

施密特棱镜 Jones 矩阵元对偏振像差的影响

卢进军 朱维兵* 孙雪平

(西安工业大学光电工程学院, 陕西 西安 710032)

摘要 为研究施密特棱镜特性参数与偏振像差之间的关系,通过对施密特棱镜偏振和衍射双重效应得到的衍射积分的理论分析,确定了决定施密特棱镜偏振像差大小的 4 个关键因子,得到了施密特棱镜偏振像差校正所需要满足的条件。实验采用检测施密特棱镜 Jones 矩阵的方法,分别检测分析了 3 个不同施密特棱镜的 Jones 矩阵,明确了施密特棱镜偏振像差完全消除的条件是其 Jones 矩阵元 $b=0$ 。实验结果表明,理论分析结论是正确的。

关键词 几何光学;偏振像差;施密特棱镜;琼斯矩阵;艾里斑分裂

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.0208001

Effect of Jones Matrix Elements on the Polarization Aberrations in Schmidt Prism

Lu Jinjun Zhu Weibing Sun Xueping

(School of Optoelectronics, Xi'an Technological University, Xi'an, Shaanxi 710032, China)

Abstract To study the relationship between the characteristic parameters of the Schmidt prism and the polarization aberration, the diffraction integrals obtained from the polarization and the diffraction effect of the Schmidt prism are analyzed. The four key parameters that affect the polarization aberration are determined. The conditions required to the calibration of the Schmidt prism polarization aberration are also obtained. In the experiment, Jones matrix method of Schmidt prism is adopted to measure the three different Jones matrixes. The polarization aberration of Schmidt prism is completely eliminated under the condition that $b=0$. Experimental results show that the described theoretical analyses are correct.

Key words geometric optics; polarization aberration; Schmidt prism; Jones matrix; Airy-disk division

OCIS codes 120.4640; 080.1010; 230.5480

1 引言

最近几年对偏振像差采用多种方法——Mueller 矩阵法、Jones 矩阵法和 Pauli 矩阵法的研究结果表明,偏振像差的概念和意义正在发生着实质性的变化。偏振像差只在偏振光成像、非垂直入射情况下存在的片面认识^[1],正由一个全新的研究结论取代,偏振像差是包含几何像差、波像差在内的总像差的新理念已经逐渐明朗^[2,3]。对施密特(Schmidt)棱镜在偏振和衍射双重效应影响下的传光特性的研究,得到了偏振效应直接导致艾里斑中心分裂是破坏施密特棱镜成像质量的主要成因^[4]。

这些重要的研究结果,正在引来更多学者的研究兴趣。

开展了对施密特棱镜偏振像差特性更深层次的研究——施密特棱镜偏振像差关键因子分析,研究结果为施密特棱镜偏振像差矫正和检测提供了一定的参考。

2 关键因子分析

在此前的研究中采用数字积分分析方法,得到了无膜层施密特棱镜在偏振和衍射双重效应影响下的传光特性^[4]。为使研究结论既适用于无膜层棱

收稿日期: 2012-09-03; 收到修改稿日期: 2012-10-22

作者简介: 卢进军(1957—),男,本科,副教授,主要从事物理光学、薄膜光学方面的教学和科研等方面的研究。

E-mail: 495067253@qq.com

* 通信联系人。E-mail: 675617532@qq.com

镜,也能够适用于有膜层棱镜,界面反射系数,特别是反射相移不再设为定值,而是作为变量。

2.1 两路径 Jones 矩阵的关系

图 1 为 Schmidt 棱镜,光路图。设 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ 分别为第一、二、三、四反射面的反射相移,其中第二、三反射面是两个屋脊面; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分别为第一、二、三反射面坐标系向下一反射面坐标系进行坐标转换的旋转角^[5]。按照光束在施密特棱镜中的两条传播路径,可以写出两路径的 Jones 矩阵分别为

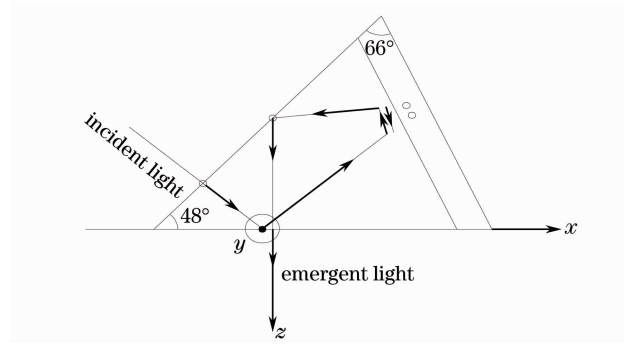


图 1 施密特棱镜光路图

Fig. 1 Path of propagation in Schmidt prism

$$J_1 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_4}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_4}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_3}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_2}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_2}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_1}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} j'_{11} & j'_{12} \\ j'_{21} & j'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_4}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_4}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta'_3 & -\sin\theta'_3 \\ \sin\theta'_3 & \cos\theta'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_3}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta'_2 & -\sin\theta'_2 \\ \sin\theta'_2 & \cos\theta'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_2}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_2}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta'_1 & -\sin\theta'_1 \\ \sin\theta'_1 & \cos\theta'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta_1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\delta_1}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

分析两条路径的传播特性,可以得知两条路径的坐标旋转角之间存在关系: $\theta'_1 = \theta_1, \theta'_2 = -\theta_2, \theta'_3 = -\theta_3$,由此可得 $\begin{bmatrix} j'_{11} & j'_{12} \\ j'_{21} & j'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}$ 。继续分析可以得到 $j_{11} = (j_{22})^*, j_{12} = -(j_{21})^*$ 。据此,两路径的 Jones 矩阵可以化简成

$$J_1 = \begin{bmatrix} a\exp(i\Delta_1) & b\exp(i\Delta_2) \\ -b\exp(-i\Delta_2) & a\exp(-i\Delta_1) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} a\exp(i\Delta_1) & -b\exp(i\Delta_2) \\ b\exp(-i\Delta_2) & a\exp(-i\Delta_1) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中

$$a = \sqrt{\text{Re}^2 j_{11} + \text{Im}^2 j_{11}}, \quad \Delta_1 = \arctan\left(\frac{\text{Im} j_{11}}{\text{Re} j_{11}}\right), \quad (5)$$

$$\text{Re} j_{11} = \cos\theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_3) \cos\left(\frac{\delta_2 + \delta_3}{2}\right) - \sin\theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos\left(\frac{\delta_3 - \delta_2}{2}\right), \quad (6)$$

$$\text{Im} j_{11} = \sin\left(\frac{\delta_2 + \delta_3}{2}\right) \cos(\theta_1 - \theta_3) \cos\theta_2 - \sin\left(\frac{\delta_3 - \delta_2}{2}\right) \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin\theta_2, \quad (7)$$

$$b = \sqrt{\text{Re}^2 j_{12} + \text{Im}^2 j_{12}}, \quad \Delta_2 = \arctan\left(\frac{\text{Im} j_{12}}{\text{Re} j_{12}}\right), \quad (8)$$

$$\text{Re} j_{12} = \cos\theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos\left(\frac{\delta_2 + \delta_3}{2}\right) - \sin\theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_3) \cos\left(\frac{\delta_3 - \delta_2}{2}\right), \quad (9)$$

$$\text{Im } j_{12} = \sin\left(\frac{\delta_2 + \delta_3}{2}\right) \cos \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_3) - \sin\left(\frac{\delta_3 - \delta_2}{2}\right) \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_3). \quad (10)$$

(3)、(4)两式的结果表明,两路径的两个 Jones 矩阵不相等,但是差异仅仅是副对角线元素位相相反;两个矩阵的 16 个元素中,只有 4 个独立元素 a, b, Δ_1, Δ_2 。

2.2 影响衍射光强分布的 Jones 矩阵元

按照衍射理论,光波经过施密特棱镜两个路径的传播,在距棱镜距离 z 的像方 xoy 平面处得到的光场分布是两个路径光波相干叠加的结果^[6],即(忽略平行于屋脊的 x 轴方向的光场变化,只讨论 y 轴方向的光场变化)^[4]

$$\mathbf{E}(y) = \begin{bmatrix} E_p \\ E_s \end{bmatrix} = \frac{d}{i\lambda z} \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{y^2}{2z}\right) \text{sinc}\left(\frac{kyd}{2z}\right) \left[\mathbf{E}_1 \exp\left(i \frac{kyd}{2z}\right) + \mathbf{E}_2 \exp\left(-i \frac{kyd}{2z}\right) \right], \quad (11)$$

式中 E_p, E_s 分别为平行和垂直于入射面的电场分布, λ 为波长, k 为空间频率, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 分别为两路经过棱镜两路径后出射的光波函数, d 是照射在一个屋脊面上光波沿 y 轴方向的几何尺寸。

假设进入棱镜的平行光束是方位角为 θ 的线偏振单色光则

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{E}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} a \exp(i\Delta_1) & b \exp(i\Delta_2) \\ -b \exp(-i\Delta_2) & a \exp(-i\Delta_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \exp(i\Delta_1) \cos \theta + b \exp(i\Delta_2) \sin \theta \\ -b \exp(-i\Delta_2) \cos \theta + a \exp(-i\Delta_1) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{E}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} a \exp(i\Delta_1) & -b \exp(i\Delta_2) \\ b \exp(-i\Delta_2) & a \exp(-i\Delta_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \exp(i\Delta_1) \cos \theta - b \exp(i\Delta_2) \sin \theta \\ b \exp(-i\Delta_2) \cos \theta + a \exp(-i\Delta_1) \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将(12)、(13)式同时代入(11)中可得

$$E_p = d \left(\frac{2}{i\lambda z}\right) \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{y^2}{2z}\right) \text{sinc}\left(\frac{kyd}{2z}\right) \left\{ a \exp(i\Delta_1) \left[\exp\left(i \frac{kyd}{2z}\right) + \exp\left(-i \frac{kyd}{2z}\right) \right] \cos \theta + b \exp(i\Delta_2) \left[\exp\left(i \frac{kyd}{2z}\right) - \exp\left(-i \frac{kyd}{2z}\right) \right] \sin \theta \right\}, \quad (14)$$

$$E_s = d \left(\frac{2}{i\lambda z}\right) \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{y^2}{2z}\right) \text{sinc}\left(\frac{kyd}{2z}\right) \left\{ -b \exp(-i\Delta_2) \left[\exp\left(i \frac{kyd}{2z}\right) - \exp\left(-i \frac{kyd}{2z}\right) \right] \cos \theta + a \exp(-i\Delta_1) \left[\exp\left(i \frac{kyd}{2z}\right) + \exp\left(-i \frac{kyd}{2z}\right) \right] \sin \theta \right\}, \quad (15)$$

$$I_p = 4 \left(\frac{2}{\lambda z}\right)^2 d^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \left[a^2 \cos^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \cos^2 \theta + b^2 \sin^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} ab \sin 2\theta \sin\left(\frac{kyd}{z}\right) \sin(\Delta_1 - \Delta_2) \right], \quad (16)$$

$$I_s = 4 \left(\frac{2}{\lambda z}\right)^2 d^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \left[a^2 \cos^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \sin^2 \theta + b^2 \sin^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \cos^2 \theta + \frac{1}{2} ab \sin 2\theta \sin\left(\frac{kyd}{z}\right) \sin(\Delta_1 - \Delta_2) \right]. \quad (17)$$

则光强可表示为

$$I = I_p + I_s = 4 \left(\frac{2}{\lambda z}\right)^2 d^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) \left[a^2 \cos^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) + b^2 \sin^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) + ab \sin 2\theta \sin\left(\frac{kyd}{z}\right) \sin(\Delta_1 - \Delta_2) \right] = 4 \left(\frac{2}{\lambda z}\right)^2 d^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) f(y). \quad (18)$$

(18)式给出的像面光强分布表明:

- 1) 沿 y 轴方向光强分布是以 $y = 0$ 为轴的对称周期性分布,周期为 $\frac{z\lambda}{2d}$;
- 2) 对应于像面中心的零级光强为

$$I = 4 \left(\frac{2}{\lambda z}\right)^2 d^2 \left[a^2 \cos^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) + b^2 \sin^2\left(\frac{kyd}{2z}\right) + ab \sin 2\theta \sin\left(\frac{kyd}{z}\right) \sin(\Delta_1 - \Delta_2) \right] = 4 \left(\frac{2}{\lambda z}\right)^2 d^2 f(y). \quad (19)$$

光强分布完全决定于 $f(y)$, 影响光强分布的施密特棱镜因子有 $a, b, \Delta_1 - \Delta_2$ 。下面通过 $f(y)$ 分析这些因子对像面中心光强分布的影响。

$$\text{由 } f'(y)|_{y=0} = ab \frac{kd}{z} \sin 2\theta \sin(\Delta_1 - \Delta_2) = 0,$$

可知 $\Delta_1 - \Delta_2 = m\pi$ (m 为任意整数) 时, 像面中心光强将取得极值。

当 $\Delta_1 - \Delta_2 = m\pi$ 时, 由 $f''(y)|_{y=0} = \frac{2k^2 d^2}{z^2} (b^2 - a^2)$ 分析可知:

1) 如果 $b^2 < a^2$, 那么 $f''(0) < 0$, 则 $f(0)$ 取得极大值, 衍射场中心光强为极大值;

2) 如果 $a^2 < b^2$, 那么 $f''(0) > 0$, 则 $f(0)$ 取得极小值, 衍射场中心光强为极小值;

3) 如果 $b = 0$, 那么 $f''(0) < 0$, 则 $f(0)$ 取得极大值, 衍射场中心光强为极大值。

特别地, 当 $b = 0$ 时, 由 (19) 式可知 $f(y) = a^2 \cos^2\left(\frac{kyd}{2z}\right)$, $f(y)$ 是与 $\Delta_1 - \Delta_2$ 无关的余弦平方函数, $f(0)$ 为极大值, $\Delta_1 - \Delta_2 = m\pi$ 的条件已经没有必

要。所以, 当 $b = 0$ 时, 衍射场中心光强与 $\Delta_1 - \Delta_2$ 值无关, 永远是极大值。显然, $b = 0$ 是最理想的消除施密特棱镜偏振像差的条件。

因此, 决定施密特棱镜衍射场中心光强大小的因子是其 Jones 矩阵元中的 $a, b, \Delta_1 - \Delta_2$ 。

3 实验检测结果

为了验证上述理论分析的正确性, 使用 He-Ne 激光束, 分别进行了 3 个不同施密特棱镜 Jones 矩阵 4 个元素和衍射图的检测实验。图 2 为实验测量的 3 个棱镜样品的零件图。棱镜材料是 K9 玻璃。样品 1 是无膜层棱镜, 样品 2 和样品 3 的屋脊面镀有两个不同膜系结构的全介质膜堆。样品 2 的膜堆是 TiO_2 和 SiO_2 组成三层介质膜堆, 样品 3 的膜堆是由 ZrO_2 和 MgF_2 组成的四层介质膜堆。屋脊面镀制介质膜堆的目的是实现 $b = 0$ 。可以证明, 当屋脊棱镜的材料和结构角参数确定以后, 单个屋脊面上 p 分量反射相移与 s 分量反射相移之差等于 $\pi/2$ 是实现 $b = 0$ 的途径之一。

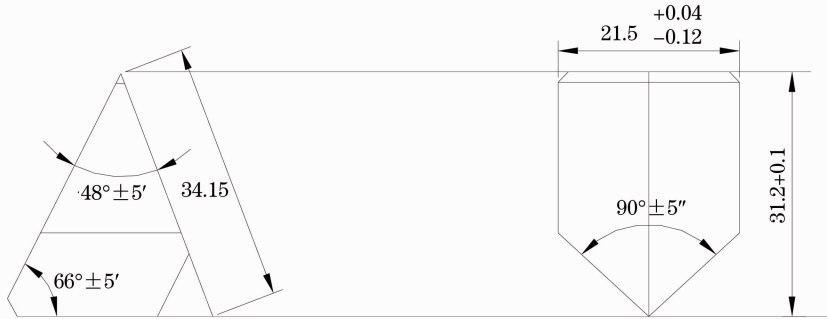


图 2 实验测量使用的棱镜零件图

Fig. 2 Prism parts used in experimental measurement

按照文献[7]中介绍的 Jones 矩阵元的实验检测方法对样品 1, 2, 3 进行的检测结果为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \begin{bmatrix} 0.605 \exp(i29^\circ) & -0.796 \\ 0.796 & 0.605 \exp(-i29^\circ) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0.759 \exp(-i110^\circ) & -0.404 \exp(-i10^\circ) \\ 0.426 \exp(i10^\circ) & 0.740 \exp(i110^\circ) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_3 &= \begin{bmatrix} 0.573 \exp(-i74^\circ) & 0.006 \\ 0.006 & 0.562 \exp(i74^\circ) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

上述矩阵中的 $a, b, \Delta_1 - \Delta_2$ 值是采用 9 次实验数据平均得到的结果, 其中 a, b 值取了小数点后三位, $\Delta_1 - \Delta_2$ 值只保留到度, 舍去了分、秒值。

实验拍得光束经过 3 个施密特棱镜出射的衍射光强如图 3 所示。实验结果表明, 样品 1: $\Delta_1 - \Delta_2 = 150.93^\circ \neq m\pi, a^2 < b^2$, 其衍射图中央出现光

强极小, 原本为圆形成高斯分布的激光光斑完全分裂成了两瓣; 样品 2: $\Delta_1 - \Delta_2 = 80^\circ \neq m\pi, b^2 < a^2$, 衍射图中央出现光强极小, 但此图中央光强要比样品 1 的大; 样品 3: $b \approx 0$, 衍射图中央是光强极大值, 而且激光光斑完全呈圆形。

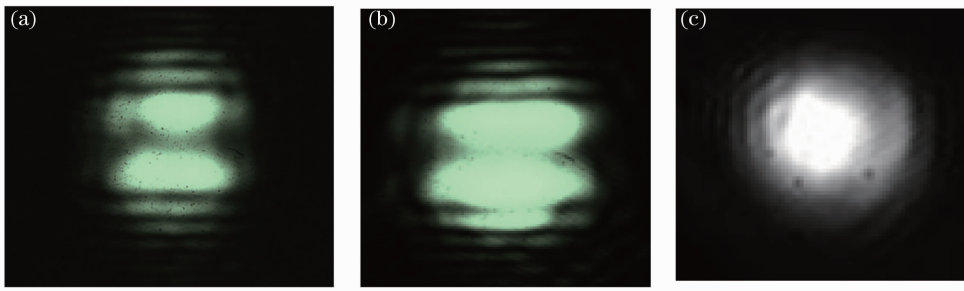


图 3 三个样品的衍射光斑。(a)样品 1；(b)样品 2；(c)样品 3

Fig. 3 Diffraction spot of the three samples. (a) Sample 1; (b) sample 2; (c) sample 3

4 结 论

通过对施密特棱镜两光路传输矩阵的分析,发现在两个路径的两个传输矩阵的 8 个矩阵元素中,只有 2 个矩阵元的 4 个因子 a, b, Δ_1, Δ_2 是独立的;两路径的两个 Jones 矩阵不相等,但是差异仅仅是副对角线元素位相反。

将使用两个路径的 Jones 矩阵得到的出射光波函数代入衍射积分,得到的相干叠加结果表明,在垂直于出射光传播方向的平面上,沿垂直于屋脊方向的光强分布是中心对称周期分布;影响光强分布的棱镜因子是其 Jones 矩阵 4 个独立因子中 $a, b, \Delta_1 - \Delta_2$ 的相对大小;衍射场中心光强取得极大值的条件是 $\Delta_1 - \Delta_2 = m\pi$,同时 $b^2 < a^2$; $b=0$ 是最理想的消除施密特棱镜偏振像差的条件。

3 个分别为无膜层和有不同膜层的施密特棱镜 Jones 矩阵和衍射图的检测,取得了与理论分析一致的结果。理论和实验一致表明,施密特棱镜 Jones 矩阵中 $a, b, \Delta_1 - \Delta_2$ 的大小决定了衍射场中央光强的分布,针对施密特棱镜偏振像差的矫正和检测工作,将主要是调整和检测 $a, b, \Delta_1 - \Delta_2$ 的大小。

参 考 文 献

- Zhou Yuan, Li Yanqiu, Liu Guangcan. Study on pellicle optimization and polarization aberration induced by pellicle in hyper numerical aperture lithography[J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(4): 0407001
- 周 远, 李艳秋, 刘光灿. 超大数值孔径光刻中掩模保护膜优化及偏振像差研究[J]. *中国激光*, 2011, **38**(4): 0407001
- N. Yamamoto, J. Kye, H. J. Levinson. Polarization aberration analysis using Pauli-Zernike representation[C]. *SPIE*, 2007, **6520**: 65200Y
- Pan Baozhu, Cheng Haobo, Wen Yongfu *et al.*. Establishment of an equation of schmidt corrector plate with large aperture based on wavefront aberration functions[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(2): 0222001
- 潘宝珠, 程灏波, 文永富 等. 基于波像差函数建立大口径施密特校正板方程[J]. *光学学报*, 2012, **32**(2): 0222001
- Lu Jinjun, Sun Xueping, Li Xiangyang. The characters of Schmidt prism under the effect of polarization and diffraction of ridge[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(8): 949~955
- 卢进军, 孙雪平, 李向阳. 偏振和衍射双重效应影响的 Schmidt 棱镜特性[J]. *光子学报*, 2012, **41**(8): 949~955
- J. Liu, R. M. A. Azzam. Polarization properties of corner-cube retroreflectors: theory and experiment[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(7): 1553~1559
- Nie Hui, Weng Xingtao, Li Song. The far-field diffractive characteristics of cube-corner prism[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(12): 1470~1474
- 聂 辉, 翁兴涛, 李 松. 角锥棱镜的远场衍射特性[J]. *光学学报*, 2003, **23**(12): 1470~1474
- Zhu Qingchun. Introduction to Matrix Optics[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Documentation Press, 1991. 208~217
- 竺庆春. 矩阵光学导论[M]. 上海科技文献出版社, 1991. 208~217

栏目编辑: 何卓铭