

标量衍射积分公式比较分析

郭福源 李连煌

(福建师范大学激光与光电子技术研究所, 光子技术福建省重点实验室, 医学光电科学与技术教育部重点实验室, 福建 福州 350007)

摘要 由于菲涅耳-基尔霍夫衍射公式、瑞利-索末菲衍射公式 1 和 2 共存于标量衍射积分公式体系, 3 个衍射积分公式的优劣难以断定。为了比较 3 个衍射积分公式, 基于小衍射源和衍射远场的特点简化 3 个衍射积分公式, 给出计算衍射远场平面上的标量光场总功率和衍射远场半球面上的矢量光场总功率的函数表达式, 并以被积函数的收敛性判断 3 个衍射积分公式的适用范围, 以衍射源总功率为标准, 判断 3 个衍射积分公式的计算精度。分析表明, 3 个衍射积分公式均适用于计算傍轴标量衍射场, 而只有瑞利-索末菲衍射公式 1 才适用于计算非傍轴标量衍射场; 3 个衍射积分公式均适用于计算傍轴和非傍轴矢量衍射场。其中, 对于垂直入射至小圆孔的平面波受限非傍轴衍射, 基于瑞利-索末菲衍射公式 2 计算的衍射远场观察半球面上总功率的相对计算误差的绝对值最小。

关键词 物理光学; 衍射; 总功率; 非傍轴; 远场; 能量守恒定律

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.0226001

Comparison on the Scalar Diffraction Integral Formulae

Guo Fuyuan Li Lianhuang

(Key Laboratory of Optoelectronic Science and Technology for Medicine of Ministry of Education, Fujian Provincial Key Laboratory of Photonic Technology, Institute of Laser and Optoelectronics Technology, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350007, China)

Abstract As the Fresnel-Kirchhoff diffraction formula and the first and second solution of Rayleigh-Sommerfeld diffraction formulae coexist in the scalar diffraction integral formulae system, it is difficult to judge which one is the best. For the sake of comparing three diffraction formulae, the specialties of small diffracted source and far field diffraction are employed to simplify three diffraction formulae, the expressions of the scalar far field total powers in observation plane and vector far field total powers in observation hemisphere are presented. Based on the convergence of integrand, the applicable scopes of three diffraction formulae are introduced. And using the total power of diffracted source as standard, the computational precisions of the diffraction formulae are clarified. The analysis results indicate that, for the hypothesis of scalar diffraction field, three diffraction formulae are suitable for computing the paraxial scalar diffraction beam, but only the first solution of Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula is appropriate for computing the non-paraxial diffraction beam. For the nature of vector diffraction field, three diffraction formulae are applicable for computing the paraxial and non-paraxial vector diffraction beam. Hereinto, for the normal incident plane wave diffracted by small circular aperture, the absolute value of relative calculated error of the far field total power which is computed by the second solution of Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula is the least.

Key words physical optics; diffraction; total power; non-paraxial; far field; law of energy conservation

OCIS codes 260.1960; 260.2160; 070.7345

1 引 言

1678 年惠更斯基于直观信念提出采用衍射源的球面次级子波来解释衍射现象^[1,2], 子波包络面

形成新的波面, 波面的法线方向就是波的传播方向^[3,4], 形成惠更斯原理。1818 年菲涅耳对惠更斯的子波振幅与相位进行假定, 并利用干涉理论补充

收稿日期: 2012-09-10; **收到修改稿日期**: 2012-09-26

基金项目: 福建省教育厅重点项目(JA10062, JK2012007)资助课题。

作者简介: 郭福源(1965—), 男, 博士, 教授, 主要从事光波导理论和光束传输理论及其应用等方面的研究。

E-mail: guofy@fjnu.edu.cn

了惠更斯原理,指出衍射场是衍射源的次级子波相干叠加的结果,形成了惠更斯-菲涅耳原理^[1~4]。惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式包含有倾斜因子 $O(\chi)$,并假设 $O(\chi)$ 在衍射角 $\chi = 0$ 时最大,且随 χ 增加而减少,当 $\chi \geq \pi/2$ 时, $O(\chi) = 0$ 。

标量衍射积分公式以亥姆霍兹方程和格林定理为基础,给出倾斜因子的表达式,1882年基尔霍夫基于点源球面波表达的格林函数和基尔霍夫边界条件导出了菲涅耳-基尔霍夫衍射公式^[2,4],也称基尔霍夫衍射公式^[1,3],对于垂直入射到孔的平面波受限衍射,其倾斜因子 $O_{F-K}(\chi) = (1 + \cos \chi)/2$,由于 $O_{F-K}(\pi/2) = 1/2$ 与菲涅耳的假设 $O(\pi/2) = 0$ 不一致,菲涅耳的假设被认为是不正确的^[2,3];而后,瑞利和索末菲基于点源及其镜像球面波分别在异相和同相条件下叠加而构造的格林函数及索末菲辐射条件形成了瑞利-索末菲衍射公式^[1,5,6]1和2,对于垂直入射到孔的平面波受限衍射,倾斜因子分别为 $O_{R-S1}(\chi) = \cos \chi$ 和 $O_{R-S2}(\chi) = 1$,其中 $O_{R-S1}(\pi/2) = 0$ 与菲涅耳的假设一致,而 $O_{R-S2}(\pi/2) = 1$ 与菲涅耳的假设不一致。目前,由于选择的格林函数和附加条件的不同,形成了3个具有不同倾斜因子的衍射积分公式,且菲涅耳-基尔霍夫衍射公式是两种瑞利-索末菲衍射公式的数学平均值^[1,7]。尽管开展了一些比较研究^[7~12],但它们的计算精确度优劣却仍未明确^[1]。由于瑞利-索末菲衍射公式1的倾斜因子在倾斜角为 $\pi/2$ 时与菲涅耳的假设一致,它较常被用于光波导和光纤的衍射远场特性分析^[13~18]。

由于标量衍射理论的公式推导是把光波当作标量波来处理^[1,2],3个标量衍射理论仅是近似的理论,当衍射孔径比波长大得多,以及不要在太靠近孔径的地方观察衍射场时,标量理论能得出精确结果^[1]。可见,当衍射孔径较大时,衍射场光束为傍轴光束,由于 $\cos \chi \approx 1$,3个倾斜因子基本相等,基于3个标量衍射积分公式计算的衍射远场特性也基本相同,衍射远场总功率也基本满足描述能量守恒定律的帕斯瓦尔定理^[1]。但是,当衍射孔径较小时,衍射场光束为非傍轴光束,3个不同的倾斜因子将导致基于3个标量衍射积分公式计算的衍射远场特性也不同,而且由于对观察点处光场的波矢方向的假设不同,也导致所计算的衍射远场特性不同。

尽管1896年索末菲已经首次给出一个衍射问题的真正严格解^[1,2],但是,矢量衍射理论基于麦克斯韦方程组分析光场,计算过程较繁复,因此,平面波的角谱理论^[1,19]常被用于非傍轴光场分析。尽管

平面波的角谱理论可以根据最快速下降法^[19]证明标量衍射积分公式的倾斜因子 $O(\chi) = \cos \chi$,但是根据角谱理论计算的非傍轴标量衍射光束在横截面上的总功率^[20~22]小于空间频谱总功率,而非傍轴矢量衍射光束在横截面上的总功率计算值大于非傍轴标量衍射光束在横截面上的总功率计算值^[23~25],虽然衍射光束在横截面上的总功率计算值^[20~25]与观察平面位置无关,但却与帕斯瓦尔定理不一致,不满足能量守恒定律。

为了阐明3个标量衍射积分公式的特性,将3个标量衍射积分公式的适用范围从傍轴区延拓到非傍轴区,分别以平面和半球面为非傍轴衍射远场观察面,计算标量衍射场在观察平面上的衍射远场总功率和矢量衍射场在观察半球面上的衍射远场总功率,开展3个标量衍射积分公式的比较研究,其结论有助于理解光场衍射的惠更斯-菲涅耳原理。

2 简单傍轴与非傍轴标量衍射场特性分析

设衍射源是波矢方向平行于 z 轴的均匀平面波垂直通过一圆孔的光波,圆孔中心与笛卡儿坐标系的原点 O 重合,圆孔平面与 xOy 平面重合,观察平面与 xOy 平面平行,两者间距为 z' ,衍射源参考点 A 与观察点 A' 之间的传播距离为 L , AA' 与 z 轴的夹角为 χ ,观察半球面的球心与坐标原点 O 重合,球面半径 OA' 为 R , OA' 与 z 轴的夹角为 θ ,如图1所示。

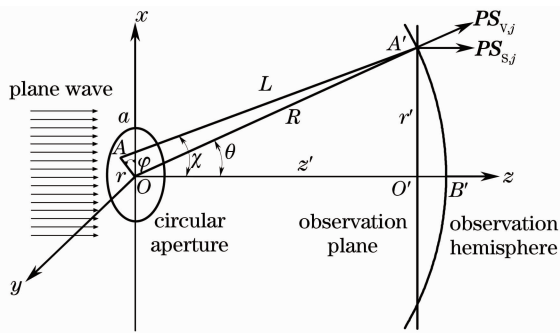


图1 圆孔衍射示意图

Fig. 1 Schematic of the circular aperture diffraction

根据菲涅耳-基尔霍夫衍射公式,瑞利-索末菲衍射公式1和2,观察点 A' 的场 $\Psi(A')$ 可由衍射源参考点 A 的场 $\Psi(A)$ 表示为

$$\Psi_j(A) = \iint_{\Sigma} \Psi(A) \frac{\exp(ikL)}{i\lambda L} O_j(\chi) F_j(L) ds, \quad (1)$$

式中下标 j 为F-K,R-S1和R-S2分别标注菲涅耳-基尔霍夫衍射公式,瑞利-索末菲衍射公式1

和 2, Σ 为衍射源区域, ds 为衍射源的面积微元, i 为虚数单位, $k = 2\pi/\lambda$ 为光波的波数, λ 为光波的波长, $O_j(\chi)$ 为倾斜因子对于垂直入射到圆孔的平面波, $O_{F-K}(\chi) = (1 + \cos \chi)/2$, $O_{R-S1}(\chi) = \cos \chi$ 和 $O_{R-S2}(\chi) = 1$, $F_j(L)$ 为近场因子, $F_{F-K}(L) = 1$ 和 $F_{R-S2}(L) = 1$, 在文献[1]中, $F_{R-S1}(L) = 1$, 在文献[5, 6]中, $F_{R-S1}(L) = 1 + i/(kL)$ 。

设衍射源参考点 A 的坐标为 $(r\cos \varphi, r\sin \varphi, 0)$, 观察点 A' 的坐标为 $(r', 0, z')$, 其中 r 和 φ 分别为柱面坐标系的径向和角向坐标, 当观察点 A' 位于衍射远场时, 文献[5, 6]中的 $F_{R-S1}(L) \rightarrow 1$, 若衍射源尺寸足够小, 最大的衍射源径向尺寸 $r_{\max} \ll R$ 时, 有 $\chi \approx \theta$, $\cos \chi \approx \cos \theta$, 倾斜因子 $O_{F-K}(\theta) = (1 + \cos \theta)/2$, $O_{R-S1}(\theta) = \cos \theta$ 和 $O_{R-S2}(\theta) = 1$, 传播距离 $L \approx R - r\sin \theta \cos \varphi$ 。由于 $ds = r dr d\varphi$, 则远场观察点 A' 的场 $\Psi_j(A')$ 由衍射源的标量场分布 $\Psi(r)$ 表示为^[13, 17]

$$\Psi_j(A') = \frac{O_j(\theta) \exp(ikR)}{i\lambda R} S(\theta), \quad (2)$$

式中 $S(\theta)$ 为衍射源的角谱, 也称为衍射源的空间频谱。 $S(\theta)$ 为标量场分布 $\Psi(r)$ 的零阶汉克尔变换^[13, 14], 或称傅里叶-贝塞尔变换^[6], 表示为

$$S(\theta) = 2\pi \int_0^\infty \Psi(r) J_0(kr \sin \theta) r dr, \quad (3)$$

式中 $J_0(\xi)$ 为零阶贝塞尔函数。

电磁场总功率(能流)是能流密度在传输空间截面上的积分

$$P_{q,j}(\xi) = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{PS} \rangle_{q,j} \mathbf{N}_0 d\sigma, \quad (4)$$

式中下标 q 为 S 和 V , 分别标注场 $\Psi_j(A')$ 为标量场和矢量场, $\langle \mathbf{PS} \rangle$ 为坡印亭矢量 \mathbf{PS} 的时间平均值, Σ' 为传输空间截面区域, \mathbf{N}_0 为截面微元向外法线的单位矢量, $d\sigma$ 为截面的面积微元。

当 $\Psi(A')$ 为标量场时, 可以近似认为在观察点 A' 处光波的波矢方向与 z 轴平行^[26], 即在 $z = z'$ 观察平面上的标量场分布 $\Psi_{S,j}(z', r') = \Psi_j(A')$ 。由于 $\mathbf{PS}_{S,j} = \mathbf{z}_0 PS_{S,j}$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{z}_0$, $d\sigma = r' dr' d\varphi'$, 其中 \mathbf{z}_0 为 z 的单位矢量, 则衍射远场观察平面上光场的总功率为

$$P_{S,j}(\xi) = 2\pi C \int_0^\infty \Psi_{S,j}^2(z', r') r' dr', \quad (5)$$

式中 C 为常数。

当 $\Psi_{q,j}(A')$ 为电场分布时, $C = (1/2) \sqrt{\epsilon/\mu}$; 当 $\Psi_{q,j}(A')$ 为磁场分布时, $C = (1/2) \sqrt{\mu/\epsilon}$, ϵ 和 μ 分别为衍射空间介质的介电常数和磁导率。

根据图 1 中各个参量的几何关系, 有 $R = z' \sec \theta$, $r' = z' \tan \theta$, $dr' = z' \sec^2 \theta d\theta$, 由(2)式和(3)式知, 在与衍射源距离为 z' 的观察平面上, 衍射远场总功率可表示为

$$P_{S,j}(\xi) = \frac{2\pi C}{\lambda^2} \int_0^{\pi/2} \tau_{S,j}(\theta) S^2(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (6)$$

式中系数 $\tau_{S,j}(\theta) = O_j^2(\theta)/\cos \theta$, 有 $\tau_{S,F-K}(\theta) = (1 + \cos \theta)^2 \sec \theta/4$, $\tau_{S,R-S1}(\theta) = \cos \theta$ 和 $\tau_{S,R-S2}(\theta) = \sec \theta$ 。

当衍射源尺寸 ξ 足够大时, 衍射场光束为傍轴光束, 且当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, 衍射源的角谱 $S(\pi/2) \rightarrow 0$, 可以认为由(6)式表达的 $P_{S,j}(\xi)$ 的被积函数收敛, 尽管基于(6)式计算的 3 个衍射远场观察平面上的总功率计算值略有差异, 由于 $O_{R-S2}(\theta) > O_{F-K}(\theta) > O_{R-S1}(\theta)$, 有 $P_{S,R-S2}(\xi) > P_{S,F-K}(\xi) > P_{S,R-S1}(\xi)$, 但 3 者之间相差甚微, 且与衍射源总功率基本相同, 可见, 上述 3 个标量衍射积分公式均可用于傍轴标量衍射场光束特性分析。

当衍射源尺寸 ξ 较小时, 衍射场光束为非傍轴光束, 且当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, 衍射源的角谱为非 0 值, $S(\pi/2) \neq 0$, 若要(6)式中的被积函数 $\tau_{S,j}(\theta) S^2(\theta) \sin \theta$ 收敛, 要求 $O_j(\pi/2) = 0$, 它与惠更斯-菲涅耳原理中的菲涅耳假设 $O_j(\pi/2) = 0$ 一致。

对于菲涅耳-基尔霍夫衍射公式和瑞利-索末菲衍射公式 2, 由于当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, $\sec \theta \rightarrow \infty$, $\tau_{S,F-K}(\theta) \rightarrow \infty$, $\tau_{S,R-S2}(\theta) \rightarrow \infty$, 则 $\tau_{S,F-K}(\theta) S^2(\theta) \sin \theta \rightarrow \infty$, $\tau_{S,R-S2}(\theta) S^2(\theta) \sin \theta \rightarrow \infty$, 即由(6)式表达的 $P_{S,F-K}(\xi)$ 和 $P_{S,R-S2}(\xi)$ 的被积函数不收敛, 导致衍射远场观察平面上光场的总功率 $P_{S,F-K}(\xi) \rightarrow \infty$ 和 $P_{S,R-S2}(\xi) \rightarrow \infty$, 可见菲涅耳-基尔霍夫衍射公式和瑞利-索末菲衍射公式 2 不宜用于表达非傍轴标量衍射场。

当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, $\tau_{R-S1}(\theta) = 0$, $\tau_{R-S1}(\theta) S^2(\theta) \sin \theta = 0$, 由(6)式表达的 $P_{S,R-S1}(\xi)$ 的被积函数收敛, 可见瑞利-索末菲衍射公式 1 可用于表达非傍轴标量衍射场, 它对衍射源的尺寸没有限制^[5]。

当瑞利-索末菲衍射公式 1 用于表达标量衍射场时, 在 $z = z'$ 观察平面上的衍射远场分布为^[26]

$$\Psi_{S,R-S1}(z', r') = \frac{\cos \theta \exp(ikR)}{i\lambda R} S(\theta). \quad (7)$$

无论瑞利-索末菲衍射公式 1 用于表达傍轴或非傍轴衍射光束, 观察平面上的衍射远场总功率可表示为

$$P_{S,R-S1}(\xi) = \frac{2\pi C}{\lambda^2} \int_0^{\pi/2} S^2(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (8)$$

当衍射源的角谱 $S(\theta)$ 的自变量 θ 由径向空间

频率 f_r 替代时, (3) 式写成衍射源的空间频谱形式^[6]:

$$S(f_r) = 2\pi \int_0^{\infty} \Psi(r) J_0(2\pi r f_r) r dr, \quad (9)$$

式中 $f_r = \sin \theta / \lambda$ 为径向空间频率, 由于 θ 的定义域为 $[0, \pi/2]$, 有 $0 \leq f_r \leq 1/\lambda$, 即衍射源空间频谱 $S(f_r)$ 的定义域为 $[0, 1/\lambda]$ 。则(8)式可写成空间频谱总功率形式^[13,26]:

$$P_{S,R-S1}(\xi) = 2\pi C \int_0^{1/\lambda} S^2(f_r) f_r df_r. \quad (10)$$

参照(5)式, 衍射源总功率为

$$P_{DS}(\xi) = 2\pi C \int_0^{\infty} \Psi^2(r) r dr. \quad (11)$$

由于(10)式的积分范围为 $[0, 1/\lambda]$, 而不是 $[0, \infty)$, 根据帕斯瓦尔定理^[1]可知, 当瑞利-索末菲衍射公式 1 用于表达标量衍射场时, 观察平面上的衍射远场总功率小于或等于衍射源总功率^[26], 即 $P_{S,R-S1}(\xi) \leq P_{DS}(\xi)$, 其中等号仅在衍射场尺寸足够大时才成立。

若衍射场介质为无损介质, 在衍射过程中, 电磁场的能量不会有损失, 根据行波场的能量守恒定律, 衍射远场总功率 $P_{EC}(\xi)$ 与衍射积分公式无关, 它恒等于衍射源总功率, 即 $P_{EC}(\xi) = P_{DS}(\xi)$ 。

为了分析衍射积分公式的精确性, 以衍射源总功率为标准, 定义衍射远场总功率的相对计算误差为

$$\delta_{q,j}(\xi) = \frac{P_{q,j}(\xi) - P_{DS}(\xi)}{P_{DS}(\xi)}. \quad (12)$$

对于波矢方向平行于 z 轴的均匀平面波垂直通过半径为 a 的圆孔的光波受限衍射, 衍射源标量场分布 $\Psi(r) = \text{circ}(r/a)$, 其中 $\text{circ}(\xi)$ 为圆孔函数。当 $0 \leq \xi \leq 1$ 时, $\text{circ}(\xi) = 1$; 当 $\xi > 1$ 时, $\text{circ}(\xi) = 0$, 则衍射源总功率 $P_{DS}(a) = C\pi a^2$, 由(3)式知, 衍射源的角谱 $S(\theta)$ 可表示为^[19]

$$S(\theta) = \frac{2\pi a^2 J_0(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}. \quad (13)$$

则当瑞利-索末菲衍射公式 1 用于表达标量衍射场时, 衍射远场总功率的相对计算误差为

$$\delta_{S,R-S1}(a) = -J_0^2(ka) - J_1^2(ka). \quad (14)$$

由(14)式可知, 当 $\Psi(A')$ 为标量场时, 在观察平面上衍射远场总功率的相对计算误差 $\delta_{S,R-S1}(a)$ 与圆孔半径 a 的关系如图 2 的虚线所示, 根据能量守恒定律, $\delta_{EC}(a) \equiv 0$, 如图 2 实线所示。

由图 2 和(14)式知, 观察平面上衍射远场总功率

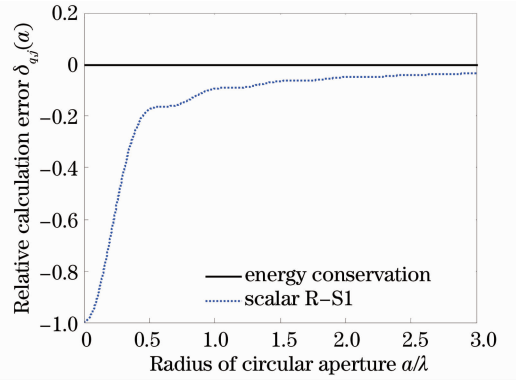


图 2 衍射远场总功率的相对计算误差与圆孔半径关系示意图

Fig. 2 Characteristics of the relative calculation errors of total power of far field diffraction versus the radius of circular aperture

的相对计算误差 $\delta_{S,R-S1}(a) < 0$, 相对计算误差的绝对值 $|\delta_{S,R-S1}(a)|$ 随圆孔半径 a 的增加而单调递减。其中当 $a \rightarrow 0$ 时, $|\delta_{S,R-S1}(a)| \rightarrow 100\%$; 当 $a \rightarrow \infty$ 时, $|\delta_{S,R-S1}(a)| \rightarrow 0$; 当 $a < 0.2674\lambda$ 时, $|\delta_{S,R-S1}(a)| > 50\%$; 当 $a > 0.9504\lambda$ 时, $|\delta_{S,R-S1}(a)| < 10\%$; 当 $a > 10.1897\lambda$ 时, $|\delta_{S,R-S1}(a)| < 1\%$ 。

可见, 由于观察平面上衍射远场总功率计算公式中的被积函数在 $\theta \rightarrow \pi/2$ 处的收敛问题, 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式和瑞利-索末菲衍射公式 2 的倾斜因子与菲涅耳关于倾斜因子的假设不一致, 不能用于表达非傍轴标量衍射场, 瑞利-索末菲衍射公式 1 的倾斜因子与菲涅耳关于倾斜因子的假设一致, 可用于表达非傍轴标量衍射场。而且, 基于瑞利-索末菲衍射公式 1 计算的衍射远场总功率与空间频谱总功率一致, 在傍轴区有较明确的意义; 但是, 尽管瑞利-索末菲衍射公式 1 对衍射源的尺寸没有限制^[5], 由于空间频谱的定义域为 $[0, 1/\lambda]$, 而不是 $[0, \infty)$, 基于瑞利-索末菲衍射公式 1 计算的非傍轴衍射远场总功率有较大的计算误差, 且当圆孔半径 $a \ll \lambda$ 时, 计算误差的绝对值 $|\delta_{S,R-S1}(a)| \rightarrow 100\%$ 。

3 非傍轴矢量衍射场特性分析

实际上衍射场为矢量场, 3 个衍射积分公式均可以适用于非傍轴衍射光束分析。对于小衍射源, 若认为观察点 A' 处光波的波矢方向为 OA' 方向, 观察半球面上的场分布^[13,14] $\Psi_{V,j}(R, \theta) = \Psi_j(A')$, 由于坡印廷矢量 $\mathbf{PS}_{V,j} = \mathbf{r}_0 \mathbf{PS}_{V,j}$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{r}_0$, $d\sigma = R d\Omega$, 其中 \mathbf{r}_0 为 R 的单位矢量, 立体角的微分 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, 则在观察半球面上的衍射远场总功率为

$$P_{V,j}(\xi) = 2\pi R^2 C \int_0^{\pi/2} \Psi_{V,j}^2(R, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (15)$$

由(2)和(3)式可知,在半径为 R 的观察半球面上,衍射远场总功率可表示为

$$P_{V,j}(\xi) = \frac{2\pi C}{\lambda^2} \int_0^{\pi/2} \tau_{V,j}(\theta) S^2(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (16)$$

式中系数 $\tau_{V,j}(\theta) = O_j^2(\theta)$, 有 $\tau_{V,F-K}(\theta) = (1 + \cos \theta)^2/4$, $\tau_{V,R-S1}(\theta) = \cos^2 \theta$ 和 $\tau_{V,R-S2}(\theta) = 1$ 。

无论衍射场光束为傍轴或非傍轴光束,当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时,系数 $\tau_{V,j}(\theta)$ 均为有限值,即由(16)式表达的 $P_{V,F-K}(\xi)$ 、 $P_{V,R-S1}(\xi)$ 和 $P_{V,R-S2}(\xi)$ 的被积函数均收敛。可见,3个衍射公式均可用于表达非傍轴矢量衍射场。

对于波矢方向平行于 z 轴的均匀平面波垂直通过半径为 a 的圆孔的光波受限衍射,由(12)式和(16)式知,衍射远场总功率的相对计算误差 $\delta_{V,R-S2}(a)$, $\delta_{V,F-K}(a)$ 和 $\delta_{V,R-S1}(a)$ 分别与圆孔半径 a 的关系如图3所示,根据能量守恒定律, $\delta_{EC}(a) \equiv 0$, 如图3实线所示。

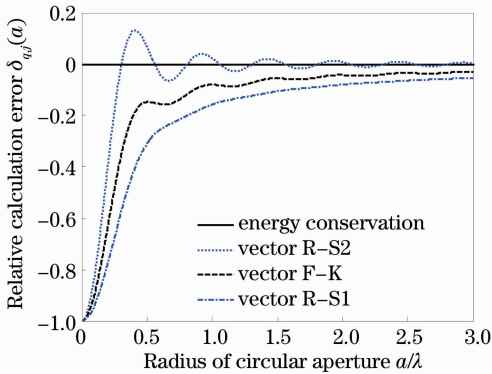


图3 衍射远场总功率的相对计算误差与圆孔半径关系示意图

Fig. 3 Characteristics of the relative calculation errors of total power of far field diffraction versus the radius of circular aperture

由图3和(16)式知,当瑞利-索末菲衍射公式1用于表达非傍轴矢量衍射场时,观察半球面上远场总功率的相对计算误差 $\delta_{V,R-S1}(a) < 0$, 相对计算误差的绝对值 $|\delta_{V,R-S1}(a)|$ 随圆孔半径 a 的增加而单调递减。其中当 $a \rightarrow 0$ 时, $|\delta_{V,R-S1}(a)| \rightarrow 100\%$; 当 $a \rightarrow \infty$ 时, $|\delta_{V,R-S1}(a)| \rightarrow 0$; 当 $a < 0.3441\lambda$ 时, 相对计算误差 $|\delta_{V,R-S1}(a)| > 50\%$; 当 $a > 1.5774\lambda$ 时, 相对计算误差 $|\delta_{V,R-S1}(a)| < 10\%$; 当 $a > 15.9168\lambda$ 时, $|\delta_{V,R-S1}(a)| < 1\%$ 。

当基尔霍夫衍射公式用于表达非傍轴矢量衍射

场时,观察半球面上远场总功率的相对计算误差 $\delta_{V,F-K}(a) < 0$, 相对计算误差的绝对值 $|\delta_{V,F-K}(a)|$ 随圆孔半径 a 的增加而波动,并逐渐减少。其中当 $a \rightarrow 0$ 时, $|\delta_{V,F-K}(a)| \rightarrow 100\%$; 当 $a \rightarrow \infty$ 时, $|\delta_{V,F-K}(a)| \rightarrow 0$; 当 $a < 0.2451\lambda$ 时, $|\delta_{V,F-K}(a)| > 50\%$; 当 $a > 0.8631\lambda$ 时, $|\delta_{V,F-K}(a)| < 10\%$; 当 $a > 9.2624\lambda$ 时, $|\delta_{V,F-K}(a)| < 1\%$ 。

当瑞利-索末菲衍射公式2用于表达非傍轴矢量衍射场时,观察半球面上远场总功率的相对计算误差 $\delta_{V,R-S2}(a)$ 在正、负之间波动,相对计算误差的绝对值 $|\delta_{V,R-S2}(a)|$ 随圆孔半径 a 的增加而波动,且波动幅度单调递减。其中当 $a \rightarrow 0$ 时, $|\delta_{V,R-S2}(a)| \rightarrow 100\%$; 当 $a \rightarrow \infty$ 时, $|\delta_{V,R-S2}(a)| \rightarrow 0$; 当 $a < 0.1762\lambda$ 时, $|\delta_{V,R-S2}(a)| > 50\%$; 当 $a > 0.4696\lambda$ 时, $|\delta_{V,R-S2}(a)| < 10\%$; 当 $a > 2.2181\lambda$ 时, $|\delta_{V,R-S2}(a)| < 1\%$ 。而且,相对计算误差的绝对值 $|\delta_{V,R-S2}(a)| < |\delta_{V,F-K}(a)| < |\delta_{V,R-S1}(a)|$ 。

可见,基尔霍夫衍射公式、瑞利-索末菲衍射公式1和2均可用于表达非傍轴矢量衍射场,它们对衍射源的尺寸没有限制。但是,由于空间频谱的定义域为 $[0, 1/\lambda]$ 而不是 $[0, \infty)$, 基于3个衍射公式计算的非傍轴衍射远场总功率计算值有较大的计算误差,且当圆孔半径 $a \ll \lambda$ 时,三个相对计算误差的绝对值 $|\delta_{V,j}(a)| \rightarrow 100\%$ 。

当瑞利-索末菲衍射公式2用于表达非傍轴矢量衍射场时,观察半球面上衍射远场总功率的相对计算误差的绝对值最小,而且,比基于瑞利-索末菲衍射公式1计算的非傍轴标量衍射远场总功率的相对计算误差的绝对值更小,即 $|\delta_{V,R-S2}(a)| < |\delta_{S,R-S1}(a)|$ 。

当瑞利-索末菲衍射公式2用于表达非傍轴矢量衍射场时,由于倾斜因子 $O_{R-S2}(\theta) = 1$, 在半径为 R 的观察半球面上的衍射远场分布为

$$\Psi_{V,R-S2}(R, \theta) = \frac{\exp(ikR)}{i\lambda R} S(\theta). \quad (17)$$

由(3)式和(17)式知,瑞利-索末菲衍射公式2是衍射源角谱的体现。

实际上,根据惠更斯-菲涅耳原理,观察点 A' 的光场就是衍射源各点发出的球面子波在 A' 点干涉的结果,当衍射源足够小时,衍射场光波的波矢方向就是 OA' 方向,即单位矢量 r_0 方向。可见,瑞利-索末菲衍射公式2用于表达非傍轴矢量衍射场正是惠更斯-菲涅耳原理的体现,因而有比较高的计算精度,更适合用于矢量衍射光场的表达。

4 结 论

若认为在观察点 A' 处光波的波矢方向与 z 轴平行,菲涅耳-基尔霍夫衍射公式和瑞利-索末菲衍射公式 1 和 2 均可用于表达傍轴标量衍射场,且在傍轴条件下,基于三个衍射公式计算的衍射远场观察平面上的总功率计算值差异甚微。

由于观察平面上衍射远场总功率计算公式中的被积函数在 $\theta \rightarrow \pi/2$ 处的收敛问题,菲涅耳-基尔霍夫衍射公式和瑞利-索末菲衍射公式 2 不能用于表达非傍轴标量衍射场,瑞利-索末菲衍射公式 1 的倾斜因子符合菲涅耳关于倾斜因子的假设,可用于表达非傍轴标量衍射场。但是,由于衍射源空间频谱的定义域为 $[0, 1/\lambda]$,而不是 $[0, \infty)$,基于瑞利-索末菲衍射公式 1 计算的非傍轴衍射远场总功率计算值有较大的计算误差。

对于波矢方向平行于 z 轴的均匀平面波垂直通过半径为 a 的圆孔的光波受限衍射,若衍射源尺寸足够小,可认为观察点 A' 处光波的波矢方向为 OA' 方向,基尔霍夫衍射公式、瑞利-索末菲衍射公式 1 和 2 均可用于表达傍轴和非傍轴矢量衍射场,对于极小尺寸的衍射源,基于 3 个衍射公式计算的非傍轴衍射远场总功率计算值均有较大的计算误差。其中对于垂直入射至圆孔的平面波受限衍射,当瑞利-索末菲衍射公式 2 用于表达非傍轴矢量衍射场时,由于它与惠更斯-菲涅耳原理一致,观察半球面上衍射远场总功率的相对计算误差的绝对值最小,而且比基于瑞利-索末菲衍射公式 1 计算的在观察平面上非傍轴标量衍射远场总功率的相对计算误差的绝对值更小。

参 考 文 献

- 1 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics (2nd Edition) [M]. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 1996. 4~61
- 2 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics (7th Edition) [M]. Oxford: Cambridge University Press, 1999. 412~516, 633~673
- 3 Liang Quanting. Physical Optics [M]. Beijing: China Machine Press, 1980. 101~104
梁铨廷. 物理光学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1980. 101~104
- 4 Yu Daoyin, Tan Hengying. Engineering Optics (2nd Edition) [M]. Beijing: China Machine Press, 2006. 338~343
郁道银, 谈恒英. 工程光学(第二版) [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006. 338~343
- 5 J. D. Gaskill. Linear System, Fourier Transforms and Optics [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978. 385~390
- 6 Xie Jianping, Ming Hai, Wang Pei. The Foundation of Modern Optics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. 58~64, 105~115
谢建平, 明海, 王沛. 近代光学基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. 58~64, 105~115

- 7 W. Freude, G. K. Grau. Rayleigh-Sommerfeld and Helmholtz-Kirchhoff integrals: application to the scalar and vectorial theory of wave propagation and diffraction [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1995, **13**(1): 24~32
- 8 E. Wolf, E. W. Marchand. Comparison of the Kirchhoff and the Rayleigh-Sommerfeld theories of diffraction at an aperture [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1964, **54**(5): 587~594
- 9 J. C. Heurtley. Scalar Rayleigh-Sommerfeld and Kirchhoff diffraction integrals: a comparison of exact evaluations for axial points [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1973, **63**(8): 1003~1008
- 10 D. C. Bertilone. On the exact Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld theories for the focusing of an infinite scalar spherical wave-field [J]. *Opt. Commun.*, 1991, **85**(2-3): 153~158
- 11 R. L. Lucke. Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson's spot [J]. *European J. Physics*, 2006, **27**(2): 193~204
- 12 Zhang Yinke, Huan Yixian. Comparison and experimental verification of Kirchhoff-Fresnel diffraction formula and Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula [J]. *J. Shaanxi Normal University (Natural Science Edition)*, 1993, **21**(3): 32~34
张引科, 郇宜贤. Kirchhoff-Fresnel 衍射公式和 Rayleigh-Sommerfeld 衍射公式的比较和实验验证 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 1993, **21**(3): 32~34
- 13 M. Artiglia, G. Coppa, P. Di Vita *et al.*. Mode field diameter measurements in single-mode optical fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1989, **7**(8): 1139~1152
- 14 S. Thirumeni, P. Poopalan, A. A. Hassan *et al.*. Effects of scan angles in the far-field scanning method on the measurement of the mode field diameter [C]. Proceeding of ICSE'98, 1998. 121~123
- 15 W. Freude, A. Sharma. Refractive-index profile and modal dispersion prediction for a single-mode optical waveguide from its far-field radiation pattern [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1985, **3**(3): 628~634
- 16 M. Young. Mode-field diameter of single-mode optical fiber by far-field scanning [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(24): 5605~5619
- 17 Lin Bin, Guo Fuyuan, Chen Yuqing *et al.*. Beam characteristic analysis of scalar diffraction from weakly guiding optical fiber [J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(9): 809~813
林斌, 郭福源, 陈钰清等. 弱导光纤的标量衍射光束特性分析 [J]. 中国激光, 2003, **30**(9): 809~813
- 18 Guo Fuyuan, Lin Bin, Chen Yuqing *et al.*. Characteristic analysis of diffraction from planar waveguide [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(12): 1513~1517
郭福源, 林斌, 陈钰清等. 平面波导衍射特性分析 [J]. 光学学报, 2002, **22**(12): 1513~1517
- 19 Yang Guoguang, Song Feijun. Advanced Physical Optics (2nd Edition) [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2008. 69~96
羊国光, 宋菲君. 高等物理光学(第二版) [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2008. 69~96
- 20 Deng Xiaojie, Wu Benke, Xiao Su *et al.*. Energy transmission of a small aperture in near-field diffraction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(12): 1432~1436
邓小玖, 吴本科, 肖苏等. 微小孔近场衍射的能量传输 [J]. 光学学报, 2001, **21**(12): 1432~1436
- 21 Liu Caixia, Deng Xiaojie, Niu Guojian *et al.*. Propagation characteristics of nonparaxial scalar Gaussian beam [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2010, **47**(9): 092601
刘彩霞, 邓小玖, 牛国鉴等. 非傍轴标量高斯光束传输特性的研究 [J]. 激光与光电子学进展, 2010, **47**(9): 092601
- 22 Deng Xiaojie, Hu Jigang, Liu Caixia *et al.*. Study of the beam quality factor [J]. *J. Hefei University of Technology (Natural Science Edition)*, 2002, **25**(6): 1187~1190
邓小玖, 胡继刚, 刘彩霞等. 光束质量因子的研究 [J]. 合肥工

- 业大学学报(自然科学版), 2002, **25**(6): 1187~1190
- 23 Deng Xiaojie, Wang Guoan, Liu Caixia *et al.*. Divergent characteristic of the second order moment of nonparaxial vector beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(12): 8260~8263
邓小杰, 汪国安, 刘彩霞 等. 非傍轴矢量光束二阶矩的发散特性 [J]. *物理学报*, 2009, **58**(12): 8260~8263
- 24 Deng Xiaojie, Niu Guojian, Liu Caixia *et al.*. Propagation characteristics of nonparaxial Gaussian beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(9): 094202
邓小杰, 牛国鉴, 刘彩霞 等. 非傍轴高斯光束传输特性的研究 [J]. *物理学报*, 2011, **60**(9): 094202
- 25 Zhou Guoquan. Propagation of nonparaxial vector Gaussian beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(4): 1572~1577
周国泉. 非傍轴矢量高斯光束的传输 [J]. *物理学报*, 2005, **54**(4): 1572~1577
- 26 Guo Fuyuan, Li Lianhuang. Propagation characteristics of nonparaxial diffraction beam [J]. *Chinese J. Lasers*, 2013, **40**(1): 0102004
郭福源, 李连煌. 非傍轴衍射光束的传输特性 [J]. *中国激光*, 2013, **40**(1): 0102004

栏目编辑: 李文喆