建结果对比; (f)第 108 行误差对比

Fig. 3 (a) Reconstructed surface based on the 1st-order Taylor expansion; (b) reconstructed surface based on the 2nd-order Taylor expansion; (c) error based on the 1st-order Taylor expansion; (d) error based on the 2nd-order Taylor expansion; (e) reconstructed curves of the 108th line using the 1st-order and 2nd-order Taylor expansion, respectively; (f) reconstructed errors of the 108th line using the 1st-order and 2nd-order Taylor expansion, respectively

在实际应用中,为了减少计算的复杂度,修正项  $\frac{1}{2} \arctan\left[\frac{\varphi''(b)}{f^2}\right]$  中的  $\frac{1}{f}$  可用高斯函数的平均窗口来代替。由于  $f_b = f_0 + \frac{\varphi'(b)}{2\pi} + K[\varphi''(b)]$ ,  $f'_b = \frac{\varphi''(b)}{2\pi} + \{K[\varphi''(b)]\}'$ , 而  $\{K[\varphi''(b)]\}' \approx 0^{[14]}$ , 故  $\varphi''(b)$  可用角频率的一阶导数(差分)来进行计算。由于所有窗口化的条纹分析方法存在边缘效应,图 3 中的重建结果和误差图均裁剪了边缘的 8 pixel。

## 5 实验验证

通过实验进一步验证了所提出的理论。实验装

置如图 4 所示,系统的结构参数  $L_0/d=6.1$ ,投影装置(自制)投影正弦条纹图到被测物体表面,为了说明采用二阶泰勒展开在被测物体高度变化的地方具有更好的重建效果,实验中被测物体选为一个三角形,根据三角标基方法测得的三角形中部的垂直高度为 85 mm。由 CCD(型号为 MVC II-1M)带 16 mm 成像透镜采集参考条纹和变形条纹,CCD 的分辨率为  $640 \text{ pixel} \times 480 \text{ pixel}$ ,裁剪后用于处理的图像为  $350 \text{ pixel} \times 350 \text{ pixel}$ ,变形条纹如图 5 所示。分别用基于一阶泰勒展开的二维 S 变换“脊”方法和基于二阶泰勒展开的二维 S 变换“脊”方法对其进行相位重建,重建结果为图 6 所示。图 6(a)为二维 S



变换得到的包裹相位图;图 6(b)为基于一阶泰勒展开的重建面形分布;图 6(c)为基于二阶泰勒展开的重建面形分布。由于测量过程中,在三角形上下边界处存在条纹断裂和阴影,在相应的区域,得到的截断相位是不可靠的,对此采用基于可靠度的相位展

开技术进行处理<sup>[16]</sup>。为了在高度变化较大的部分对比一阶和二阶泰勒展开的重建结果,图 6(d)画出了用相移方法、一阶泰勒展开和二阶泰勒展开方法的第 150 行重建高度对比图。

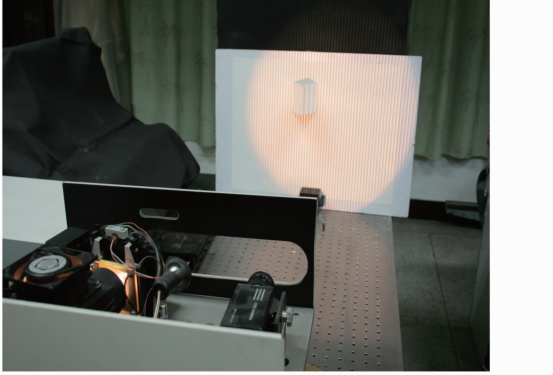


图 4 实验装置图  
Fig. 4 Experimental setup

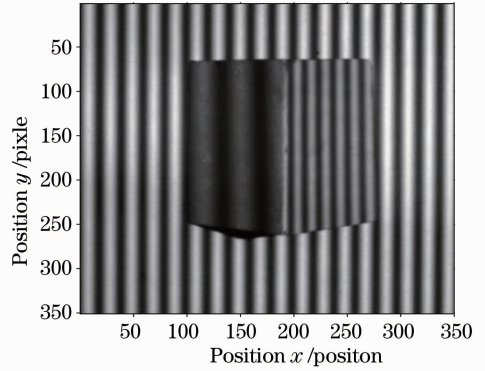


图 5 变形条纹  
Fig. 5 Deformed fringe pattern

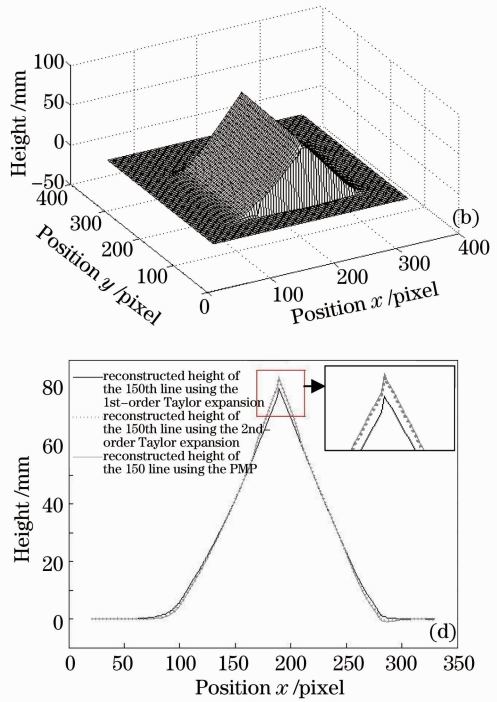
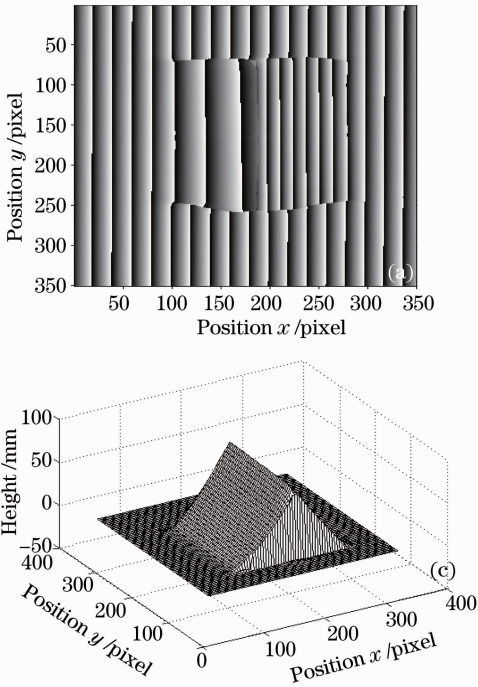


图 6 实验。(a)包裹相位;(b)重建面形分布(一阶泰勒展开);(c)重建面形分布(二阶泰勒展开);  
(d)第 150 行重建面形对比

Fig. 6 Experiment. (a) Wrapped phase of 2D ST; (b) reconstructed surface based on 1st-order Taylor expansion; (c) reconstructed surface based on 2nd-order Taylor expansion; (d) reconstructed height of the 150th line using the 1st-order, 2nd-order Taylor expansion and the PMP, respectively

采用基于一阶泰勒展开的 S 变换重建的第 150 行顶点高度为 80.28 mm,基于二阶泰勒展开重建的第 150 行顶点高度为 83.37 mm,用相移技术得到的第 150 行的顶点高度为 84.17 mm,重建面形更接近于实际的物体,验证了本文的理论和分析;采用

基于二阶泰勒展开的相位描述可以提高 S 变换“脊”方法重建三维面形的精度。

## 6 结 论

针对 S 变换“脊”方法中相位用一阶泰勒展开存

在的不足,提出了基于二阶泰勒展开的更为精确的相位描述方法;详细地推导了采用二阶泰勒展开的S变换系数、“脊”的选取、相位场的计算表达式和相位修正公式。证明了已有的基于一阶泰勒展开的S变换“脊”方法得到的相位表达式只是所提的基于二阶泰勒展开的方法的一个特例。计算机模拟和实验验证了理论和分析,结果表明:相位进行二阶泰勒展开能得到更为准确的相位场的计算公式,弥补了采用一阶泰勒展式描述相位的不足,特别是在条纹比较陡峭的地方,大大提高了S变换“脊”方法重建三维面形的精度。

## 参 考 文 献

- 1 Su Xianyu, Li Jitao. Information Optics [M]. Beijing: Science Press, 1999. 306~338  
苏显渝, 李继陶. 信息光学[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 306~338
- 2 Frank Chen, Gordon M. Brown, Mumin Song. Overview of three dimensional shape measurement using optical methods [J]. *Opt. Eng.*, 2000, **39**(1): 10~22
- 3 Jin Guofan, Li Jingzhen. Laser Metrology [M]. Beijing: Science Press, 1998. 337  
金国藩, 李景镇. 激光测量学[M]. 北京: 科学出版社, 1998. 337
- 4 V. Srinivasan, H. C. Liu, M. Halioua. Automated phase-measuring profilometry of 3-D diffuse objects [J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(18): 3105~3108
- 5 M. Takeda, K. Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- 6 Kemao Qian, Haixia Wang, Wenjing Gao. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: theoretical analyses [J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(29): 5408~5419
- 7 Kemao Qian. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis [J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(13): 2695~2702
- 8 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Apply wavelet transform to phase analysis of spatial carrier-fringe pattern [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 454~459  
翁嘉文, 钟金钢. 小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究 [J]. 光学学报, 2005, **25**(4): 454~459
- 9 Sun Juan, Chen Wenjing, Su Xianyu *et al.*. Study the measurement range of wavelet transform profilometry [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 647~653  
孙娟, 陈文静, 苏显渝等. 小波变换轮廓术的测量范围研究 [J]. 光学学报, 2007, **27**(4): 647~653
- 10 R. G. Stockwell, L. Mansinha, R. P. Lowe. Localization of the complex spectrum: the S-transform [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, **44**(4): 998~1001
- 11 Jiang Mohua, Chen Wenjing, Zheng Zhiping. Research of phase demodulation technique based on S-transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(4): 0412001  
蒋模华, 陈文静, 郑志平. 基于S变换的解相技术研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(4): 0412001
- 12 Zhong Min, Chen Wenjing, Jiang Mohua. S-transform profilometry eliminates nonlinear error in deformed fringe pattern [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(11): 1112003  
钟敏, 陈文静, 蒋模华. S变换轮廓术中消除条纹非线性影响的方法[J]. 光学学报, 2011, **31**(11): 1112003
- 13 L. Mansinha, R. G. Stoekwell, R. P. Lowe. Pattern analysis with two-dimensional spectral localization; applications of two-dimensional S transforms [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 1997, **239**(1-3): 286~295
- 14 Dong Fuqiang, Da Feipeng, Huang Hao. Windowed Fourier transform profilometry based on advanced S-transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(5): 0512008  
董富强, 达飞鹏, 黄昊. 基于S变换的改进窗口傅里叶三维测量法[J]. 光学学报, 2012, **32**(5): 0512008
- 15 Huang Lei, Kemao Qian, Pan Bing *et al.*. Comparison of Fourier transform, windowed Fourier transform, and wavelet transform methods for phase extraction from a single fringe pattern in fringe projection profilometry [J]. *Opt. & Lasers in Eng.*, 2010, **48**(2): 141~148
- 16 Su Xianyu, Tan Songxin, Xiang Liquan *et al.*. Complex object shape measurement using FTP method [J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(9): 1228~1233  
苏显渝, 谭松新, 向立群等. 基于傅里叶变换轮廓术方法的复杂物体三维面形测量[J]. 光学学报, 1998, **18**(9): 1228~1233

栏目编辑: 何卓铭