

# Sagnac 效应对光纤时间传递精度的影响分析

于龙强 卢 麟 王 荣 经继松 吴传信 朱 勇

(解放军理工大学通信工程学院, 江苏 南京 210007)

**摘要** 分析了光纤时间传递中 Sagnac 效应产生的原因,详细推导了地球表面任意两点间 Sagnac 效应授时误差的计算公式,仿真研究了 Sagnac 效应对光纤时间传递精度的影响。结果表明,Sagnac 效应授时误差取决于光纤的纬度及其轨迹,当进行长距离时间传递时其误差值可能达到纳秒量级,必须对 Sagnac 效应进行精确的时延补偿或校准。

**关键词** 光纤光学;时间传递;Sagnac 效应;授时误差

**中图分类号** TN929.11 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.0306003

## Analysis of the Sagnac Effect and Its Influence on the Accuracy of Time Transfer System by the Optical Fiber

Yu Longqiang Lu Lin Wang Rong Jing Jisong Wu Chuanxin Zhu Yong

(Institute of Communication Engineering, PLA University of Science and Technology,

Nanjing, Jiangsu 210007, China)

**Abstract** Analyses have been done to explain the generation of the Sagnac effect in time transfer system over optical fiber. Mathematical expression of the time deviation, which is caused by Sagnac effect between any two points on the surface of the earth, is deducted in detail. Influences on the accuracy of the time transfer are studied deliberately by simulation. It is demonstrated that the time deviation is decided by the latitude and the course of the fiber link and it may be larger than 1 ns for a long haul. So accurate time delay compensation or calibration should be concerned in terrestrial time transfer system.

**Key words** fiber optics; time transfer; Sagnac effect; time deviation

**OCIS codes** 060.2330; 120.5790; 120.7000

## 1 引 言

利用光纤进行高精度的中远程时频传递已经成为国内外研究热点。美国国家航空航天管理局(NASA)基于光纤时频传递构建的深空探测网络<sup>[1]</sup>已运行多年,瑞典、日本、德国和法国等发达国家已完成了多种不同方案的该方面实验研究<sup>[2~7]</sup>。近几年来,国内也开展了该领域的研究工作<sup>[8~11]</sup>。目前高精度光纤时间传递方式主要有两种:环回法和双向时间比对法<sup>[12]</sup>,其共同的前提是光纤链路的双向传输时延完全对称或其差值可以精确测量和补偿。事实上,由于环境温度、应力和链路噪声等因素的影

响,无论是双纤双向还是单纤双向的传递方式都存在传输时延的不对称性,因而对时延差补偿的精确与否直接决定了时间传递的精度。即使在上述因素都可忽略的理想条件下,地球自转带来的 Sagnac 效应依然会影响往返链路传输时延的对称性。

Sagnac 效应<sup>[13]</sup>可以描述为:若两个光束沿着一个旋转的圆盘同路径传播,一个沿顺时针方向,一个沿逆时针方向,它们会以不同的时间走完这一回路。在光纤时间传递系统中,地球的自转同样会使光在往返链路中的传播时延不同,破坏链路时延的对称性,给时间传递带来误差。目前尚未见国内外

**收稿日期**: 2012-10-15; **收到修改稿日期**: 2012-12-03

**基金项目**: 国家自然科学基金(61174199,61032005,61074065)和国家 973 计划(2012CB31560)资助课题。

**作者简介**: 于龙强(1988—),男,硕士研究生,主要从事光纤时频传递方面的研究。E-mail: yulq\_go@163.com

**导师简介**: 王 荣(1962—),男,教授,博士生导师,主要从事光纤通信系统、微波光子学、光纤时频传递和光传感技术等方面的研究。E-mail: wr-njice@163.com

文献对这一问题进行研究。

本文阐述了在光纤授时系统中 Sagnac 效应对授时精度的影响,在此基础上,提出了精确分析其授时误差的理论方法,建立了地球表面任意两点间误差值的数学模型。依据本文推导的精确计算公式,以国土范围内光纤时间同步应用为例,详细讨论了影响误差值的因素和误差量级。

## 2 基本原理

由于地球的自转,光信号在地表光纤中的实际传播路径如图 1 所示。 $A$ 、 $B$  为地球上任意两点, $A$  为中心站, $B$  为终端站,光纤的铺设轨迹为虚线  $A_1B_1$  ( $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ )。在  $t_1$  时刻,光纤位于  $A_1B_1$  处,光信号从  $A_1$  端出发沿光纤开始向终端站传播,在  $t_2$  时刻到达终端站,而后立刻向始端反向传播,于  $t_3$  时刻回到中心站。在光信号的传播过程中,光纤的位置也在随着地球自转而变化,在  $t_1$  到  $t_2$  的时间里,光纤由  $A_1B_1$  运动到了  $A_2B_2$ ,在  $t_2$  到  $t_3$  的时间里又从  $A_2B_2$  运动到了  $A_3B_3$ 。从图 1 可清楚地看出,光信号传播的实际距离并不是静止时光纤的长度 ( $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ),而是曲线  $A_1B_2$  和  $B_2A_3$  的长度,从而导致往返链路的传播时延并不相等,其差值就是 Sagnac 效应的值。

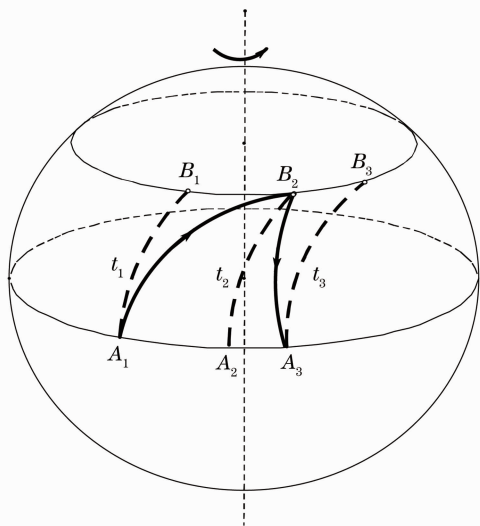


图 1 光信号的传播轨迹

Fig. 1 Actual propagation path of the optical signal

若不考虑 Sagnac 效应带来的影响,认为链路完全对称,那么补偿量就为环路总时延的一半  $(t_3 - t_1)/2$ ,而实际上需要补偿的时间为  $t_2 - t_1$ ,相应的授时偏差值为  $(2t_2 - t_1 - t_3)/2$ ,即 Sagnac 效应授时误差。需要说明的是:当中心站和终端站位置确定时,

此时延差为确定值,只会引起授时的固定偏差,不会对频率传递造成影响;此外,该偏差无法通过其他手段进行抑制,只能通过计算或校准进行补偿。

## 3 理论模型

光纤沿地球表面的铺设轨迹往往不规则,因而光信号的实际传播路径也不规则;同时,Sagnac 效应与地球自转的线速度有关,而不同纬度和高度位置的自转线速度不同,因此对 Sagnac 效应授时误差的计算只能采用微元法。

### 3.1 通用计算公式

图 2 为光信号实际的传播轨迹微元图,其中  $dl$  为光纤链路上的一段微元, $l_1$  为光信号经过光纤微元  $dl$  时正向传播的路径, $l_2$  为光信号反向传播的路径, $l_1$ 、 $l_2$ 、 $dl$  都可看作直线,组成图中所示的三角形, $v$  为微元  $dl$  所处位置地球自转的线速度,沿  $x$  轴方向, $\alpha$  为微元  $dl$  与地球自转线速度方向的夹角。地球静止不动时,光信号在光纤中正向和反向的传播速度都为  $c/n$ , $c$  是光在真空中的传播速度,为  $3.0 \times 10^8$  m/s, $n$  为石英光纤的折射率,典型值为 1.48;当地球以  $v$  的线速度进行自转时,光信号正向和反向的传播速度不再相等,根据洛仑兹-爱因斯坦速度变换公式,可以求出光信号正向传播时在  $x$  轴和  $y$  轴方向的速度分别为

$$u_{1x} = \frac{\frac{c}{n} \cos \alpha + v}{1 + \frac{v \frac{c}{n} \cos \alpha}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} \cos \alpha + v}{1 + \frac{v \cos \alpha}{nc}}, \quad (1)$$

$$u_{1y} = \frac{\frac{c}{n} \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \frac{c}{n} \cos \alpha}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cos \alpha}{nc}}. \quad (2)$$

同理可求出光信号反向传播的速度为

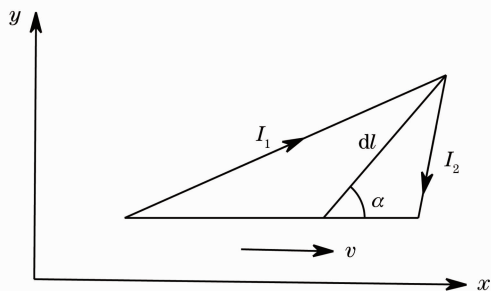


图 2 光信号的传播轨迹微元图

Fig. 2 Infinitesimal of the optical-signal propagation path

$$u_{2x} = \frac{\frac{c}{n} \cos \alpha - v}{1 - \frac{vc \cos \alpha}{nc}}, \quad (3)$$

$$u_{2y} = \frac{\frac{c}{n} \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vc \cos \alpha}{nc}}. \quad (4)$$

由图 2 可看出,作用在链路微元上的地球自转线速度  $v$  始终沿  $x$  轴方向,所以往返光信号在  $y$  轴方向的传播距离相等,由此可求出光信号正向传播和反向传播的时延差为

$$\Delta t = \frac{dl \sin \alpha}{u_{1y}} - \frac{dl \sin \alpha}{u_{2y}} = dl \cdot \left( \frac{1 + \frac{vc \cos \alpha}{nc}}{\frac{c}{n} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1 - \frac{vc \cos \alpha}{nc}}{\frac{c}{n} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{2vc \cos \alpha \cdot dl}{c \sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (5)$$

由(5)式可看出,该时延差并不随光纤的折射率的变化而变化。当地球的自转线速度  $v$  远小于光纤中光信号的传播速度  $c$  时,可忽略(5)时分母中的  $v^2$  项,进而可将微元链路的授时误差值表示为

$$dt = \frac{1}{2} \times \frac{2vc \cos \alpha \cdot dl}{c^2} = \frac{vc \cos \alpha dl}{c^2}. \quad (6)$$

只要再确定光纤的铺设轨迹  $L$ ,在光纤线路上进行积分就可以求出整个授时系统的 Sagnac 效应授时误差:

$$\Delta T = \int_L dt = \int_L \frac{vc \cos \alpha}{c^2} dl. \quad (7)$$

把地球看作是一个规则的球体,不考虑地势的影响,Sagnac 效应授时误差具体计算如图 3 所示。图 3(a)中,  $xOy$  平面对应赤道平面,  $x$  轴指向零度经线方向,  $z$  轴指向北极,  $R$  为地球的平均半径,值为 6371 km,  $\Omega$  为地球自转角速度,值为  $7.292 \times 10^{-5}$  rad/s,曲线  $AB$  为任意一条光纤授时系统链路,  $A$  为中心站,  $B$  为终端站,  $dl$  为链路微元,  $\theta$ 、 $\varphi$  为微元的球坐标值,曲线  $A'B'$  为  $AB$  在赤道平面的投影;图 3(b)为赤道平面剖面图。微元  $dl$  处的地球自转线速度  $v = R\Omega \sin \varphi$ , (7) 式中  $\cos \alpha \cdot dl$  是微元在线速度  $v$  方向上的投影,由图 3(a) 可得  $\cos \alpha \cdot dl = R \sin \varphi \cdot d\theta$ , 代入(7)式得到 Sagnac 效应授时误差值的计算公式:

$$\Delta T = \int_L \frac{(R \sin \varphi)^2 \Omega}{c^2} d\theta. \quad (8)$$

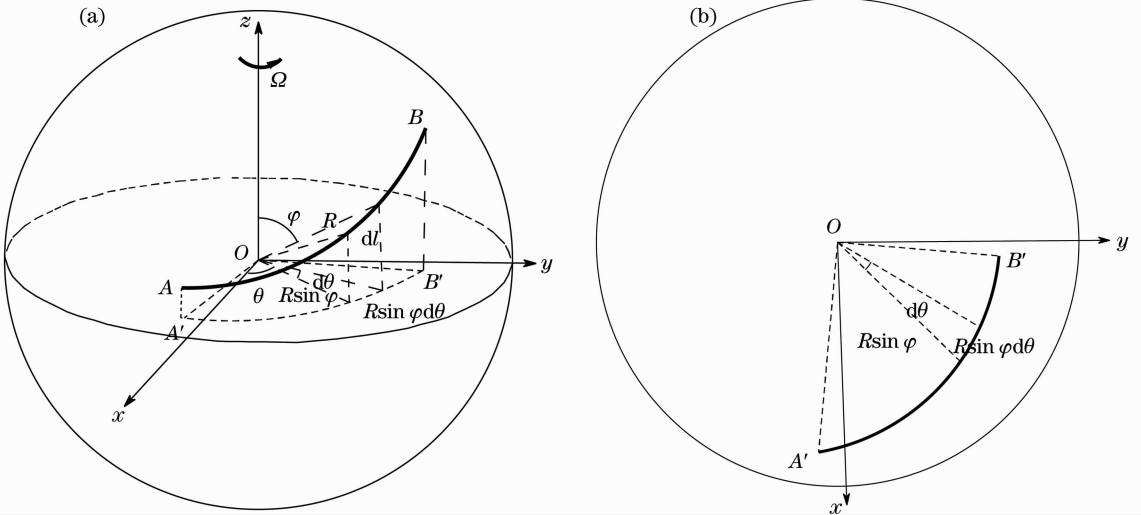


图 3 球坐标下的(a)光纤链路及其(b)在赤道平面的投影

Fig. 3 (a) Fiber link and (b) its projection on the equatorial plane in spherical coordinates

对任意光纤时间传递系统,只需将光纤链路的轨迹  $L$  用球坐标  $\varphi$  和  $\theta$  表示出来,利用(8)式就可精确计算出其 Sagnac 效应授时误差值。而对实际应用中轨迹不规则的光纤系统,  $L$  一般无法用明确的数学表达式表示,只需对(8)式进行数值计算即可。

将(8)式进一步变形为

$$\Delta T = \frac{2\Omega}{c^2} \int_{L_{AB}} \frac{1}{2} (R \sin \varphi) R \sin \varphi d\theta, \quad (9)$$

式中  $\int_{L_{AB}} \frac{1}{2} (R \sin \varphi) R \sin \varphi d\theta$  等于图 3(b) 中投影曲线  $A'B'$  与地心  $O$  围成的图形的面积,用  $S$  表示。所以有

$$|\Delta T| = 2\Omega S/c^2. \quad (10)$$

当  $A$  站在  $B$  站西侧时,前向传播时延大于后向传播时延, $\Delta T$  为正值; $A$  站在  $B$  站东侧时,前向传播时延小于后向传播时延, $\Delta T$  为负值。

### 3.2 沿大圆铺设的链路的误差值计算公式

若中心站  $A$  和终端站  $B$  间的光纤是沿过  $A$ 、 $B$  和球心  $O$  的大圆圆周铺设,且已知两端站的地理坐标,则经过适当的修正可将其转化为球坐标,北半球  $\varphi = \pi/2 - \phi_1$ ,南半球  $\varphi = \pi/2 + \phi_1$ ,东半球  $\theta = \phi_2$ ,西半球  $\theta = 2\pi - \phi_2$ ,其中  $\phi_1$  和  $\phi_2$  分别代表纬度和经度。设经计算  $A$ 、 $B$  的球坐标分别为  $(R, \varphi_A, \theta_A)$  和  $(R, \varphi_B, \theta_B)$ ,对应笛卡儿坐标系中的坐标为  $(x_A, y_A, z_A)$  和  $(x_B, y_B, z_B)$ ,且满足

$$\begin{cases} x_A = R \sin \varphi_A \cos \theta_A, \\ y_A = R \sin \varphi_A \sin \theta_A, \\ z_A = R \cos \varphi_A, \end{cases} \text{ and } \begin{cases} x_B = R \sin \varphi_B \cos \theta_B, \\ y_B = R \sin \varphi_B \sin \theta_B, \\ z_B = R \cos \varphi_B. \end{cases} \quad (11)$$

平面  $ABO$  的法线  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z) = \frac{1}{R^2} \times \mathbf{OA} \times \mathbf{OB}$ ,则

曲线  $AB$  的轨迹  $L_{AB}$  方程可表示为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ n_x(x - x_A) + n_y(y - y_A) + n_z(z - z_A) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

转换为球坐标,整理得

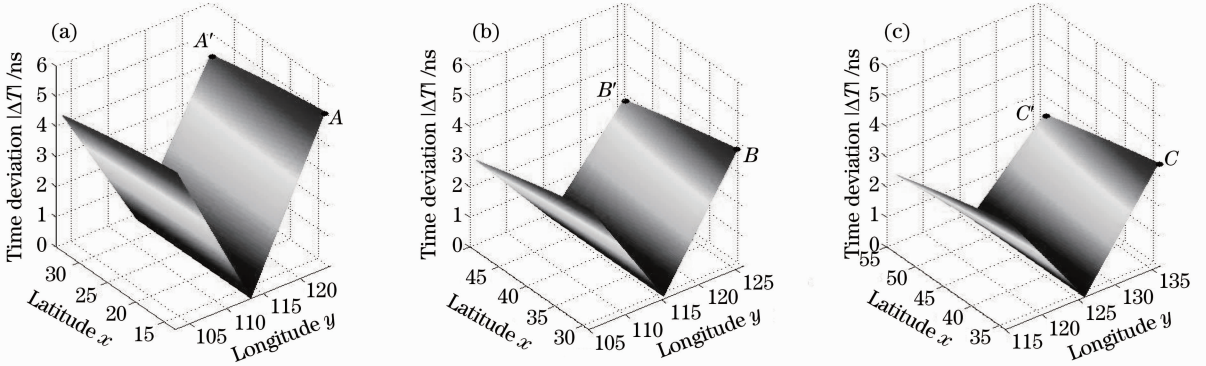


图 4 中心站和终端站位置对 Sagnac 效应授时误差值的影响。(a)中心站位于广州市;(b)中心站位于北京市;(c)中心站位于哈尔滨市

Fig. 4 Influence on the time deviation imposed by geographic location of the central stations and terminals. (a) Central station in Guangzhou; (b) central station in Beijing; (c) central station in Harbin

由图 4(a)可以看出,广州市所在的  $E113^\circ 15'$  经线上曲面各点的误差值都为零,从  $E113^\circ 15'$  经线向两侧,随着终端站与中心站经度差的增大,误差值逐渐增大,且呈对称分布,说明完全同经度的光纤链路没有 Sagnac 效应授时误差,链路经度跨度越大,误差值越大。

$$n_x \sin \varphi \cos \theta + n_y \sin \varphi \sin \theta + n_z \cos \varphi = 0. \quad (13)$$

式中  $n_x = \sin \varphi_A \sin \theta_A \cos \varphi_B - \cos \varphi_A \sin \varphi_B \sin \theta_B$ ,  $n_y = \cos \varphi_A \sin \varphi_B \cos \theta_B - \sin \varphi_A \cos \theta_A \cos \varphi_B$ ,  $n_z = \sin \varphi_A \cos \theta_A \sin \varphi_B \sin \theta_B - \sin \varphi_A \sin \theta_A \sin \varphi_B \cos \theta_B$ ,  $\varphi$  的取值在  $\varphi_A$  和  $\varphi_B$  之间, $\theta$  的取值在  $\theta_A$  和  $\theta_B$  之间,单位为弧度。所以可将 Sagnac 效应授时误差的计算公式具体表示为

$$\Delta T = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{R^2 n_z^2 \Omega}{c^2 [(n_x \cos \theta + n_y \sin \theta)^2 + n_z^2]} d\theta. \quad (14)$$

## 4 Sagnac 效应对授时精度影响的分析与讨论

为分析授时系统位置对 Sagnac 效应授时误差的影响,假设中心站和终端站间的光纤沿大圆铺设。图 4 是利用推导的 Sagnac 效应授时误差计算(14)式得到的仿真分析结果。图 4(a)~(c)分别是以广州市 ( $N23^\circ 06'$ ,  $E113^\circ 15'$ )、北京市 ( $N39^\circ 26'$ ,  $E115^\circ 25'$ ) 和哈尔滨市 ( $N44^\circ 04'$ ,  $E125^\circ 42'$ ) 为中心站向四周进行时间传递的 Sagnac 效应授时误差仿真图,  $x$  轴、 $y$  轴分别为纬度和经度,都在以中心站坐标点为中心的  $\pm 10^\circ$  范围内变化,纵轴为 Sagnac 效应授时误差的绝对值。

对比图 4(a)~(c),中心站位于广州市的授时系统受 Sagnac 效应影响最大,位于哈尔滨市的受 Sagnac 效应影响最小。图 4(c)中沿  $E135^\circ 42'$  经线由  $C$  到  $C'$ ,误差值随终端站纬度的增大而减小。说明向相同范围的地区进行时间传递或链路的经度差一定时,低纬地区的授时系统的 Sagnac 效应授时误

差更大。

图 4 中  $A, A', B, B', C, C'$  各点的误差值分别为 5.173、4.446、3.880、2.895、3.431、2.429 ns, 三组对应点间的差值分别为 0.727、0.985、1.002 ns, 曲面与最右侧经线平面的交线的斜率呈增大趋势。说明随着系统纬度的增大, 误差值的变化与纬度的变化的相关性增大。

出现上述结果是因为只有沿地球自转线速度  $v$  方向传播的光信号才会受到 Sagnac 效应, 所以当光纤在线速度方向上的投影长度越长, 作用在其上的线速度越大时, 授时误差越大。而上述因素分别与经度差、纬度值相关。结合图 3(b) 与 (10) 式也可看

表 1 由北京(N39°26', E115°25')分别向哈尔滨、西安、上海、广州进行时间传递的 Sagnac 效应授时误差  
Table 1 Time deviations by Sagnac effect in the time transfer from Beijing (N39°26', E115°25') to Harbin, Xi'an, Shanghai and Guangzhou, respectively

City	Coordinate	Spherical distance /km	Time deviation by Sagnac effect /ns
Harbin	(N44°04', E125°42')	995.62	3.2748
Xi'an	(N33°39', E107°40')	943.99	-2.8659
Shanghai	(N31°01', E121°13')	1072.70	2.2134
Guangzhou	(N23°06', E113°15')	1827.30	-0.8982

以上误差值的计算都假设光纤沿大圆铺设, 虽然并不能代表现实中走向各异的授时系统的实际误差值, 但对研究 Sagnac 效应对授时精度的影响规律和误差量级有很大的参考价值。对于实际应用中的光纤系统, 要结合光纤走向依据 (8) 式进行具体计算。

## 5 结 论

提出并研究了光纤授时系统中的 Sagnac 效应问题以及由其造成的授时误差的计算方法。研究表明, 长距离时间传递中可能会引入纳秒以上的授时误差, 必须依据光纤授时系统所处的地理位置和光纤链路的具体轨迹精确计算, 实施预补偿或校准, 有望使光纤长距离授时精度达到亚纳秒水平。完善了长距离光纤时间传递中的不对称性抑制机制, 为建设独立的高精度光纤时间传递系统提供了理论指导。

## 参 考 文 献

- 1 J. Lauf, M. Calhoun, W. Diener *et al.*. Clocks and timing in the NASA deep space network [C]. IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition, 2005. 830~835
- 2 S. C. Ebenhag, P. Jarlemark, R. Emardson *et al.*. Time transfer over a 560 km fiber link [C]. Proceedings of the 22nd European Frequency and Time Forum (EFTF), 2008. 23~25

出, 经度差越大投影曲线越长, 纬度越低投影曲线越靠近赤道, 相应由投影曲线与球心围成的图形面积越大, 因而光纤链路受 Sagnac 效应影响越大。

表 1 给出了由北京市分别向其他 4 个城市传递时间的误差值, 并将其作为参考。由于城市都处于中低纬地区, 误差值主要与其与北京市的经度差决定, 所以虽然由哈尔滨市到广州市纬度依次减小, 但误差值由南向北依次增大; 西安市与广州市位于北京市西侧, 因而误差值为负值。从表中可以看到, 除了南北向或接近南北向分布的光纤链路, 进行近千米的时间传递误差值会达到纳秒量级。

- 3 Dirk Piester, Miho Fujieda, Michael Rost *et al.*. Time transfer through optical fibers (TTTOF): first results of calibrated clock comparisons [C]. 41st Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Systems and Applications Meeting, 2009. 16~19
- 4 Vladimir Smotalacha, Alexander Kuna, Werner Mache. Time transfer in optical network [C]. 42nd Annual Precise Time and Time Interval Meeting, 2010. 427~436
- 5 H. Schnatz. Comparison of clocks using optical fiber links: recent result and future projects [C]. Conference on Precision Electromagnetic Measurement (CPEM), 2012. 185~186
- 6 Tomohiro Akiyama, Hirofumi Matsuzawa, Eisuke Haraguchi *et al.*. Phase stabilized RF reference signal dissemination over optical fiber employing instantaneous frequency control by VCO [C]. Microwave Symposium Digest (MTT), 2012 IEEE MTT-S International, 2012. 1~3
- 7 O. Lopez, A. Haboucha, F. Kéfélian *et al.*. Cascaded multiplexed optical link on a telecommunication network for frequency dissemination [J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(16): 16849~16857
- 8 D. Hou, P. Li, C. Liu *et al.*. Long-term stable frequency transfer over an urban fiber link using microwave phase stabilization [J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(2): 506~511
- 9 D. Hou, P. Li, P. Xi *et al.*. Timing jitter reduction over 20-km urban fiber by compensating harmonic phase difference of locked femtosecond comb [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2010, **8**(10): 993~995
- 10 Chang Le, Dong Yi, Sun Dongning *et al.*. Influence and suppression of coherent Rayleigh noise in fiber-optic-based phase-stabilized microwave-frequency transmission system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(5): 0506004
- 常乐, 董毅, 孙东宁等. 光纤稳相微波频率传输中相干瑞利噪声的影响与抑制[J]. *光学学报*, 2010, **32**(5): 0506004
- 11 Zhang Fan, Hou Dong, Guo Haipeng *et al.*. Timing delay jitter compensation of a fiber link with active delay compensation [J].

*Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 671~675

张帆, 侯冬, 郭海鹏等. 光纤时间频率传输的时延抖动主动补偿[J]. *光学学报*, 2010, **30**(3): 671~675

- 12 S. R. Jefferts, M. A. Weiss, J. Levine *et al.*. Two-way time and frequency transfer using optical fibers [J]. *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, 1997, **46**(2): 914~918

- 13 R. Y. Wang, Y. Zheng, A. P. Yao *et al.*. Modified Sagnac experiment for measuring travel-time difference between counter-propagating light beams in a uniformly moving fiber [J]. *Phys. Lett. A*, 2003, **312**(1-2): 7~10

栏目编辑: 王晓球