

基于 Fournier-Forand 和 Henyey-Greenstein 体积 散射函数的水中光脉冲传输仿真分析

魏安海^{1,2} 赵 卫¹ 韩 彪¹ 谢小平^{1,3} 胡 辉¹ 苏玉龙^{1,2}

¹ 中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学与光子技术国家重点实验室, 陕西 西安 710119
² 中国科学院大学, 北京 100049
³ 西安通信学院, 陕西 西安 710106

摘要 结合 Fournier-Forand 和 Henyey-Greenstein 体积散射函数, 利用 Monte Carlo 法建立水中激光脉冲传输特性分析模型。采用该模型分析了散射体相对折射率和尺寸分布对水中光脉冲传输特性的影响。研究表明: 光脉冲在水中传输时, 随着散射体相对折射率的增大和小尺度散射体相对含量的增加, 脉冲展宽增加, 光波前向散射减弱且空间分布扩展加剧, 到达角分布更离散。与传统水中光脉冲传输仿真模型相比, 此模型更加有效。

关键词 海洋光学; 光脉冲; 体积散射函数; Monte Carlo 法

中图分类号 TN249 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201333.0601003

Simulative Study of Optical Pulse Propagation in Water Based on Fournier-Forand and Henyey-Greenstein Volume Scattering Functions

Wei Anhai^{1,2} Zhao Wei¹ Han Biao¹ Xie Xiaoping^{1,3} Hu Hui¹ Su Yulong^{1,2}

¹ State Key Laboratory of Transient Optics and Photonics, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119, China
² University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China
³ Xi'an Communication College, Xi'an, Shaanxi 710106, China

Abstract A simulative model with Monte Carlo method is established based on Fournier-Forand and Henyey-Greenstein volume scattering functions, by which propagation characteristics of optical pulse underwater can be analyzed. By using this model, the influence of scattering particles' relative refractive index and size distribution on optical pulse propagation in water is analyzed. The results show that, with the increase of the relative refractive index of scattering particles and small scattering particles' relative quantity, the width of optical pulse is broadened more evidently in time domain, the forward scattering becomes weaker with a more disperse space distribution and arrival angles' distribution. Compared with traditional simulative models, the method presented is more effective.

Key words ocean optics; optical pulse; volume scattering function; Monte Carlo method

OCIS codes 010.4450; 010.7340; 010.4458; 290.2558; 290.5890

1 引 言

光脉冲在水中传输时, 受水体散射和吸收的影响光学性质会发生改变, 这对水下通信、海洋探测等水下光电应用产生严重影响。目前研究光脉冲水中

传播特性主要有两种方法: 实验测量和仿真模拟^[1~10]。实验测量虽然可以得到可靠的数据, 但操作困难, 并且海水的复杂多变限制了实验数据的有效性。因此建立合理的仿真模型, 理论分析光脉冲

收稿日期: 2013-01-18; 收到修改稿日期: 2013-03-04

基金项目: 国家自然科学基金(61231012)资助课题。

作者简介: 魏安海(1989—), 男, 硕士研究生, 主要从事光通信方面的研究。E-mail: weianhai@opt.cn

导师简介: 赵 卫(1963—), 男, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要从事光通信与传感技术、高功率激光技术及光电子学应用技术、超快光学等方面的研究。E-mail: weiz@opt.ac.cn

在水中的传输特性显得尤为重要。

现有水中光脉冲传输的理论研究大都采用 Monte Carlo 法进行模拟仿真,即首先跟踪大量光子在水中的传输过程,然后分析到达探测面的光子的统计特征,以获得光脉冲的传输特性。在建立模型时,体积散射函数的选择对于仿真结果有很大的影响。体积散射函数是关于散射角的函数,用来描述散射光强随散射角变化的特征。目前对于水中光脉冲传输特性的研究,大都采用单一体积散射函数如 Fournier-Forand 体积散射函数(FF 函数)^[11,12],或者 Henyey-Greenstein 体积散射函数(HG 函数)^[13,14]。FF 函数与实验结果最接近^[15],但其数学表达式复杂,反函数没有解析形式,文献[16]基于 FF 函数提出利用与伪随机数比较大小的办法确定散射角,这样会引入一定的计算误差,且计算量大。HG 函数的反函数有解析形式,在 Monte Carlo 法仿真模拟中应用最为广泛,但后向散射部分与实验差别较大,虽提出双 HG 函数改善了 HG 函数后向散射的缺点,但是双 HG 函数仿真参量的获得更加复杂,且不能从实验中直接获得^[17]。

本文结合 FF 函数和 HG 函数模拟了光脉冲在水中的传播特性,通过对 FF 函数进行积分归一化的方法来确定 HG 函数中的不对称因子,并将不对称因子代入 HG 函数确定散射角。用 Monte Carlo 法模拟大量光子在水中的传播特性;统计分析到达探测面的光子特性得到光脉冲光学特性的改变情况;分析了水中散射体相对折射率和尺寸分布对光脉冲时域展宽、空间展宽和到达角分布的影响。

2 仿真模型

真实的海洋环境中,海水由多种散射体组成,光脉冲在水中传播时会受到多种随机介质的散射和吸

收。本文建立模型时做以下假设^[18,19]:忽略水分子的散射和吸收,光在水中传输时只受到杂质散射体的吸收和散射;单个散射体对光子的散射和吸收过程是相互独立的;入射光为单色光,且忽略偏振对光传输的影响;由于水体的运动速度远小于光速,因此忽略光脉冲传输时水体光学性质的变化。

在以上假设的基础上,跟踪大量光子在水中的传输过程。光子在初始时刻从同一位置开始沿特定方向在水中发射,在水中传播一定距离后,遇到散射体发生散射和吸收;如果光子存在,判断光子是否到达接收面,若到达接收面则停止跟踪,若没有则计算新的坐标和方向余弦,如此反复,直到光子到达接收面或者“湮灭”为止。Monte Carlo 法跟踪光子的具体步骤见文献[20]。通过记录到达接收面光子的坐标、方向余弦和光子运动时间,对其进行统计处理,得到光脉冲能量衰减、时域展宽、空域扩展和到达角分布等特征。

在光子跟踪过程中,光子单次散射角的确定和光子“湮灭”的判决依据对仿真结果影响很大。该模型中采用 FF 函数和 HG 函数相结合的方法确定散射角,采用俄罗斯轮盘赌的方法建立光子“湮灭”判据。

2.1 散射角确定

在确定散射角时采取 FF 函数和 HG 函数相结合的方法进行,即通过对 FF 函数进行积分归一化的方法来确定 HG 函数中的不对称因子,然后将不对称因子代入 HG 函数得到散射角。其中,FF 函数假设散射体尺度分布服从指数分布规律:

$$N(r) = Cr^{-m}, \quad (1)$$

式中 $N(r)$ 是尺度为 r 的散射体数量, C 为常数, m 为表征水中散射体尺度分布的特征参数,取值在 3.5 ~ 5.0 之间; m 越大水中小尺度散射体的相对含量越多。在此基础上,FF 函数的数学表达式^[21]为

$$b(\theta) = \frac{1}{4\pi(1-\delta)^2\delta^v} \left\{ [v(1-\delta) - (1-\delta^v)] + \frac{4}{u^2} [\delta(1-\delta^v) - v(1-\delta)] \right\} - \frac{1-\delta_\pi^v}{16\pi(1-\delta_\pi)\delta_\pi^v} (3\cos^2\theta - 1), \quad (2)$$

式中 $v = \frac{3-m}{2}$, $\delta = \frac{u^2}{3(n-1)^2}$, $\delta_\pi = \frac{4}{3(n-1)^2}$, $u = 2\sin(\theta/2)$ 。 n 为散射体与纯水的相对折射率,取值在 1.00 ~ 1.35 之间。

由 FF 函数计算水体散射不对称因子 g :

$$g = \frac{\int_0^\pi b(\theta) \cos \theta d\theta}{\int_0^\pi b(\theta) d\theta}, \quad (3)$$

HG 函数表达式为

$$b(u, g) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2gu)^{3/2}} \right], \quad u = \cos \theta. \quad (4)$$

求解 HG 函数的反函数,由 HG 函数得到的散射角为^[22]

$$\theta = \arccos \left\{ \frac{1}{2g} \left[1 + g^2 - \left(\frac{1 - g^2}{1 - g + 2g\xi} \right)^2 \right] \right\}, \quad g \neq 0. \quad (5)$$

ξ 指的是 $(0, 1]$ 之间的随机数。将 (3) 式代入 (5) 式中, 即可以得到散射角的具体表达式。

2.2 光子“湮灭”判据

受散射体吸收作用的影响, 光子在传播过程中可能“湮灭”, 为此设置判定阈值 W_H :

$$W_H = \frac{\mu_s}{\mu_t} = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_a}, \quad (6)$$

式中 μ_t 、 μ_s 、 μ_a 分别为水体衰减系数、散射系数和吸收系数。光子每经过一次散射, 由计算机生成一个随机数 x , 当 $x > W_H$ 时光子“湮灭”, 终止对其跟踪, 否则光子继续在水中传输。

按照上述方法确定发散角和光子“湮灭”与否, 利用 Monte Carlo 法模拟大量光子在水中的传输过程。

3 仿真分析

在上述模型的基础上, 利用 Monte Carlo 法对 10^6 个光子进行模拟, 光子沿 z 轴正方向传播, 探测器位于 $z=30$ m 平面内, 水的折射率为 1.33, $u_H = 0.99999$, 吸收系数 $\mu_a = 0.08 \text{ m}^{-1}$, 散射系数 $\mu_s = 0.13 \text{ m}^{-1}$ 。

3.1 相对折射率对光脉冲前向散射的影响

设置散射体尺寸分布特征参数 $m=4$, 分别取散射体与纯水的相对折射率 $n = 1.35, 1.30, 1.25, 1.20, 1.15$ 。以 $(0, 0, 30 \text{ m})$ 为中心, 在一定的圆域内统计到达 $z=30$ m 平面内的光子数目, 接收光子数占发射总光子数比例随接收面半径 R 的变化如图 1 所示, 其表征到达接收孔径内的光强占入射总光强的比例, 反映出光脉冲能量在传输时的衰减随接收半径的变化情况; 接收光子数占 $z=30$ m 平面内总的到达光子数的比例随接收面半径的变化如图 2 所示, 其表征到达接收孔径内的光强占到达 $z=30$ m 平面处总光强的比例, 反映增大接收半径对光能量接收效率的影响。从图 1 和图 2 中曲线的变化趋势可以得到 $z=30$ m 平面内相对折射率对光脉冲强度的空间分布特征的影响。

图 1 和图 2 曲线的总体变化趋势是: 随着接收

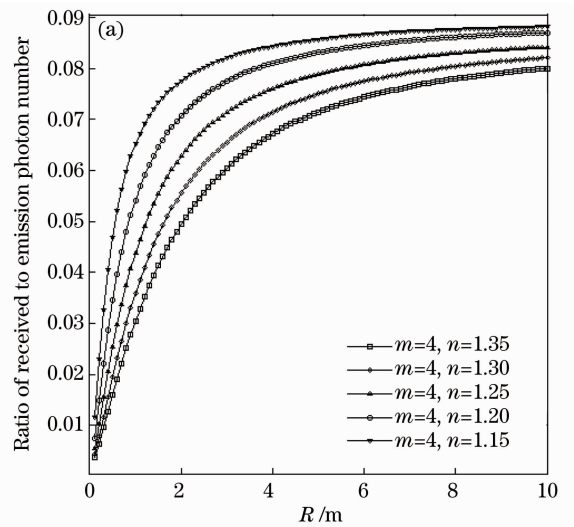


图 1 不同相对折射率下接收光子数占发射光子数比例随接收面半径的变化

Fig. 1 Ratio of received photon number to emission photon number versus the radius of receiving surface for different relative refractive indices

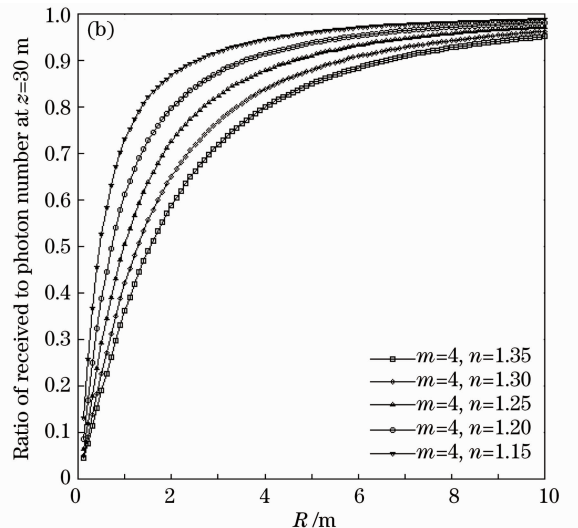


图 2 不同相对折射率下接收光子数占到达 $z=30$ m 处光子数比例随接收面半径的变化

Fig. 2 Ratio of received photon number to photon number at $z=30$ m versus the radius of receiving surface for different relative refractive indices

面半径的增大, 到达接收面内的光子数比例不断增大, 其增大的速率随着半径的增加而逐渐减小。从图 1 中可以看到, 当接收面半径一定时, 随着散射体与纯水相对折射率 n 的增大, 接收半径内光子数目占发射光子数目的比例不断减小, 即光子在水中受到的前向散射减弱, 光脉冲在水中传输时的衰减增大。从图 2 中可以看到, 随着相对折射率 n 的增大, 在一定接收半径内, 图中曲线的增大趋势减缓, 即随

着接收半径的增大光能量的增加变得不明显,表明光能量在接收面上的空间分布越来越分散。进一步分析结果显示:当 $n=1.15$ 时,分布 $R=2$ m 范围内的光子占接收面上总光子数的比例为 88%; $n=1.20$ 时,比例为 80%; $n=1.25$ 时,比例为 73%; $n=1.30$ 时,比例为 65%; $n=1.35$ 时,比例为 60%。随着水中散射体相对折射率的增大,接收面上的光子分布越来越分散,到达接收面上能量的空间分布越分散;随着接收面孔径的增大,在一定的范围内接收到的光能量会迅速增大,但超过一定的半径(图中约为 2 m)后,这种增大变得不明显。

以 $(0, 0, 30$ m) 为中心,在半径为 10 m 的圆域内统计到达 $z=30$ m 平面的光子到达角概率分布特征,如图 3 所示。从图中可以看到,光子到达角主要分布在 $0^\circ\sim 25^\circ$ 范围内,随着到达角的增加,光子分布概率迅速增加到一定峰值,而后迅速减小。随着相对折射率 n 的增大,减小的速率变得平缓,光子到达角最大概率不断减小且向右移。当 $n=1.15$ 时,到达角峰值为 0.5° ,到达角最大概率为 0.16; $n=1.20$ 时,峰值为 0.5° ,最大概率为 0.107; $n=1.25$ 时,峰值为 1° ,最大概率为 0.079; $n=1.30$ 时,峰值为 1.5° ,最大概率为 0.061; $n=1.35$ 时,峰值也为 1.5° ,但最大概率为 0.049。因此随着相对折射率 n 的增大,光子受到的前向散射不断减弱,曲线由陡峭逐渐向平缓过渡,光子到达接收面上的角度分布越来越分散。

将光脉冲在水中的传输看成一个线性系统,则信道的冲击响应函数可以反映出脉冲在其中传输时

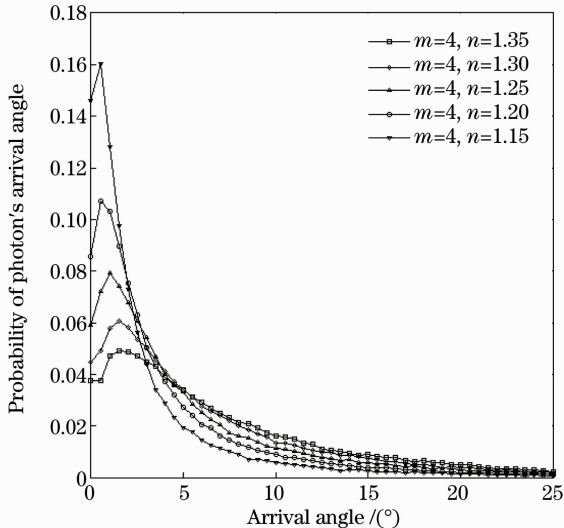


图 3 不同相对折射率下光子到达角概率分布
Fig. 3 Probability distribution of photon's arrival angle for different relative refractive indices

的时域展宽特性。通过对 $z=30$ m 平面上,中心为 $(0, 0, 30$ m),半径为 10 m 的圆域内的光子到达时间进行统计分析,得到信道冲击响应,为了消除衰减对分析结果的影响进行归一化处理,归一化响应如图 4 所示。随着响应时间的增大,曲线剧烈下降,信道响应时间在 133~134 ns 之间,峰值响应在 133 ns 处。随着散射体的相对折射率 n 的增加,曲线“拖尾”越长,激光脉冲的冲击响应时间越长,因此光脉冲在水中的时域展宽越严重。

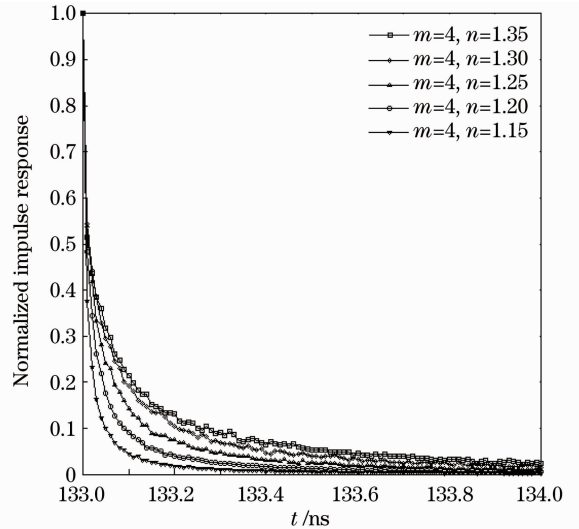


图 4 不同相对折射率下归一化冲击响应
Fig. 4 Normalized impulse responses for different relative refractive indices

3.2 散射体尺寸分布对光脉冲前向散射的影响

假设散射体与纯水的相对折射率 $n=1.15$,分别取散射体尺寸分布特征参数 $m=4.3, 4.2, 4.1, 4.0, 3.9$ 。以 $(0, 0, 30$ m) 为中心,接收光子数占发射总光子数比例随接收面半径的变化如图 5 所示;接收光子数占 $z=30$ m 平面内总的到达光子数比例随接收面半径的变化如图 6 所示。从图 5 和图 6 中曲线的变化趋势可以得到散射体尺寸分布对光脉冲强度的空间分布特征的影响。

图 5、6 中曲线的总体趋势是:随着接收面半径的增大,到达接收面内光子数比例不断增大,增大的速率随着半径的增加而放缓。从图 5 中可以看出,接收面半径一定时,随着散射体尺寸分布特征参数 m 的增大,接收半径内光子数目占发射光子数目的比例不断减小,即光子在水中受到的前向散射减弱,光脉冲在水中传输时的衰减增大。从图 6 中可以看到,随着特征参数 m 的增大,曲线的增大趋势减缓,表明光波在接收面上的分布更加分散;如图 6 中,当接收到的光子数占接收面光子数比例为 0.5,散射

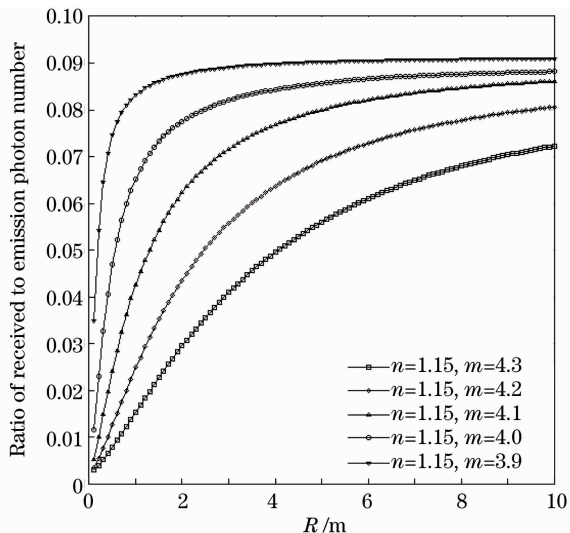


图 5 不同尺寸分布特征参数下接收光子数占发射光子数比例随接收面半径的变化

Fig. 5 Ratio of received photon number to emission photon number versus the radius of receiving surface for different size distribution characteristic parameters

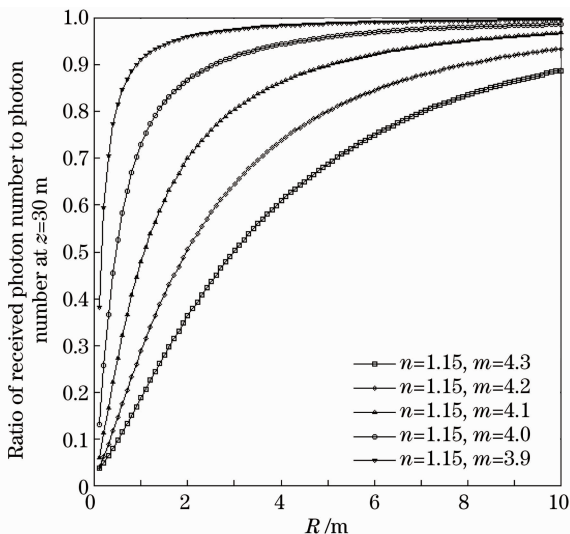


图 6 不同尺寸分布特征参数下接收光子数占到达 $z=30$ m 处光子数比例随接收面半径的变化

Fig. 6 Ratio of received photon number to photon number at $z=30$ m versus the radius of receiving surface for different size distribution characteristic parameters

体尺度分别取 4.3、4.2、4.1、4.0、3.9 时，接收面对应的接收半径分别为 3、2、1、0.5、0.1 m。随着特征参数 m 的增大，水中小尺度散射体的相对含量增多，光能量在接收面上的空间分布越来越分散；随着接收机孔径的增大，在一定的范围内接收到的光波能量会迅速增大，但超过一定的半径（图中约为 4 m），这种增大变得不明显。

以 $(0, 0, 30)$ 为中心，在半径为 10 m 的圆域

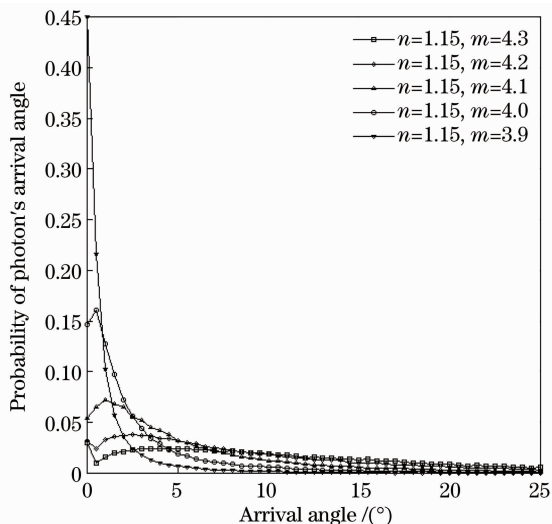


图 7 不同尺寸分布特征参数下光子到达角概率分布

Fig. 7 Probability distribution of photon's arrival angle for different size distribution characteristic parameters

内统计到达 $z=30$ m 平面的光子到达角概率分布特征，如图 7 所示。从图中可以看到，光子到达角主要分布在 $0^\circ \sim 20^\circ$ 范围内，随着特征参数 m 的增大（水中小尺度散射体相对含量增多），概率分布曲线变得平滑，因此光子的到达角分布变得更加分散。

通过对 $z=30$ m 平面上，中心为 $(0, 0, 30)$ m，半径为 10 m 的圆域内的光子到达时间进行统计分析得到信道归一化冲击响应如图 8 所示。从图中可以看到，随着响应时间的增大，曲线剧烈下降，信道响应时间在 133~134.5 ns 之间，峰值响应在 133 ns 处。随着特征参数 m 的增大（即水中小尺度散射体相对含量的增加），曲线“拖尾”增长，激光脉冲的冲

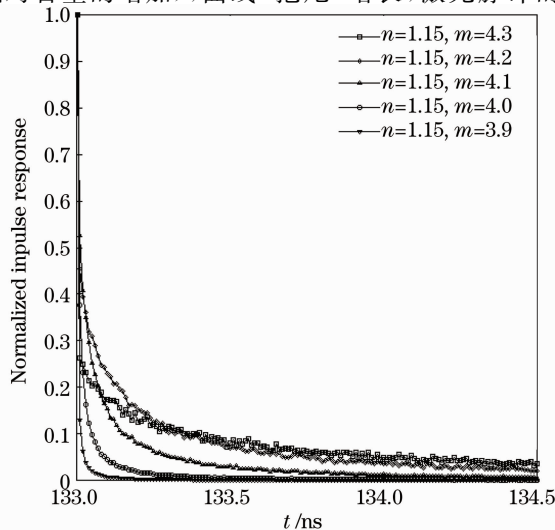


图 8 不同尺寸分布特征参数下归一化冲击响应

Fig. 8 Normalized impulse responses for different size distribution characteristic parameters

击响应时间越长,因此光脉冲在水中的时域展宽越严重。

4 结 论

结合 FF 和 HG 函数确定了散射角,利用 Monte Carlo 法建立了一种分析水中激光脉冲传输特性的仿真模型,采用该模型分析了散射体相对折射率和尺寸分布对水中光脉冲传输特性的影响。研究表明:

1) 根据建立的模型,仿真时需要设置水体吸收系数、散射系数、散射体与纯水的相对折射率和尺度分布特征参数,这些均可以利用实验得到,因此该模型与传统模型相比,同时克服了 FF 函数和 HG 函数的缺点,更加实用有效。

2) 模拟仿真结果表明,随着散射体相对折射率的增大和小尺度散射体相对含量的增加,光脉冲在水中传输时,脉冲展宽增加,光波前向散射减弱且空间分布扩展加剧,到达角分布更加离散。

3) 只要测得海水的吸收系数、散射系数、散射体相对折射率和尺寸分布情况,即可通过该模型对水中光脉冲的传输特性进行分析,仿真结果对水下光电应用具有一定的实际指导意义。例如通过设置接收机孔径、海水水质和传输距离,可以仿真得到海水中光能量的衰减和脉冲展宽,进而估算水下通信链路冗余和传输速率等。

参 考 文 献

- Zhao Weijiang, Su Liping, Ren Deming *et al.*. Measurement on the angular scattering properties of wake bubbles [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(5): 744~747
赵卫疆, 苏丽萍, 任德明 等. 尾流气泡光散射的测量[J]. *中国激光*, 2008, **35**(5): 744~747
- Zhang Jiansheng. The Development and Measurement of Ship Wake Optical Specialty [D]. Xi'an: Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2001. 164~171
张建生. 尾流的光学特性研究与测量[D]. 西安: 中国科学院西安光学精密机械研究所, 2001. 164~171
- Shi Shengwei, Wang Jiang'an, Jiang Xingzhou *et al.*. Analysis of scattering phase function and backscattering signal characteristic of bubble films in ship wake [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(10): 1861~1866
石晟玮, 王江安, 蒋兴舟 等. 舰船尾流气泡层散射相位函数及其后向散射信号特性分析[J]. *光学学报*, 2008, **28**(10): 1861~1866
- J. Li, Y. Ma, Q. Q. Zhou *et al.*. Monte Carlo study on pulse response of underwater optical channel [J]. *Opt. Eng.*, 2012, **51**(6): 066001
- M. E. Lee, M. R. Lewis. A new method for the measurement of the optical volume scattering function in the upper ocean [J]. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, 2003, **20**(4): 563~571
- D. J. Bogucki, J. Piskozub, M. E. Carr *et al.*. Monte Carlo

- simulation of propagation of a short light beam through turbulent oceanic flow [J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(21): 13988~13996
- Wang Xiangwei, Zhou Tianhua, Chen Weibiao. Study on laser backscattering properties by ship wakes [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(1): 14~18
王向伟, 周田华, 陈卫标. 舰船尾流激光后向散射特性研究[J]. *光学学报*, 2010, **30**(1): 14~18
- Liang Shanyong, Wang Jiang'an, Zhang Feng *et al.*. Monte Carlo model and variance reduction method based on lidar of ship wake [J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(1): 015205
梁善勇, 王江安, 张 峰 等. 基于舰船尾流激光雷达的 Monte Carlo 模型及方差消减方法研究[J]. *物理学报*, 2013, **62**(1): 015205
- I. Turcu, R. Bratfalean. Narrowly peaked forward light scattering on particulate media I. Assessment of the multiple scattering contributions to the effective phase function [J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2007, **10**(1): 015002
- W. Freda, T. Krol, O. V. Martynov *et al.*. Measurements of scattering function of sea water in Southern Baltic [J]. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2007, **144**(1): 147~154
- Han Biao, Liu Jifang, Zhou Shaojie *et al.*. Influence of laser pulse width on backward detection of long-distance wake bubbles [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(9): 1372~1375
韩 彪, 刘继芳, 周少杰 等. 激光脉冲宽度对远距离尾流气泡后向检测的影响[J]. *光子学报*, 2011, **40**(9): 1372~1375
- W. Freda, J. Piskozub. Improved method of Fournier-Forand marine phase function parameterization [J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(20): 12763~12768
- T. Binzoni, T. S. Leung, A. H. Gandjbakhche *et al.*. The use of the Henyey-Greenstein phase function in Monte Carlo simulations in biomedical optics [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2006, **51**(17): N313~N322
- V. I. Haltrin. Two-term Henyey-Greenstein light scattering phase function for seawater[C]. IEEE IGARSS'99 Proceedings, 1999, **2**: 1423~1425
- C. D. Mobley, L. K. Sundman, E. Boss. Phase function effects on oceanic light fields [J]. *Appl. Opt.*, 2002, **41**(6): 1035~1050
- Han Biao, Liu Jifang, Liu Kunlun *et al.*. Study of backward optical detection method for ship wake bubbles [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(1): 0101001
韩 彪, 刘继芳, 刘昆仑 等. 舰船尾流气泡后向光学检测方法研究[J]. *光学学报*, 2012, **32**(1): 0101001
- Zhan Enqi. Research on Transmission Performance with Light Propagating Through Atmosphere and Sea [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2007. 27~28
詹恩奇. 光波在大气和海水信道的传输性能研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2007. 27~28
- A. H. Hakim, N. J. McCormick. Ocean optics estimation for absorption, backscattering, and phase function parameters [J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(6): 931~938
- Dong Hongzhou. The Technology of Submarine Blue & Green Laser Communication [D]. Changchun: Changchun University of Science and Technology, 2002. 13~14
董洪舟. 蓝绿激光对潜通信技术[D]. 长春: 长春理工大学, 2002. 13~14
- Xu Qirui, Yin Fuchang. The Monte Carlo simulation of laser transmission in submarine multi-course [J]. *J. Changchun University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2008, **31**(1): 81~83
徐祺瑞, 尹福昌. 激光在水下多径传输的蒙特卡罗模拟[J]. *长春理工大学学报(自然科学版)*, 2008, **31**(1): 81~83
- J. Miroslaw, R. F. Georges. Light Scattering by Particles in Water [M]. San Diego: Academic Press, 2007. 250~251
- N. Pfeiffer, G. H. Chapman. Successive order, multiple scattering of two-term Henyey-Greenstein phase functions [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(18): 13637~13642