

原子与双模腔相互作用系统中的纠缠特性

卢道明 邱昌东

(武夷学院机电工程学院, 福建 武夷山 354300)

摘要 研究二能级原子与双模腔场相互作用系统, 考虑双模间存在耦合的情况。采用 Negativity 熵度量两体系统间的纠缠, 具体计算了场模间的耦合系数取不同值时系统中原子熵、原子与场模间纠缠和两场模间纠缠的演化。讨论了场模间的耦合强度变化对纠缠特性的影响。结果表明: 原子与场模间纠缠和两场模间纠缠均呈现出周期性演化规律, 并且其演化周期随场模间耦合的增强而减小; 原子和场模间的纠缠与模间耦合系数之间存在非线性关系, 但两场模间纠缠随模间耦合系数增大而减弱。

关键词 量子光学; 二能级原子; 双模腔; 量子纠缠

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.1227003

Entanglement Properties in the System of Atom Interacting with Two-Mode Cavity

Lu Daoming Qiu Changdong

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

Abstract System of a two-level atom interacting with two-mode cavity is considered in which two modes are coupled. Negativity is used to quantify the degree of entanglement. By means of numerical calculations, the evolution of the entanglement between atom and field or between two modes is investigated. The influence of coupling coefficient between two modes on the entanglement is discussed. The results show that the entanglement between atom and field or that between two modes displays periodic evolution, and its period is decreased with the increase of coupling coefficient between two modes. The entanglement between atom and field has a nonlinear relation with the increase of coupling coefficient between two modes. The entanglement between two modes is weakened with the increase of coupling coefficient between two modes.

Key words quantum optics; two-level atom; two-mode cavity; quantum entanglement

OCIS codes 270.1670; 270.5580; 020.1670; 020.5580

1 引 言

腔量子电动力学(QED)的优点在于原子适合于存储信息,而光子适合于传输信息,它为各种量子态制备和操纵提供了一个非常理想的物理实验平台。最近二十多年来,腔 QED 技术越来越成熟,在实验上已成功实现了一腔场的薛定谔猫态的叠加态、两原子的 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 纠缠态和验证了互补原理等^[1-5], 理论上也给出了许多利用该系统进行量子信息处理和态制备的建议^[6-12]。例如, Zou 等^[6]提出了利用腔 QED 产生

两三能级原子纠缠态的理论方案, Zheng 等^[7]提出了产生多原子纠缠态的方案, Yang 等^[8]建议了一种在腔 QED 中制备非经典态的新方案。在已报道的研究中, 人们主要考虑的是单模腔的情况, 对双模腔的情况也有一些研究报道^[13-18]。例如, Peng 等^[13]建议了一种利用双模耦合腔产生原子纠缠态的方案, Zheng 等^[14]提出了利用原子-双模腔-光纤系统实现 N 比特 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态的方案, Singh 等^[15]研究了两原子与双模量子化光场强度依赖耦合情况下系统的动力学, Wu 等^[16]

收稿日期: 2013-06-27; **收到修改稿日期**: 2013-07-25

基金项目: 福建省自然科学基金(2011J01018)、福建省教育厅 A 类科技项目(JA12327)

作者简介: 卢道明(1963—), 男, 教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

讨论了三能级 Ξ 型原子与双模场相互作用系统中的非经典性质。最近,微型环腔引起人们的极大兴趣^[19-21]。Wang 等^[19]提出了利用该系统产生单光子纠缠态或原子与单光子的纠缠态的方案。但对双模腔的研究中,少见考虑双模之间存在耦合的研究报道。另一方面,纠缠是量子系统区别于经典系统的特征之一,它描述两个或多个子系统间的关联,在量子信息处理和量子计算等领域中有潜在的应用。至今,已有不少关于原子与光场相互作用系统中量子纠缠的研究报道^[22-23]。针对这一情况,开展了双模腔场之间存在耦合的情况研究,讨论了双模间的耦合强度变化对两体纠缠演化的影响。

2 理论模型和系统态矢演化

研究一个二能级原子和双模腔构成的系统。假定腔中两个模的频率相同,原子与场发生共振相互作用,并且两个场模之间存在耦合的情况,在旋波近似下,原子与腔场的相互作用哈密顿量为

$$H_I = g_1(as^+ + a^+s^-) + g_2(bs^+ + b^+s^-) + J(ab^+ + a^+b), \quad (1)$$

式中用 a 和 b (a^+ 和 b^+) 分别表示两个模的湮没(产生)算符, $s^+ = |e\rangle\langle g|$ 和 $s^- = |g\rangle\langle e|$, g_i ($i = 1, 2$) 表示原子与第 i 模的耦合系数, J 为两场模间的耦合系数。为简单起见,设 $g_1 = g_2 = g$ 。定义 $\hat{N} = |e\rangle\langle e| + a^+a + b^+b$, 表示系统的总激发数算符,因为 $[\hat{N}, H_I] = 0$, 所以系统的总激发数是守恒量。 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 表示原子的激发态和基态。

考虑整个系统只有一个激发子的情况,那么,系统的态矢将处于基矢 $|\varphi_1\rangle = |e00\rangle$, $|\varphi_2\rangle = |g10\rangle$, $|\varphi_3\rangle = |g01\rangle$ 构成的子空间中。在态 $|fmn\rangle$ 中第 1 至 3 位分别表示原子、模 a 和模 b 的状态。 t 时刻系统的态矢可表示为

$$|\varphi(t)\rangle = A(t)|\varphi_1\rangle + B(t)|\varphi_2\rangle + C(t)|\varphi_3\rangle. \quad (2)$$

取 $\hbar = 1$, 态矢演化遵从薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle. \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式,则 A, B, C 满足

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial t} &= gB + gC, \\ i \frac{\partial B}{\partial t} &= gA + JC, \\ i \frac{\partial C}{\partial t} &= gA + JB. \end{aligned} \quad (4)$$

若系统初态处于 $|\varphi_1\rangle$ 态,通过解(4)式得到

$$\begin{aligned} A &= \exp\left(-\frac{i}{2}Jt\right) \left[\cos(\alpha t) + \frac{iJ}{2\alpha} \sin(\alpha t) \right], \\ B = C &= -\frac{ig}{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{2}Jt\right) \sin(\alpha t), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\alpha = \frac{\sqrt{J^2 + 8g^2}}{2}$ 。

3 原子与场模间的纠缠

对于两体纠缠已有成熟的度量方式,比例可用共生纠缠度和 Negativity 熵来度量^[24-25]。这里采用 Negativity 熵来度量两体纠缠,即对于两体系统,用 ρ^T 表示系统密度矩阵 ρ 的部分转置矩阵,那么, Negativity 熵定义为

$$N = -2 \sum_i \lambda_i, \quad (6)$$

式中 λ_i 为 ρ^T 的负本征值, Negativity 熵的取值范围是 $0 \leq N \leq 1$ 。

利用(2)式,对场模 b 的态求迹,在基矢 $|e\rangle, |1\rangle_a, |e\rangle|0\rangle_a, |g\rangle|1\rangle_a, |g\rangle|0\rangle_a$ 构成的子空间中(其中态 $|n\rangle_a$ 表示场模 a 的状态),得到原子和场模 a 构成的两体系统的密度矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A|^2 & AB^* & 0 \\ 0 & A^*B & |B|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

相应的 ρ^T 为

$$\rho^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & AB^* \\ 0 & |A|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |B|^2 & 0 \\ A^*B & 0 & 0 & |C|^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

通过计算(8)式表示的矩阵的负本征值,可得到原子和场模 a 间的纠缠量为

$$N_1 = \sqrt{|C|^4 + 4|AB|^2} - |C|^2. \quad (9)$$

为了讨论两场模之间的耦合系数 J 对纠缠的影响,在图 1 中画出了 J 取不同值时 N_1 随规范时间 gt 的演化。图 1 中演化曲线表明: N_1 呈现出周期性演化的规律,并且其演化周期随耦合系数 J 的增大而减小。由(5)式可见 $|A|^2, |B|^2$ 和 $|C|^2$ 是周期性演化的函数,并且它们有相同的演化周期 $T = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{J^2 + 8g^2}}$, 它随 J 的增大而减小。从纠缠量 N_1 与 $|A|^2, |B|^2$ 和 $|C|^2$ 的关系式(9)式可知, N_1 的演化的周期也应是 T , 因此 N_1 的演化周期也随 J 的增大而减小。另一方面, N_1 的演化呈现双峰结构,其平

均值随 J 的增大呈现先增大而后减小的过程。例如 $J=0.2g$ 时, $\bar{N}_1 = 0.30414$; $J=0.5g$ 时, $\bar{N}_1 = 0.31370$; $J=2g$ 时, $\bar{N}_1 = 0.40267$; 而 $J=4g$ 时,

$\bar{N}_1 = 0.38687$ 。这表明原子和场模间的纠缠与耦合系数 J 之间存在非线性关系。另外, 因为 $B=C$, 所以原子和场模 b 之间的纠缠与 N_1 一致。

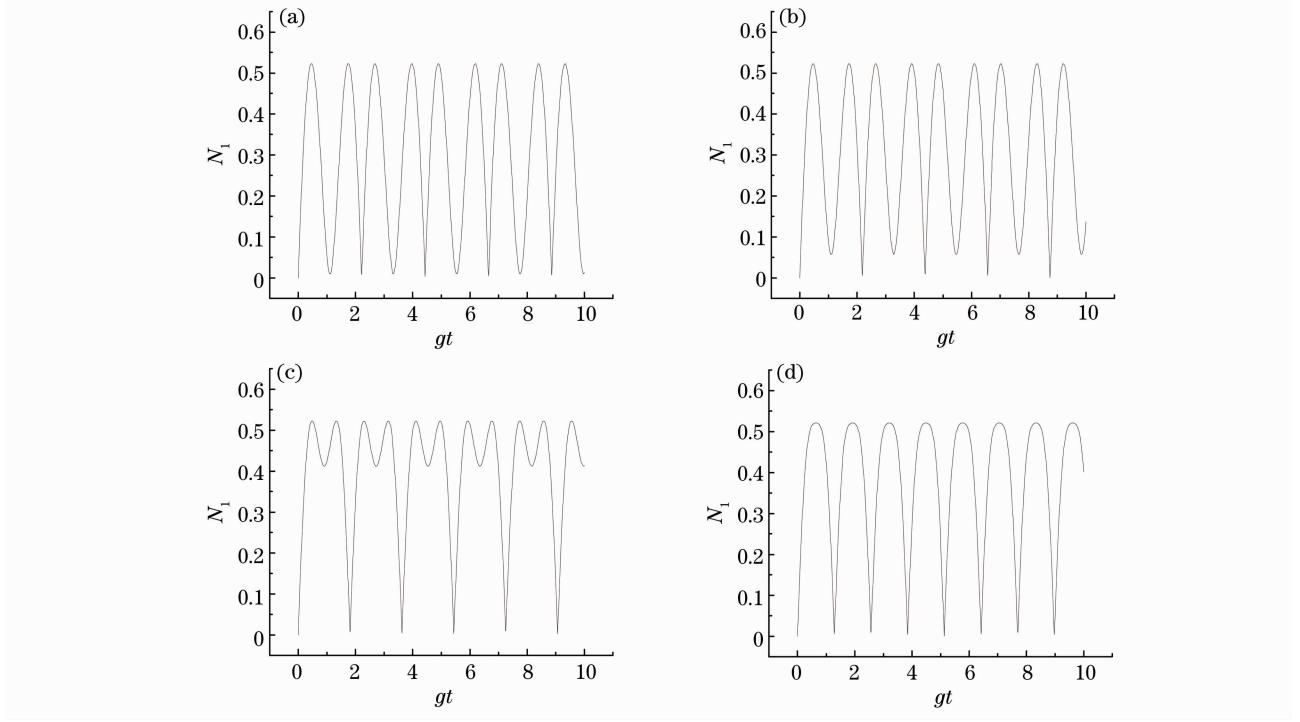


图1 原子与场模 a 间纠缠量 N_1 随规范时间 gt 的演化。(a) $J=0.2g$; (b) $J=0.5g$; (c) $J=2g$; (d) $J=4g$
Fig. 1 Atom-field entanglement N_1 versus normalized time gt . (a) $J=0.2g$; (b) $J=0.5g$; (c) $J=2g$; (d) $J=4g$

4 两场模间的纠缠

两场模间的纠缠同样采用 Negativity 熵来度量。利用(2)式, 基矢 $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ 构成的子空间中, 模 a, b 构成的两体系统密度矩阵为

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |B|^2 & BC^* & 0 \\ 0 & CB^* & |C|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A|^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

相应的 ρ_2^T 为

$$\rho_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & BC^* \\ 0 & |B|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |C|^2 & 0 \\ B^*C & 0 & 0 & |A|^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

通过计算(11)式表示的矩阵负本征值, 可得到场模 a 和场模 b 间的纠缠量为

$$N_2 = \sqrt{|A|^4 + 4|BC|^2} - |A|^2. \quad (12)$$

同样在图2中画出了 J 分别取 $0.2g, 0.5g, 2g$ 和 $4g$ 时, N_2 随规范时间 gt 的演化。图中显示: 1) N_2 随时间作周期性演化, 其周期同样随 J 增大而减小。从

(12) 式可见, 因为 $|A|^2, |B|^2$ 和 $|C|^2$ 有相同的演化周期 T , 所以 N_2 的演化周期也为 T , 它随耦合系数 J 增大而减小。2) 随 J 增大曲线峰值下降。这表明随耦合系数 J 增大场模间纠缠减弱。3) 两场模间的纠缠量 N_2 可以减小到零, 并且在恢复之前纠缠为零的值可以持续一段有限的时间。这表明两场模间的纠缠出现纠缠突然死亡现象。最后, 讨论腔衰减对两场模间纠缠的影响。为简单起见, 采用近似估算的方法, 取 $N'_2 \approx (1 - \kappa t)N_2$, κ 为腔衰减系数, N'_2 为考虑腔衰减后的纠缠度。取 $\kappa = 0.003g$, 在图2显示的演化时间内, gt 最大值为 10, $N'_2 = 97\% N_2$, 腔衰减的影响最大值为 3%。因此, 腔衰减对两场模间纠缠的影响不大。

5 原子熵的演化

熵是描述光场与原子间关联程度的物理量, 熵越大关联越强。在量子力学中熵定义为

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (13)$$

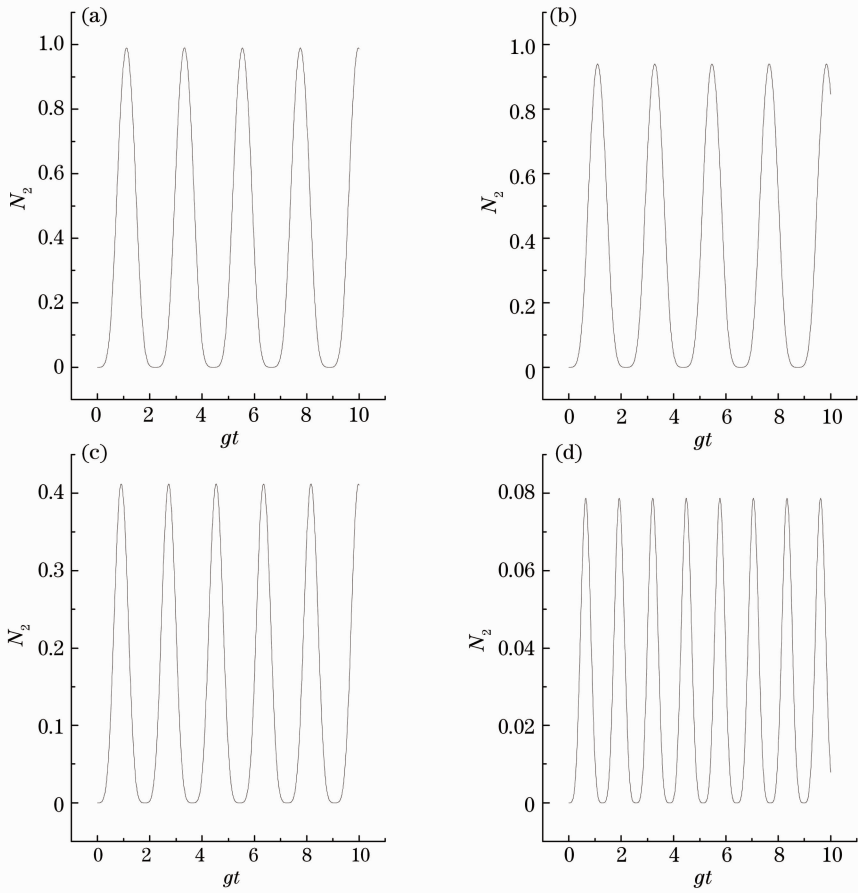


图 2 场模 a 与场模 b 间纠缠量 N_2 的时间演化。(a) $J=0.2g$; (b) $J=0.5g$; (c) $J=2g$; (d) $J=4g$

Fig. 2 Time evolution of entanglement N_2 between two modes of a and b . (a) $J=0.2g$; (b) $J=0.5g$; (c) $J=2g$; (d) $J=4g$

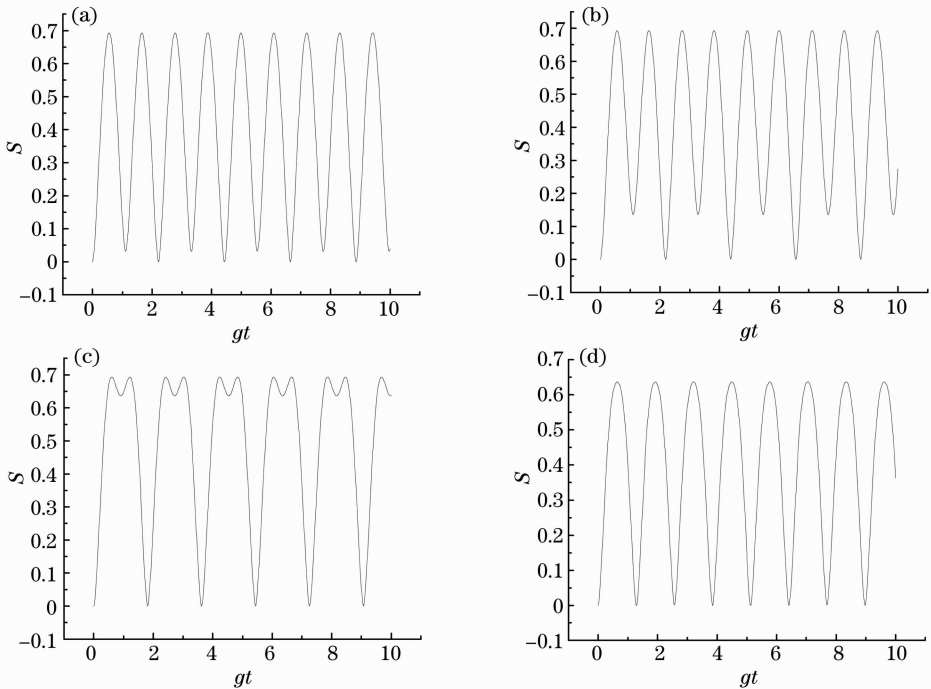


图 3 原子熵 S 的时间演化。(a) $J=0.2g$; (b) $J=0.5g$; (c) $J=2g$; (d) $J=4g$

Fig. 3 Time evolution of atomic entropy S . (a) $J=0.2g$; (b) $J=0.5g$; (c) $J=2g$; (d) $J=4g$

式中 ρ 为系统的密度算符。因为系统的初态处于纯态,所以系统的场熵和原子熵总是相等。若用 λ_i 表示原子约化密度矩阵的本征值,那么,系统中原子熵为

$$S = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i. \quad (14)$$

利用(2)式,可得出原子的约化密度矩阵为

$$\rho_a = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix},$$

$$\rho_{11} = |A|^2,$$

$$\rho_{22} = |B|^2 + |C|^2,$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = 0. \quad (15)$$

原子熵为

$$S = - |A|^2 \ln |A|^2 - 2 |B|^2 \ln(2 |B|^2). \quad (16)$$

在图 3 中画出了 J 分别取 $0.2g, 0.5g, 2g$ 和 $4g$ 时,原子熵的演化。比较图 1 和图 3 可以得出:它们有相似的演化规律,它们之间是正关联的,即纠缠量 N_1 增大熵 S 也增大,纠缠量 N_1 减小熵 S 也减小,这是因为它们都是描述原子与场之间的关联。

6 结 论

针对双模之间存在耦合的情况,对双模之间存在耦合的二能级原子与双模腔场相互作用系统进行了研究。通过解薛定谔方程给出了系统态矢的演化公式,并数值计算了两场模间耦合系数变化对两子系统间纠缠的影响。通过对纠缠演化曲线的具体分析,得到了以下结论:1)原子与场模之间的纠缠、两场模之间的纠缠和原子熵均呈现出周期性演化的规律,并且其演化周期随耦合系数 J 的增大而减小;2)原子与场模之间的纠缠的平均值随 J 的增大呈现先增大而后减小的过程,这表明原子和场模间的纠缠与耦合系数 J 之间存在非线性关系;3)随 J 增大场模间纠缠曲线的峰值下降,表明随耦合系数 J 增大场模间纠缠减弱;4)原子熵与原子和场模之间纠缠有相似的演化规律,它们之间是正关联的,即纠缠量 N_1 增大熵 S 也增大,纠缠量 N_1 减小熵 S 也减小,这是因为它们都是描述原子与场之间的关联。

参 考 文 献

1 M Brune, E Hagley, J Dreyer, *et al.*. Observing the progressive decoherence of the meter in a quantum measurement [J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77(24): 4887-4890.
 2 E Haggley, X Maitre, G Nogutes, *et al.*. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms [J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 79(1): 1-5.
 3 P Bertet, S Osnaghi, A Rauschenbeutel, *et al.*. A

complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary [J]. *Nature*, 2001, 411(6834): 166-170.
 4 A C Ji, Q Sun, X C Xie, *et al.*. Josephson effect for photons in two weakly linked microcavities [J]. *Phys Rev Lett*, 2009, 102(2): 023602.
 5 A C Ji, X C Xie, W M Liu. Quantum magnetic dynamics of polarized light in arrays of microcavities [J]. *Phys Rev Lett*, 2009, 99(18): 183602.
 6 X Zou, K Pahlke, W Mathis. Generation of an entangled state of two three-level atoms in cavity QED [J]. *Phys Rev A*, 2003, 67(4): 044301.
 7 Zheng Shibiao, Guo Guangcan. Generation of multi-atom entangled states via the Raman atom-cavity-field interaction [J]. *Chin Phys Lett*, 1997, 14(7): 485-487.
 8 Yang Zhenbiao, Zhang Bin, Zheng Shibiao. Quantum state engineering by superpositions of coherent states along a straight line with a single atomic state measurement [J]. *Opt Commun*, 2010, 283(14): 2872-2875.
 9 Xiang Shaohua, Shao Bin, Song Kehui. Conditional generation of multiparticle entanglement via cavity QED [J]. *Commun Theor Phys*, 2009, 52(5): 835-839.
 10 Yang Hongqin, Xie Shusen, Lu Zukang, *et al.*. Teleportation of a three-particle GHZ state via three-particle W states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, 26(2): 300-304.
 杨洪钦, 谢树森, 陆祖康, 等. 利用三粒子 W 态隐形传送三粒子 GHZ 态 [J]. *光学学报*, 2006, 26(2): 300-304.
 11 Yang Zhenbiao. Teleportation of two-atom entangled state in resonant cavity quantum electrodynamics [J]. *Chin Phys*, 2007, 16(2): 329-334.
 12 S B Zheng, G C Guo. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, 85(11): 2392-2395.
 13 P Peng, F L Li. Entangling two atoms in spatially separated cavities through both photon emission and absorption processes [J]. *Phys Rev A*, 2007, 75(6): 062320.
 14 A S Zheng, J B Liu. Generation of an N -qubit Greenberger-Horne-Zeilinger state with distant atoms in bimodal cavities [J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 2011, 44(16): 165501.
 15 S Singh, R C H Ooi. Dynamics for two atoms interacting with intensity-dependent two-mode quantized cavity fields in the ladder configuration [J]. *Phys Rev A*, 2012, 86(2): 023810.
 16 Wu Huaizhi, Su Wanjuan. Nonclassical properties in the resonant interaction of a three level Λ -type atom with two-mode field in coherent state [J]. *Chin Phys*, 2007, 16(1): 106-110.
 17 Zhang Guiming, Li Yueke, Gao Yunfeng. Effects of Stark shift on cavity field spectra of nondegenerate two-photon Jaynes-Cummings model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, 27(3): 555-558.
 张桂明, 李悦科, 高云峰. 斯塔克效应对两模双光子 J-C 模型腔场谱的影响 [J]. *光学学报*, 2007, 27(3): 555-558.
 18 Liao Qinghong. Study on sudden death of the entanglement between an isolated atom and an atom inside a bimodal cavity [J]. *J Optoelectronics·Laser*, 2012, 23(4): 757-761.
 廖庆洪. 孤立原子和双模腔内原子之间的纠缠突然死亡研究 [J]. *光电子·激光*, 2012, 23(4): 757-761.
 19 X H Wang, R Y Bao, Y T Huang. Two-mode maximally entangled state generated by the microtoroid cavity-atom system [J]. *International J Theory Physics*, 2011, 50(2): 473-478.
 20 D K Armant, T J Kippenberg, S M Spillane, *et al.*. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip [J]. *Nature*, 2003, 421(6926): 925-928.
 21 T Aoki, B Dayan, E Wilcut, *et al.*. Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator [J]. *Nature*, 2006, 443(7112): 671-674.

- 22 Guo Liang, Liang Xianting. Entanglement evolution of field-atom and atom-atom in Tavis-Cummings model [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(1): 50-54.
郭 亮, 梁先庭. T-C 模型中光场和原子以及原子与原子之间的纠缠演化[J]. 物理学报, 2009, 58(1): 50-54.
- 23 Lu Daoming. The entanglement properties in the system of three atoms interacting with three coupled cavities via a two-photon hopping interaction [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(1): 0127001.
卢道明. 三耦合腔系统双光子过程中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2013, 33(1): 0127001.
- 24 W K Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(10): 2245-2248.
- 25 G Vidal. Computable measure of entanglement [J]. Phys Rev A, 2002, 65(3): 032314.

栏目编辑: 史 敏