

厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模的图像比较

江月松 徐洪武 唐 华 何云涛

(北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191)

摘要 简要地叙述了厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模的一些理论,画出了具有代表性的厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模在 $z=0$ 平面的三维图像。为了解厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模的各种模态的关系,分别画出了它们的模态从 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的强度等高线,并从模阶数与峰值、峰值的变化、延伸面积和对称性得到了它们各自的特性,然后进行对比得到它们之间的相同点和不同点。另外通过图像和公式说明了厄米-高斯与拉盖尔-高斯最低阶模 $(0,0)$ 是一致的,即高斯模。对比了它们之间的电(磁)场和平均坡印廷矢量,不同点与模态有很大关系。画出横截面中振幅强度随传输距离增加而变化的图像,从中得到了束宽和峰值强度与传输距离之间的关系。

关键词 物理光学;厄米-高斯模;拉盖尔-高斯模;图像比较

中图分类号 O438 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201333.0606001

Graphic Comparisons between Hermite-Gaussian Modes and Laguerre-Gaussian Modes

Jiang Yuesong Xu Hongwu Tang Hua He Yuntao

(College of Electronic and Information Engineering, Beihang University,
Beijing 100191, China)

Abstract The Hermite-Gaussian modes and Laguerre-Gaussian modes are briefly described. The three-dimensional plots of Hermite-Gaussian modes and Laguerre-Gaussian modes in the plane $z=0$ are drawn. For the sake of revealing the relation among the various modes of Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian, contour maps for modal orders varying from $(0,0)$ to $(2,2)$ are plotted. The characteristics of the mode order number and the peak value, the change of peak value, the extending area and the symmetry are obtained, respectively. The similarities and differences of the characteristics can also be acquired through the comparisons. The minimum modes of Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian are consistent, which can be described both in images and formulas. The differences between the electric (magnetic) field and averaged Poynting vector have relationship with the mode. The image of amplitude intensity of the cross-sectional image changes along with the increase of transmission distance. The waist of the beam and peak value also have some connections with the transmission distance.

Key words physical optics; Hermite-Gaussian mode; Laguerre-Gaussian mode; graphic comparison

OCIS codes 060.4510; 200.1130; 140.3295

1 引 言

厄米-高斯模是直角坐标系下傍轴波动方程的一组正交完备集。平面内任意振幅分布可以表示为这些模式的线性叠加。圆对称的高斯模是这些模式集合的最低阶。同样拉盖尔-高斯模是柱面坐标系

下的傍轴波动方程一组正交的完备集。它的特征考量是径向阶数 P 和方位阶数 s 。这组模式集合中最简单的是 $(0,0)$ 阶,也就是高斯模。这两种模式传输距离 z 后的波动方程可以通过直接解法和惠更斯-菲涅耳积分的方法来求解^[1]。

收稿日期: 2012-11-29; 收到修改稿日期: 2013-02-23

基金项目: 国家自然科学基金(61101005,41140035)资助课题。

作者简介: 江月松(1959—),男,教授,博士生导师,主要从事物理电子学方面的研究。

E-mail: yuesongjiang@buaa.edu.cn

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网 www.opticsjournal.net

关于厄米-高斯模和拉盖尔-高斯模的研究近20年来一直没有停止。文献[2]中通过张量的方法介绍了椭圆厄米-高斯光束,它可以用来描述广义的高阶激光光束。文献[3]讨论了共线传输的两束复宗厄米-高斯型光束的相互作用,在理论上发现它们同时传输时,叠加光场的截面呈现不同的强度和相位分布。Arora等^[4]还画出了纵向截面电场和磁场与传输距离之间的关系。Novotny等^[5]通过高纯度的厄米-高斯模照射金属尖端,来探测利用非线性响应实现近场光学成像的方法。

Allen等^[6]发现拉盖尔-高斯模激光的振幅分布含有轨道角动量,同时指出像散光学系统能够将厄米-高斯模转换成拉盖尔-高斯模,这种方法也称为圆柱透镜法^[7],还可以通过计算全息法^[8,9]和螺旋相位板法产生拉盖尔-高斯模^[10]。文献[11]详细研究了漩涡光束通过携带拓扑和的叉形光栅后的光强分布和拓扑电荷数。文献[12]研究了拉盖尔-高斯模的实验强度轮廓。文献[13]还讲述了大气湍流对拉盖尔-高斯模的影响。

文献[14,15]分别对厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模做了比较详细的探讨,但是对于它们之间的关系很少提及。本文将同一光束的不同模式通过公式和图像两种方式给出了说明。同时对比了它们的坡印廷矢量,指出了坡印廷矢量不但与频率波阻抗有关,还与它们各自的模式有关。最后画出了在传输过程中横截面强度变化的立体图像,得到了波束的宽度和峰值强度随传输距离的变化。

2 厄米-高斯模

由麦克斯韦方程组可以直接导出亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

式中 $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, μ 和 ϵ 分别是媒质的磁导率和介电常数。如果波沿 z 方向传播, Ψ 随 x, y 的变化较随 z 的变化缓慢。于是可设

$$\Psi = \Psi(x, y, z) \exp(-ikz). \quad (2)$$

由 $\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2$, 可得

$$\nabla_x^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

方程中振幅 Ψ 随 x, y 和 z 的变化与因子 $\exp(-ikz)$

相比缓慢,即 $\left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \ll k\Psi$, 故与 $ik\Psi$ 相比,可略去

$\left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|$, 于是得近轴波动方程

$$\nabla_x^2 \Psi - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

在直角坐标系中 $\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 它的解为厄米-高斯模,用 u_{mn} 来表示,具体表达式如下:

$$u_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \frac{\omega_0}{\omega} \phi_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega} \right) \phi_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega} \right) \times \exp \left[-\frac{ik}{2R}(x^2 + y^2) \right] \exp[i(m+n+1)\phi], \quad (5)$$

式中 u_{mn} 中的 m, n 分别是 x, y 方向的模的阶数, A_{mn} 是振幅系数, ω, R 和 ϕ 是 z 的函数, 它们分别为

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right), \quad (6)$$

$$R(z) = (z^2 + z_R^2)/z, \quad (7)$$

$$\phi(z) = \arctan(z/z_R). \quad (8)$$

参数 $\omega(z)$ 是高斯束 ($m=0, n=0$) 束宽,等于轴线上光束的振幅下降到其值的 $1/e$ 时半径的大小。束宽 $\omega(z)$ 在 $z=0$ 处取得最小值 ω_0 。它的最小值与 (6) ~ (8) 式中的参数 z_R 有关,且 $\omega_0 = \sqrt{2z_R/k}$, z_R 称为瑞利长度又称共焦参数,当 $z = z_R$ 时,有 $\omega(z) = \sqrt{2}\omega_0$ 。在实际应用中,常取 $|z| \leq z_R$ 范围为高斯光束的准直范围,在这段长度内可以认为高斯光束是平行的。 $R(z)$ 是横截面在 z 处的相前曲率半径,和 $\omega(z)$ 一样,适合所有的模式。 $\phi(z)$ 为光束的相位因子,表示光束在空间传输距离 z 时相对于几何相移产生的附加相移。(5) 式中的函数 ϕ_m 和 ϕ_n 分别是 m 和 n 阶的厄米-高斯模,定义为

$$\phi_m(\xi) = H_m(\xi) \exp(-\xi^2/2), \quad (9)$$

式中 $H_m(\xi)$ 是 m 阶的厄米多项式。

将 u_{mn} 按 (10) 式进行归一化,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_{mn}(x, y)|^2 dx dy = 1, \quad (10)$$

可以得到

$$A_{mn} = \omega_0^{-1} (\pi 2^{m+n+1} m! n!)^{-1/2}. \quad (11)$$

沿 $+z$ 方向传播的厄米-高斯模的电场和磁场整数 m, n 阶模式可以由磁矢势 \mathbf{A} 得出^[14]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x u_{mn}(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (12)$$

式中 \mathbf{a}_x 是在 x 方向的单位矢量,时间因子 $\exp(i\omega t)$ 是隐含的。

根据上述结果,可以根据下面的关系通过磁矢势 \mathbf{A} 得到电场和磁场的表达式:

$$\mathbf{E} = -i\omega[\mathbf{A} + (1/k^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})], \quad (13)$$

$$\mathbf{H} = (1/\mu)\nabla \times \mathbf{A}. \quad (14)$$

电场和磁场如下:

$$\mathbf{E} = -i\omega A_{nm} \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left[i(m+n+1)\phi - i\frac{k}{2R}(x^2+y^2) - ikz\right] \left[\left(a_x - a_z \frac{x}{R}\right) \psi_m \psi_n - a_z \frac{i\sqrt{2}}{k\omega} \psi'_m \psi_n \right], \quad (15)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{nm} \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left[i(m+n+1)\phi - i\frac{k}{2R}(x^2+y^2) - ikz\right] \left[\left(a_y - a_z \frac{y}{R}\right) \psi_m \psi_n - a_z \frac{i\sqrt{2}}{k\omega} \psi_m \psi'_n \right], \quad (16)$$

在(15)、(16)式中,将 $\psi_m(\sqrt{2}x/\omega)$ 简写为 ψ_m ,将 $\psi_n(\sqrt{2}y/\omega)$ 简写为 ψ_n 。厄米-高斯模的电场和磁场的纵向分量(E_z, H_z)一部分和横向分量(E_x, H_y)同相位,一部分和(E_x, H_y)有 90° 相位差,这导致出现了两种偏振态,并随传输距离而改变。 $\psi_m(\sqrt{2}y/\omega) = 0$,表示电场在表面消失; $\psi_n(\sqrt{2}x/\omega) = 0$,表示磁场在表面消失。在平面 $z = 0$,同向分量的 E_z 和 H_z 为零。

由(12)和(13)式可知在任意点的平均坡印廷矢量^[4]为

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \omega^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{nm}^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \psi_m^2 \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right) \psi_n^2 \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega}\right) \left(a_x \frac{x}{R} + a_y \frac{y}{R} + a_z\right), \quad (17)$$

其中 Re 代表实部,星号代表复共轭。对 \mathbf{S}_{av} 在整个横截面(z 为常数)进行积分,可以得到总的功率流。考虑到能量守恒原则,知 \mathbf{S}_{av} 的大小与 z 的选取无关。特别是,在 $z=0$ 处,

$$\mathbf{S}_{av} |_{z=0} = a_z \frac{1}{2} \omega^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{nm}^2 \psi_m^2 \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega_0}\right) \psi_n^2 \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega_0}\right) = a_z \frac{1}{2} \omega^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |u_{nm}(x, y, 0)|^2. \quad (18)$$

可见在平面 $z = 0$ 处,厄米-高斯波束的平均坡印廷矢量不仅与模式 u_{nm} 有关,还与频率 ω 和波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 有关,其与波阻抗成反比,方向沿 z 轴。由(18)式可以得到 $|u_{nm}(x, y, 0)|$,同理也可得 $|u_{nm}(x, y, z_R/2)|$ 和 $|u_{nm}(x, y, z_R)|$ 。

图1显示了 $m=2, n=2$ 阶厄米-高斯模的三维图像。从图像上很容易看出 $z=0$ 平面内强度的变化。为了便于观察各种模态之间的关系,将三维图像换成等高线轮廓图。

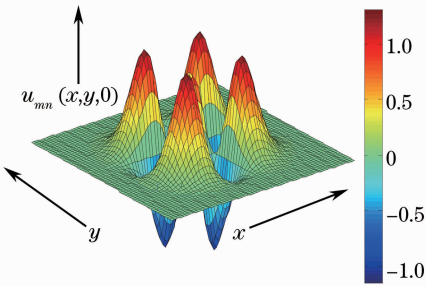


图1 $m=2, n=2$ 阶厄米-高斯模的三维图像

Fig. 1 Three-dimensional plot of $m=2, n=2$ order Hermite-Gaussian mode

图2为厄米-高斯模 u_{nm} 等高线轮廓图,第一行是指 $m=0, n=0, 1, 2$ 的模态,其中第一个图像是 $m=0, n=0$ 模态,即高斯模。第二行图像是 $m=1, n=0, 1, 2$ 模态的3个图像。第三行是 $m=2, n=0, 1, 2$ 的3个图像。以上图像中心位置是强度极值,颜色趋于红色的是极大值,趋于紫色的是极小值,极大值与极小值之间是零值。从图2可以观察到,模态为

(m, n)的厄米-高斯模有以下特征:

- 1) 在 x 方向上有 m 个零值($m+1$ 个峰值),同样在 y 方向上有 n 零值($n+1$ 个峰值);
- 2) 随着离轴距离的增加,峰值逐渐变强,最外部的峰值最大,如图1所示;
- 3) 所有的模式都有相同的参数 $w(z)$,然而高阶模的电磁场比低阶模式扩展较大的离轴距离;
- 4) 如果将整个图像看成一个矩阵, (m, n) 模态可以看成是(n, m)模态的转置。

图3是横截面中振幅强度随传输距离增加而变化的图像,其模态为 $m=2, n=2$ 。从图中可以看出随着距离的增加,束宽不断增加,而峰值强度不断减小。由(6)式可知,当 $z=0$ 时, $w(z) = w_0$; 当 $z = z_R/2$ 时, $w(z) = \sqrt{5}/2 w_0$; 当 $z = z_R$ 时, $w(z) = \sqrt{2} w_0$, 即有束宽随着距离的增加而增加。峰值强度的变化与 ψ_m 有很大关系,它受(9)式中的指数部分影响显著。

3 拉盖尔-高斯模

近轴波动方程(4)式在柱坐标下有 $\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} +$

$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, 它的解为拉盖尔-高斯模,用 $v_{ps}(r, \theta, z)$ 来表示以区别于厄米-高斯模,具体形式为

$$v_{ps}(r, \theta, z) = A_{ps} \frac{\omega_0}{\omega} f_{ps} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega}\right) \cos[s(\theta - \theta_0)] \exp\left[-i\frac{kr^2}{2R} + i(2p + s + 1)\phi\right], \quad (19)$$

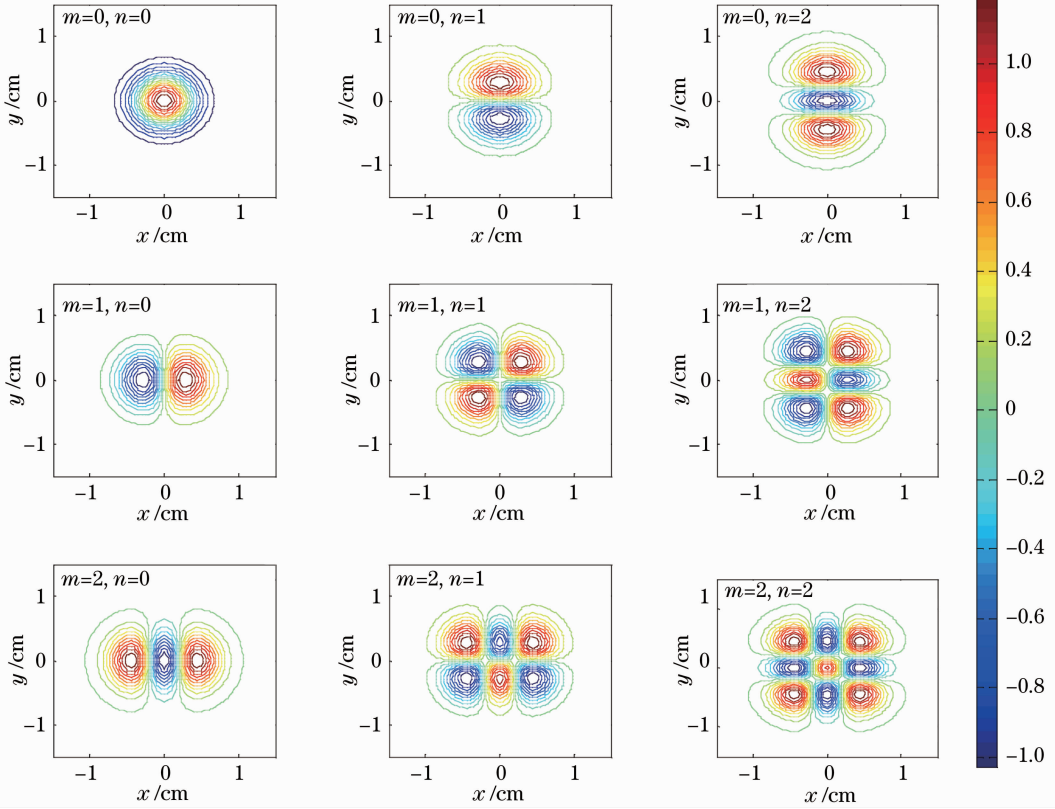


图 2 厄米-高斯模式的阶数 (m, n) 从 $(0, 0)$ 到 $(2, 2)$ 变化的等高线轮廓图

Fig. 2 Contour maps of Hermite-Gaussian modes for modal orders varying from $(0, 0)$ to $(2, 2)$

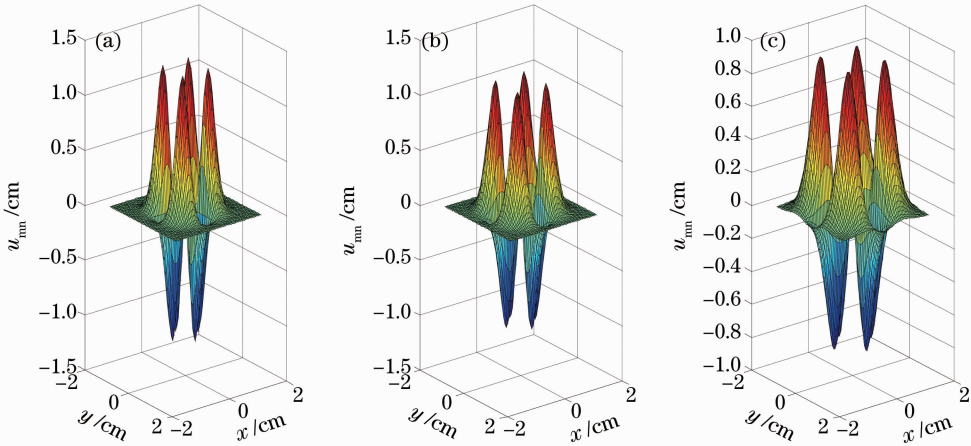


图 3 厄米-高斯模横截面振幅强度随传输距离增加而变化图像。(a) $z=0$; (b) $z=z_R/2$; (c) $z=z_R$

Fig. 3 Amplitude intensity of the cross section changes along with the transmission distance for Hermite-Gaussian mode. (a) $z=0$; (b) $z=z_R/2$; (c) $z=z_R$

式中 A_{ps} 是振幅系数, θ_0 是方位角, ω, R 和 ϕ 也是传播距离 z 的函数, 表达式同厄米-高斯模情况下的 (6) ~ (8) 式。同样 ω_0 是波束半径的最小值, 也就是拉盖尔-高斯模的最低阶模式 ($p=0, s=0$) 在 $z=0$ 处平面的半径降到 $1/e$ 时的值。标量参数 $\omega(z)$ 和相

前曲率半径 $R(z)$ 在任意横截面 z 处对所有的模式是一样的。 $f_{ps}(\rho)$ 可表示为

$$f_{ps}(\rho) = \rho^s L_p^s(\rho^2) \exp(-\rho^2/2). \quad (20)$$

为了方便, 经常用 ρ 代表 $\sqrt{2}r/\omega$, $L_p^s(\rho^2)$ 为广义拉盖尔多项式。同样对 v_{ps} 进行归一化处理,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |v_{ps}(r, \theta)|^2 r dr d\theta = 1, \quad (21)$$

可以得到

$$A_{ps} = \frac{2}{\omega_0 \sqrt{1 + \delta_{0s}}} \sqrt{\left[\frac{p!}{\pi(p+s)!} \right]}, \quad (22)$$

其中 δ_{0s} 是狄拉克函数。当 $s=0$ 时, $\delta_{0s}=1$; 当 $s \neq 0$ 时, $\delta_{0s}=0$ 。由此可以推出 $(0,0)$ 阶厄米-高斯模与 $(0,0)$ 拉盖尔-高斯模之间的关系为

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, z) |_{m=0, n=0} &= 1/(\sqrt{2\pi}\omega) \exp\left(-\frac{x^2}{\omega^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{\omega^2}\right) \exp\left[-\frac{ik}{2R}(x^2 + y^2)\right] \exp(i\phi) = \\ &= 1/(\sqrt{2\pi}\omega) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2}\right) \exp\left(-\frac{ik}{2R}r^2\right) \exp(i\phi) = v_{ps}(r, \theta, z) |_{p=0, s=0}. \end{aligned} \quad (23)$$

关于拉盖尔-高斯模的电场和磁场也可以通过磁矢势 \mathbf{A} 得到

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x v_{ps}(r, \theta, z) \exp(-ikz), \quad (24)$$

由(13), (14)式可得电场和磁场。为了方便起见, θ_0 设为 0, 此时有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -i\omega A_{ps} \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left[i(2p+s+1)\phi - i\frac{kr^2}{2R} - ikz\right] \times \\ &\quad \left\{ \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z \frac{r \cos \theta}{R} \right) f_{ps} \cos(s\theta) + i\mathbf{a}_z \left[\frac{\sin \theta}{kr} f_{ps} s \sin(s\theta) - \frac{\sqrt{2}}{k\omega} \cos \theta f'_{ps} \cos(s\theta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -i\omega \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)} A_{ps} \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left[i(2p+s+1)\phi - i\frac{kr^2}{2R} - ikz\right] \times \\ &\quad \left\{ \left(\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z \frac{r \sin \theta}{R} \right) f_{ps} \cos(s\theta) + i\mathbf{a}_z \left[\frac{\cos \theta}{kr} f_{ps} s \sin(s\theta) - \frac{\sqrt{2}}{k\omega} \sin \theta f'_{ps} \cos(s\theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

为了简洁, 这里函数 f_{ps} 的参数 $\sqrt{2}r/\omega$ 被省略。(25) 和(26) 式显示了拉盖尔-高斯模中电场和磁场的纵向分量 (E_z, H_z), 部分与横截面分量 (E_x, H_y) 同相位, 另一部分与横截面分量 (E_x, H_y) 有 90° 相位差。由此导致出现了两种偏振态, 并随传输距离而改变。在束腰 ($z=0$) 处 E_z 和 H_z 同相部分为零。在平面 $\theta=0$ 处, E_z 和 H_z 相位正交部分的比值为 $\alpha = (\sqrt{2}/k\omega)(f'_{ps}/f_{ps})$ 。若 $\alpha \ll 1$, 则纵向分量同横向分量相比可忽略不计。然而, 这种情况并不满足所有点, 对于 $f_{ps}(\sqrt{2}r/\omega) = 0$ 定义的表面, 横截面场分量 E_x 和 H_y 为零, 电场是纯纵向的。

根据电场和磁场的表达式, 同样也可以求出在一点处的平均坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \omega^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{ps}^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 f_{ps}^2 \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega}\right) \cos^2(s\theta) \left(\mathbf{a}_x \frac{x}{R} + \mathbf{a}_y \frac{y}{R} + \mathbf{a}_z \right), \quad (27)$$

式中 Re 代表实部, 星号代表复共轭。特别是在平面 $z=0$ 处,

$$\mathbf{S}_{av} |_{z=0} = \mathbf{a}_z \frac{1}{2} \omega^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{ps}^2 f_{ps}^2 \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega}\right) \cos^2(s\theta) = \mathbf{a}_z \frac{1}{2} \omega^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |v_{ps}(x, y, 0)|^2. \quad (28)$$

可见在平面 $z=0$ 处, 拉盖尔-高斯波束的平均坡印廷矢量不仅与模式 v_{ps} 有关, 还与频率 ω 和波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 有关, 并与波阻抗成反比, 方向沿 z 轴。

图 4 显示了拉盖尔-高斯势函数 v_{ps} 的振幅在 $z=0$ 平面, 模态为 $p=2, s=2$ 的三维图像。同样为了方便各种模态的比较, 将最低的 9 种模态绘在同一个图像上, 图 5 是模态阶数 p, s 变化范围从 0 到 2 的等高线轮廓图。从第一行到第三行分别指 $p=0, 1, 2$, 列数分别指 $s=0, 1, 2$ 。图中的“眼心”是振幅的部分极值, 颜色趋于红色的是极大值, 趋于紫色的是

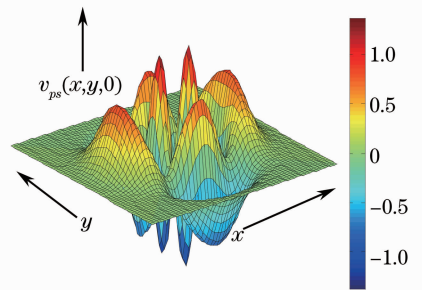


图 4 $p=2, s=2$ 阶拉盖尔-高斯模三维图像
Fig. 4 Three-dimensional plot of $p=2, s=2$ order Laguerre-Gaussian mode

极小值。由图 5 可得如下结论：

- 1) 沿着方位角方向有 $2s$ 峰值, 沿着径向方向有 $p+1$ 峰值;
- 2) 随着离轴距离的增加强度极大值变小, 中心的峰值最大;
- 3) 所有模式有相同标量参数 $\omega(z)$, 高阶模式的电磁场比低阶模式延伸离轴的距离要大;
- 4) 拉盖尔-高斯模所有的模态都关于 x 轴对

称, 同时也关于 y 轴对称。

其中结论 2) 同厄米-高斯模相同, 结论 3) 同厄米-高斯模相反。

图 6 是横截面中振幅强度随传输距离增加而变化的图像, 它们都是在模态 $p=2, s=2$ 下的图像。其与厄米-高斯模具有相同的性质, 即随着距离的增加, 束宽不断增加, 而最大峰值强度不断减小。

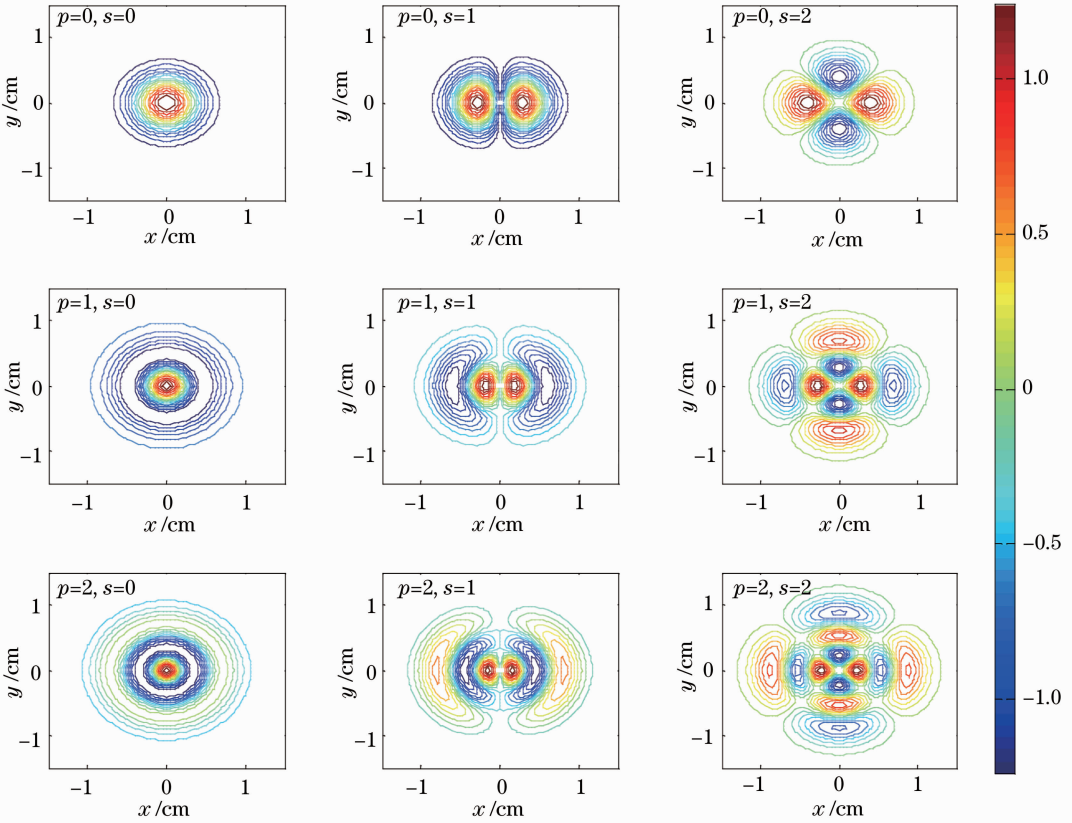


图 5 拉盖尔-高斯模态 (p, s) 从 $(0, 0)$ 到 $(2, 2)$ 变化的等高线轮廓图

Fig. 5 Contour maps of Laguerre-Gaussian mode for modal orders varying from $(0, 0)$ to $(2, 2)$

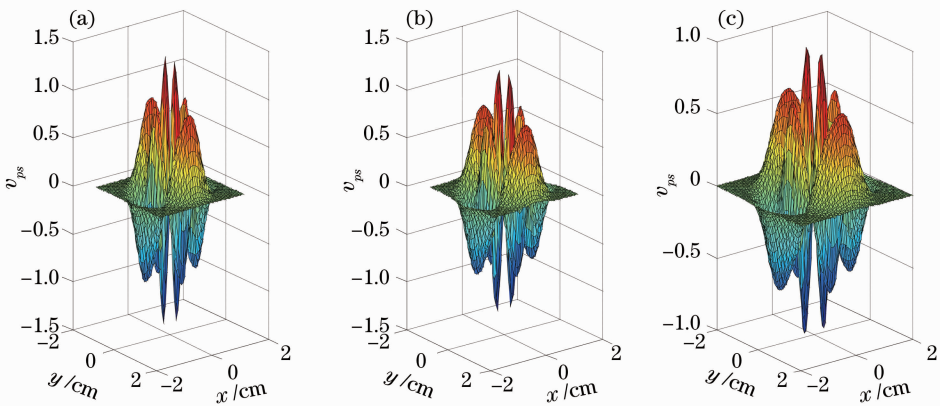


图 6 拉盖尔-高斯模横截面振幅强度随传输距离增加的变化图像。(a) $z=0$; (b) $z=z_R/2$; (c) $z=z_R$

Fig. 6 Amplitude intensity of the cross section changes along with the transmission distance for Laguerre-gaussian mode. (a) $z=0$; (b) $z=z_R/2$; (c) $z=z_R$

4 结 论

将厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模进行对比研究,分别画出了厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模在 $z=0$ 平面的强度等高线。比较发现在相同束腰时厄米-高斯模的($m=0, n=0$)模态与拉盖尔-高斯模的($p=0, s=0$)模态完全相同,因为它们的最小模态都是高斯模态。

厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模的电场和磁场的纵向分量(E_z, H_z),一部分与横截面分量(E_x, H_y)同相位,另一部分与横截面分量(E_x, H_y)有 90° 相位差。在平面 $z=0$ 处, (E_z, H_z)同相位部分都为零。它们的平均坡印廷矢量均与频率 ω 和波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 有关,且与波阻抗成反比,方向沿 z 轴,区别在于平均坡印廷矢量还与各自的模态有关。

对于厄米-高斯模和拉盖尔-高斯模,它们的模态越高,所拓展的离轴距离越大。但是厄米-高斯模离轴距离越远,峰值越大,而拉盖尔-高斯模离轴越远,峰值逐渐变小,此结论可以通过图1和图4的三维图像看出。同时厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模在横截面的强度具有很好的对称性。对于厄米-高斯模,当 m, n 同时为偶数时,横截面的强度一般关于坐标轴对称;当 m 为奇数, n 为偶数时,一般关于坐标轴横轴对称;当 m 为偶数, n 为奇数时,一般关于坐标轴纵轴对称。而拉盖尔-高斯模一般均关于坐标轴对称。

最后画出了横截面中振幅强度随传输距离增加而变化的图像,通过图像可以看出不论厄米-高斯模还是拉盖尔-高斯模,随着传输距离的增加,波束的宽度增加,最大的峰值强度变小。

参 考 文 献

- 1 Larry C. Andrews, Ronald L. Phillips. Laser Beam Propagation through Random Media (second edition) [M]. Washington: The International Society for Optical Engineering, 2005. 101~107
- 2 Yangjian Cai, Qiang Lin. The elliptical Hermite-Gaussian beam

- and its propagation through paraxial systems [J]. *Opt. Commun.*, 2002, **207**(1): 139~147
- 3 Zhang Xiaping. Propagation of elegant Hermite-Gaussian beams in strongly nonlocal nonlinear media [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(11): 1119002
张霞萍. 强非局域非线性介质中复宗量厄米高斯光束的传输 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(11): 1119002
- 4 R. K. Arora, Z. Lu. Graphical depiction of the electromagnetic fields of Hermite-Gaussian modes [J]. *IEE Proc. H*, 1992, **139**(4): 369~375
- 5 Lukas Novotny, Erik J. Sá, X. Sunney Xie. Near-field optical imaging using metal tips illuminated by higher-order Hermite-Gaussian beams [J]. *Ultramicroscopy*, 1998, **71**(1-4): 21~29
- 6 L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw *et al.*. Orbital angular-momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes [J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(11): 8185~8189
- 7 M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen *et al.*. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum [J]. *Opt. Commun.*, 1993, **96**(1-3): 123~131
- 8 N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith *et al.*. Laser beams with phase singularities [J]. *Opt. Quantum Electron.*, 1992, **24**(9): S951~S961
- 9 Cai Tian, Zhang Xiaobo, Ye Fangwei *et al.*. Experimental study of the holographic grating to produce the Laguerre-Gaussian modes [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(11): 1457~1460
蔡田, 张晓波, 叶芳伟等. 产生拉盖尔高斯模的全息光栅实验研究 [J]. *光学学报*, 2005, **25**(11): 1457~1460
- 10 Wang Jiong, Zhang Yudong, Li Guojun *et al.*. Influences of spiral phase plate's parameters on spiral phase contrast microscopy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(4): 0411002
王炯, 张雨东, 李国俊等. 螺旋相位板参数对螺旋相衬成像系统性能影响研究 [J]. *光学学报*, 2012, **32**(4): 0411002
- 11 Liu Yongxin, Chen Ziyang, Pu Jixiong. Diffraction characteristics of vortex beams by a fork-shaped grating [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(3): 0302012
刘永欣, 陈子阳, 蒲继雄. 漩涡光束经叉形光栅的衍射特性 [J]. *中国激光*, 2011, **38**(3): 0302012
- 12 W. W. Rigrod. Isolation of axi-symmetrical optical resonator modes [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1963, **2**(3): 51~53
- 13 Li Fang, Tang Hua, Jiang Yuesong *et al.*. Spiral spectrum of Laguerre-Gaussian beams propagating in turbulent atmosphere [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(1): 014204
黎芳, 唐华, 江月松等. 拉盖尔-高斯光束在湍流大气中的螺旋谱特性 [J]. *物理学报*, 2011, **60**(1): 014204
- 14 Hermann A. Haw. Waves and Fields in Optoelectronics [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1984. 122~151
- 15 R. K. Arora, Z. Lu. Graphical study of Laguerre-Gaussian beam modes [J]. *IEE Proc. H*, 1994, **141**(3): 145~150

栏目编辑: 王晓球