

光学系统光学矩阵元素的数字全息检测

李俊昌 楼宇丽 桂进斌 袁操今 宋庆和

(昆明理工大学理学院, 云南 昆明 650093)

摘要 根据矩阵光学理论,轴对称傍轴光学系统可以由一个 2×2 矩阵描述,在确定系统的光学矩阵时必须得到组成光学系统所有元件的准确的光学参数及几何位置。提出了不需要知道系统内部元件的相关参数而通过数字全息实验确定系统光学矩阵元素的方法,并给出了实验证明。实验研究表明,该方法可以足够准确地获得矩阵元素,对于矩阵光学的应用有实际意义。

关键词 全息;矩阵光学;数字全息;数字全息检测

中图分类号 O438.1 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201333.0209001

Digital Holographic Detection of Optical Matrix Elements in Optical System

Li Junchang Lou Yuli Gui Jinbin Yuan Caojin Song Qinghe

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology,

Kunming, Yunnan 650093, China)

Abstract According to the theory of matrix optics, axisymmetric paraxial optical system can be described by 2×2 matrix and it is necessary to get the accurate optical parameters and geometric location information of all components when determining the optical system matrix of optical system. A new method to determine optical matrix elements of system using digital holographic experiment is put forward, free from knowing the relevant parameters of the system element. Furthermore, experimental evidence of detection method is given. The experimental study show that the matrix elements can be obtained accurately with method, which has practical significance for applications of matrix optics.

Key words holography; matrix optics; digital holography; digital holographic detection

OCIS codes 090.1995; 080.2730

1 引 言

在矩阵光学^[1]应用研究中,轴对称傍轴光学系统可以由一个 2×2 矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 描述。1970 年,柯林斯(Collins)^[2]将矩阵光学引入标量衍射理论,导出了包含四个矩阵元素 A, B, C, D 的衍射计算公式,简称柯林斯公式。由于该公式显著简化了光波通过光学系统的衍射运算,在激光应用研究中获得广泛应用^[3]。例如,在数字全息应用研究中,当物体尺寸与电荷耦合器件(CCD)面阵尺寸有较大差异时,为使 CCD 有效探测物光场信息,在物体与 CCD 间通常配置光学系统对物光场进行变换^[4~8],当 CCD 平面与物体的像平面不重合时,必须考虑物光

通过一个光学系统的波前重建问题。由于光学系统通常是轴对称傍轴系统,物光场可以利用柯林斯公式的逆运算重建^[7,8]。

然而,根据矩阵光学理论,为获得光学系统的矩阵元素,必须得到组成光学系统的每一元件的光学参数(如每个透镜材料的折射率,透镜的几何尺寸)及各元件的准确位置(元件间的距离等)。在应用研究中,当光学系统给定后,许多情况下较难准确获取这些参数。如果能够建立一种测量方法,在不需知道光学系统的内部结构时就能较准确地确定系统的光学矩阵元素,具有重要的实际意义。

将光学系统视为不必知道内部结构的系统,提出了利用数字全息技术简明地测量系统光学矩阵元

收稿日期: 2012-09-11; 收到修改稿日期: 2012-12-03

基金项目: 国家自然科学基金(60977007)资助课题。

作者简介: 李俊昌(1945—),男,教授,博士生导师,主要从事信息光学理论及数值计算等方面的研究。

E-mail: jcli@vip.163.com

素的方法,并给出了实验证明。

2 光学系统 A, B, C, D 参数检测的理论研究

2.1 柯林斯公式及其逆运算简介

图 1 为理论研究的轴对称傍轴光学系统示意图,若入射平面及出射平面的坐标分别为 x_0, y_0 及 x, y ,柯林斯建立了根据入射平面光波场 $U_0(x_0, y_0)$ 计算出射平面光波场 $U(x, y)$ 的下述关系^[2]:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkL_{\text{axe}})}{j\lambda B} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{jk}{2B}[A(x_0^2 + y_0^2) + D(x^2 + y^2) - 2(xx_0 + yy_0)]\right\} dx_0 dy_0, \quad (1)$$

式中 L_{axe} 为光学系统的轴上光程, $k = 2\pi/\lambda$, λ 为光波长。

柯林斯公式有逆运算式为^[8]

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{\exp(-jkL_{\text{axe}})}{-j\lambda B} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp\left\{-\frac{jk}{2B}[D(x^2 + y^2) + A(x_0^2 + y_0^2) - 2(x_0x + y_0y)]\right\} dx dy. \quad (2)$$

如果系统的入射平面及出射平面分别是数字全息系统的物平面及 CCD 平面,当通过 CCD 记录的全息图获得到达 CCD 平面的物光场 $U(x, y)$ 时,利用(2)式便能进行物光场重建^[7,8]。

2.2 利用点源全息图检测光学矩阵元素 A, B, C, D

令入射光为物平面 (ξ, η) 处的点源, (1)式变为

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkL_{\text{axe}})}{j\lambda B} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta) \exp\left\{\frac{jk}{2B}[A(x_0^2 + y_0^2) + D(x^2 + y^2) - 2(xx_0 + yy_0)]\right\} dx_0 dy_0, \quad (3)$$

利用 δ 函数的性质,可以得到

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkL_{\text{axe}})}{j\lambda B} \exp\left[\frac{jk}{2B}\left(A - \frac{1}{D}\right)(\xi^2 + \eta^2)\right] \exp\left\{\frac{jk}{2B/D}\left[\left(x - \frac{\xi}{D}\right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{D}\right)^2\right]\right\}. \quad (4)$$

(4)式表明,物空间的点源在像空间中形成波面半径 $d_i = B/D$ 的球面波^[9]。换言之,像空间的点源是物空间点源的像。因此,如果在物平面放置一物体,则在 CCD 前方距离 d_i 处将形成物体的像。

根据矩阵光学理论及图 1,物平面到像平面的光学矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - d_i C & B - d_i D \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对于像平面,有^[1,3]

$$B - d_i D = 0, \quad (6)$$

并且,像的横向放大率 G 满足^[1,3]

$$G = 1/D, \quad (7)$$

$$G = A - d_i C. \quad (8)$$

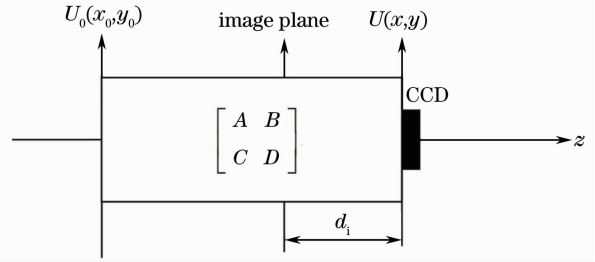


图 1 物平面到 CCD 平面光学系统相关参数的定义图
Fig. 1 Schematic of optical system's relevant parameters from object plane to CCD plane

CCD 记录了数字全息图后,如果波面半径 d_i 能够检测,可以利用一次傅里叶变换法(简称 1-FFT)在像空间重建物体的像^[10]。由于重建像的宽度能够根据光波长、重建距离、CCD 像素的宽度及重建像在像平面所占有的像素数确定,当物体的宽度预先设定时,物体重建像宽度与物体宽度之比即放大率 G 。根据(7)式可直接求得矩阵元素 D , 矩阵元素 B 即可由(6)式确定。当 B, D 确定后,利用(8)式及光学矩阵的性质^[1,3]

$$AD - BC = 1, \quad (9)$$

则能确定另外两个矩阵元素 A 和 C 。

下面给出根据点源全息图确定像空间成像距离 d_i 的方法。

3 像空间成像距离 d_i 的确定

若物体是物平面上的点源,到达 CCD 的像光场

$$u_i(x, y) = Q_i \exp \left\{ \frac{jk}{2d_i} [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] + j\varphi_i \right\}. \quad (10)$$

设到达 CCD 的参考光是沿光轴传播的波面半径为 d_r 初始相位为 φ_r 坐标为 $(x_r, y_r, -d_r)$ 的点源发出的球面波:

$$u_r(x, y) = Q_r \exp \left\{ \frac{jk}{2d_r} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] + j\varphi_r \right\}. \quad (11)$$

CCD 记录的全息图可以表示为

$$|u_r(x, y) + u_i(x, y)|^2 = Q_r^2 + Q_i^2 + 2Q_r Q_i \cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_r} \right) [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] + \Phi \right\}, \quad (12)$$

式中 x_1, y_1 是与 $x_i, y_i, d_i, x_r, y_r, d_r$ 相关的实常数, Φ 为与 φ_i, φ_r 相关的实常数。

(12)式表明,干涉图像是以 (x_1, y_1) 为中心的圆形干涉条纹。令 r 为观测点到 (x_1, y_1) 的距离, (12)式可重新写为

$$I(r) = Q_r^2 + Q_i^2 + 2Q_r Q_i \cos \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_r} \right) r^2 + \Phi \right]. \quad (13)$$

不难看出,当(13)式中相角 $\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_r} \right) r^2 + \Phi = 2n\pi$ 时出现干涉亮纹。令 $n = 0, 1, 2, \dots$ 对应的干涉亮纹半径为 r_0, r_1, r_2, \dots , 相邻亮纹对应相角的差为

$$\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_r} \right) (r_{n+1}^2 - r_n^2) = 2\lambda. \quad (14)$$

于是有

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{d_r} + \frac{2\lambda}{(r_{n+1}^2 - r_n^2)}. \quad (15)$$

利用 CCD 记录的点源全息图很容易测量 r_0, r_1, r_2, \dots , 当给定光波长及参考光波面半径 d_r 后,可以用(15)式确定 d_i 。

可以视为像空间中初始相位 φ_i 坐标为 $(x_i, y_i, -d_i)$ 的点源发出的光波

4 实验研究

4.1 实验系统简介

图 2 为在物体与 CCD 间引入一变焦系统的数字全息系统光路图^[11]。实验在波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 的红色激光照明下进行,射入系统的激光经半反透镜 S_1 分解为向下传播的照明物光及水平方向传播的参考光。被全反镜 M_0 反射的照明物光经透镜 F_0 及 L_0 形成剖面尺寸较大的平面波照明物体 O 。球面透镜 L_1, L_2 及 L_3 构成一变焦系统,其中 L_2 是焦距 $f_2 = -100 \text{ mm}$ 的负透镜, L_1 与 L_3 是焦距 $f_1 = f_3 = 300 \text{ mm}$ 正透镜,经 L_3 出射的物光透过分束镜 S 到达 CCD,分束镜的折射率为 1.5。在参考光路中,经反射镜 M_1 反射的激光经透镜 F_1 形成球面波。该球面波经分束镜 S 反射到达 CCD 形成参考光。CCD 像素宽度为 $4.65 \mu\text{m}$, 取样数 $N = 1024$, 即 CCD 面阵宽度 $L = 4.76 \text{ mm}$, 因此 CCD 分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$, 面积为 $4.76 \text{ mm} \times 4.76 \text{ mm}$ 。实验测得到达 CCD 的参考光波面半径为 $d_r = 858.0 \text{ mm}$, 各元件间距离分别为 $d_0 = 60.0 \text{ mm}, d_1 = 210.0 \text{ mm}, d_2 =$

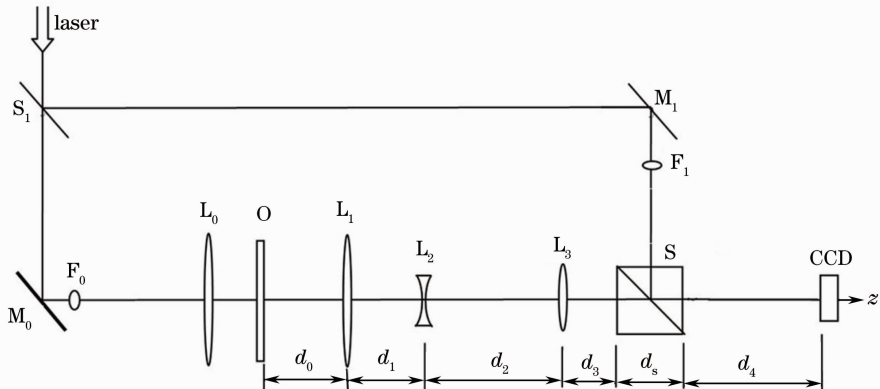


图 2 物体与 CCD 间引入一变焦系统的数字全息光路

Fig. 2 Light path of digital holography using a zoom system between the object and CCD

1112.0 mm, $d_3 = 300.0$ mm, $d_s = 25.4$ mm, $d_4 = 216.0$ mm。

4.2 A, B, C, D 参数的实验测定

实验时首先不放入透镜 L_0 及物体 O , 平移透镜 F_0 , 让 F_0 的右方焦点在物平面, 形成物平面的点光源。由 CCD 记录的点源全息图如图 3(a) 所示。将全息图的干涉条纹进行骨架化处理^[12], 处理后图像

如图 3(b) 所示。

由于 CCD 的像素宽度已知, 不难根据图 3(b) 中像素为单位的亮纹坐标求出干涉环的半径。表 1 给出了分别沿上下左右四个方向测量出的 8 个相邻干涉环半径, 将干涉环半径视为这 4 个方向测量结果的平均值, 根据(15)式可求得 7 个 d_i 的值, 取平均后得 $d_i = 132.6$ mm。

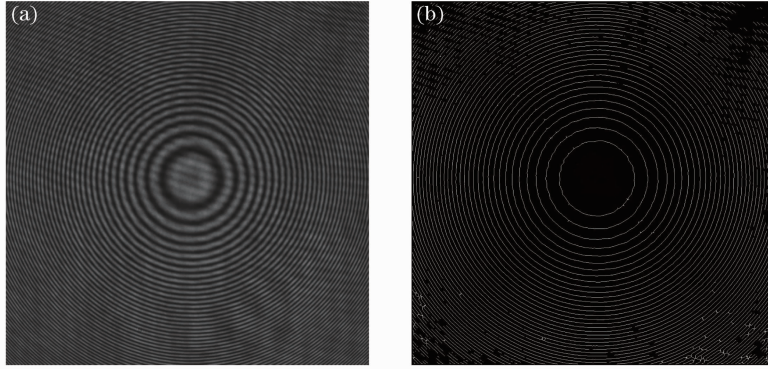


图 3 点源全息图及干涉条纹骨架化处理图像。(a)点源全息图; (b)骨架化处理图像

Fig. 3 Hologram of point source and skeletonized image. (a) Hologram of point source; (b) skeletonized image

表 1 干涉环半径及像空间成像距离 d_i 的实验测量

Table 1 Experimental measurement for radius of interference rings and image distance in image space unit: mm

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	d_i
Above	0.4882	0.6556	0.7951	0.9114	1.009	1.107	1.195	1.274	
Below	0.4882	0.6742	0.7998	0.9207	1.023	1.116	1.200	1.283	
Left	0.4882	0.6649	0.7951	0.9160	1.018	1.107	1.195	1.279	132.6
Right	0.4929	0.6696	0.7998	0.9207	1.018	1.116	1.200	1.279	
Average	0.4893	0.6661	0.7975	0.9172	1.017	1.111	1.197	1.279	

为证实实验结果及进行矩阵元素的检测, 在预先设计的物平面放入一刻有倒置的“光”字透光孔的光阑作为物体 O 。将透镜 F_0 向左平移, 再在 O 和 F_0 间放入透镜 L_0 , 让透过 L_0 的光为平行光照明物体。图 4(a) 及图 4(b) 分别为 CCD 记录的全息图

及利用 1-FFT 方法重建的物平面图像(为便于后续检测, 重建时使用了全息图局域平均法消除零级衍射干扰)。重建物平面上已经清楚地看出正立的“光”字透光孔的重建像, 说明点源全息图测量的成像距离 d_i 是可靠的。

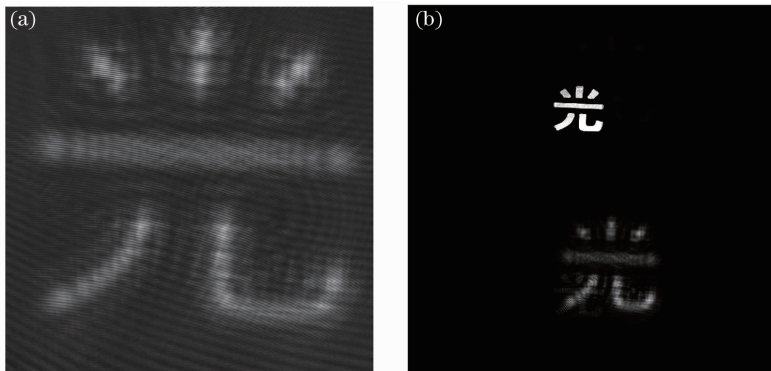


图 4 CCD 记录的全息图及利用 1-FFT 方法重建的物平面图像。(a)全息图; (b) 1-FFT 重建平面

Fig. 4 Hologram recorded with CCD and 1-FFT reconstructed image. (a) Hologram; (b) 1-FFT reconstructed image

根据图 4(b)测得重建像宽度为 138 pixel, 由于 1-FFT 重建像平面的宽度为 $L_i = \lambda d_i N / L = 18.05 \text{ mm}^{[9]}$, 即像的物理宽度为 $138/1024 \times 18.05 \text{ mm} = 2.43 \text{ mm}$ 。由于“光”字透光孔的宽度准确检测值为 22.0 mm, 物和像的方向相反让放大率 $G = -2.43/22.0 = -0.110$ 。由(7)式得 $D = 1/G = -9.05$; 利用(6)式得 $B = D d_i = -1200 \text{ mm}$ 。将(8)式代入(9)式有 $GD + d_i CD - BC = 1$, 即 $C =$

$$\frac{1-GD}{d_i D - B} = \frac{1-1}{d_i D - B} = 0。再 利 用 (9) 式 得 A = 1/D = -0.110。$$

综上所述, 实验检测的光学矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.110 & -1200 \\ 0 & -9.05 \end{bmatrix}。 \quad (16)$$

为验证上述结果, 按照矩阵光学理论^[1], 图 2 中物平面 O 到 CCD 窗口平面的光学系统的光学矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_s/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (17)$$

相关参数代入(17)式求得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.110 & -1195 \\ 0.00 & -9.10 \end{bmatrix}。 \quad (18)$$

与(16)式比较可知, 两组参数描述的光学系统性质基本一致。因此, 研究并有效控制实验检测误差, 利用实验检测的 A, B, C, D 参数研究光学系统是可行的。

应该指出, (17)式计算结果仍然存在误差, 不能用(17)式的计算结果作为判断本文检测方法可行性的标准。误差来源于各元件光学参数误差及元件位置的测量误差。由于傍轴光学系统的矩阵描述只是一阶光学近似^[1,3], 而本实验检测中没有考虑透镜的厚度, 所使用的透镜焦距也只是名义的焦距, 各光学元件的主点位置无法确定, 测量的各元件之间的距离只是物理间隔, 不代表主点之间的距离, 用这样的距离计算的结果必然与实际检测结果不同。当组成系统的元件较多时, 误差因累积而增大。因此, 通过实验确定系统的光学矩阵参数具有实际意义。

5 结 论

本文提出的检测方法表明, 对于一个任意给定的轴对称傍轴光学系统, 可以不必明确知道组成光学系统的元件个数、每一元件的光学参数及各元件的配置位置, 通过数字全息实验能够确定系统的矩阵元素。检测方法对矩阵光学的实际应用以及数字全息应用研究中物光通过光学系统到达 CCD 的波前重建提供了一定的参考。

参 考 文 献

- 1 Wang Shaomin, Zhao Daomu. Principles of Matrix Optics [M]. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1994
- 2 王绍民, 赵道木. 矩阵光学原理[M]. 杭州: 杭州大学出版社, 1994

- 2 S. A. Collins. Laser-system diffraction integral written in terms of matrioptics [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**: 1168
- 3 Lü Baida, Laser Optics — Beam Characterization, Propagation and Transformation, Resonator Technology and Physics (3rd ed) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. 33~49
- 4 吕百达. 激光光学——光束描述、传输变换与光腔技术物理: 第三版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 33~49
- 5 Wang Huaying, Liu Jingbo, Wang Dayong *et al.*. Autofocus for numerical reconstruction in digital holographic microscopy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(s2): 343~347
- 6 王华英, 刘景波, 王大勇等. 显微数字全息数值再现中的自动聚焦[J]. *光学学报*, 2008, **28**(s2): 343~347
- 7 Hu Cuiying, Zhong Jin'gang, Gao Yingjun *et al.*. Selection of filter window and correction of tilt aberration in the phase reconstruction of microscopic digital holography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 3317~3322
- 8 胡翠英, 钟金钢, 高应俊等. 显微数字全息相位重构的窗口选取和倾斜校正[J]. *光学学报*, 2009, **29**(12): 3317~3322
- 9 Pan Weiqing, Zhu Yongjian, Lang Haitao. Phase-contrast imaging technology with digital holographic microscope based system calibration [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1812~1820
- 10 潘卫清, 朱勇建, 郎海涛. 基于系统标定的相衬显微数字全息方法[J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1812~1820
- 11 Li Junchang, Chen Zhongyu, Zhao Shuai *et al.*. Anti-calculation and its application of Collins formula in wavefront reconstruction [J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(11): 1489~1494
- 12 李俊昌, 陈仲裕, 赵帅等. 柯林斯公式的逆运算及其在波面重构中的应用[J]. *中国激光*, 2005, **32**(11): 1489~1494
- 13 J. C. Li, C. G. Li. Algorithm study of Collins formula and inverse Collins formula [J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(4): 97~102
- 14 J. W. Goodman. An Introduction of Fourier Optics [M]. Qin Kecheng Transl. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006. 60
- 15 J. W. Goodman. 傅里叶光学导论: 第三版 [M] 秦克诚译. 北京: 电子工业出版社, 2006. 60
- 16 P. Picart, J. Leval. General theoretical formulation of image formation in digital Fresnel holography [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2008, **25**(7): 1744~1761
- 17 Li Junchang, Fan Zebin, Peng Zujie. Application research on digital holography zoom system [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(6): 1420~1423
- 18 李俊昌, 樊则宾, 彭祖杰. 数字全息变焦系统的研究及应用[J]. *光子学报*, 2008, **37**(6): 1420~1423
- 19 He Xinhua, Zhou Yuanyuan, Wang Jiyang *et al.*. Matlab7. x Image Processing [M]. Beijing: People's Posts and Telecommunications Press, 2006. 190
- 20 贺新华, 周媛媛, 王继阳等. Matlab7. x 图像处理 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2006. 190