

利用差分像运动监测仪法测大气相干长度的研究

于龙昆 吴毅 侯再红 靖旭

(中国科学院安徽光学精密机械研究所大气成分与光学重点实验室, 安徽 合肥 230031)

摘要 为了深入认识利用差分像运动法测量大气相干长度的特性,对差分像运动监测仪(DIMM)进行了深入的研究。基于理论分析和数值计算,讨论了 DIMM 中的几个重要问题,并阐明了解决方法,主要包括计算公式、子瞳大小及间距,从而提高了 DIMM 的测量精度,降低了 DIMM 的结构要求,扩展了 DIMM 的适用范围。

关键词 大气光学;差分像运动监测仪;波结构函数;大气相干长度

中图分类号 P412 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.1201004

Study on the Measurement of Coherence Length by Differential Image Motion Monitor

Yu Longkun Wu Yi Hou Zaihong Jing Xu

(Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China)

Abstract In order to have a thorough knowledge of characteristics of atmospheric coherence length measured by using differential image motion method, differential image motion monitor (DIMM) is studied deeply. Based on theoretical analyses and numerical simulation, several important problems existing in DIMM are discussed, and their solutions are elucidated. Problems include formulas, sub-pupil diameter and displacement of sub-pupils. Accuracy of DIMM is improved, requirements of instrument structure condition are reduced, and suitable scope of DIMM is expanded.

Key words atmospheric optics; differential image motion monitor; wave structure function; atmospheric coherence length

OCIS codes 010.1290; 010.1330; 030.7060; 030.6600

1 引言

大气相干长度 r_0 表征了光波大气传输路径上的综合光学湍流强度,是用于激光大气传输及自适应光学相位校正研究中的重要参量,在天文观测中作为大气视宁度^[1-3]。 r_0 的测量方法有很多,其中差分像运动监测仪(DIMM)是目前被广泛认可且作为标准的大气相干长度测量仪。近 30 年来几乎所有的优良天文台选址都使用过它。但 DIMM 在测量中也存在一些问题影响其测量精度,主要包括探测器读出噪声、统计误差、质心算法误差、曝光时间、

采样时间和仪器焦距,这些问题基本已被阐明^[4],但计算公式、子瞳大小及间距问题仍有待深入研究。

本文分析了计算公式的来源及物理意义,推导更正了其中一个系数值,计算了近场近似条件引入的测量偏差,发现实际应用中近场近似条件可放得更宽,研究了间距问题,结果表明间距问题实质上是倾斜非等晕性问题。

2 计算公式

Sarazin 等^[5] 在研究 DIMM 原理时表明,差分

收稿日期: 2013-08-15; 收到修改稿日期: 2013-08-24

基金项目: 国家 863 计划(A825021)

作者简介: 于龙昆(1987—),男,博士研究生,主要从事激光大气传输光电测量技术方面的研究。

E-mail: ylk@mail.ustc.edu.cn

导师简介: 吴毅(1960—),男,研究员,博士生导师,主要从事激光大气传输及光学参数特性方面的研究。

E-mail: wuyi@aiofm.ac.cn

到达角的方差为两孔上的到达角方差之和减去两孔上到达角的相关函数。设 σ_1^2, σ_2^2 为两子瞳波前差分到到达角的纵向、横向方差, 则有

$$\sigma_1^2 = 2\lambda^2 r_{01}^{-5/3} (0.179D^{-1/3} - 0.0968d^{-1/3}), \quad (1)$$

$$\sigma_2^2 = 2\lambda^2 r_{0t}^{-5/3} (0.179D^{-1/3} - 0.145d^{-1/3}), \quad (2)$$

式中 D 为子瞳直径, d 为子瞳间距, λ 为计算 r_0 的取值波长, 一般取 500 nm, r_{01} 对应于纵向方差算出的 r_0 , r_{0t} 对应于横向方差算出的 r_0 。在湍流均匀各向同性假设下, r_0 统计上与方向无关, 故 r_{01}, r_{0t} 统计上完全相等。当然实际中单次测得的 r_{01}, r_{0t} 并不相等, 单次 r_0 一般取两者的平均值。

刘忠等^[6]将(1)、(2)式整合得到

$$r_0 = \left\{ \frac{2f^2 [0.358(\lambda/D)^{1/3} - 0.242(\lambda/d)^{1/3}] \lambda^{5/3}}{V} \right\}^{3/5}, \quad (3)$$

式中 f 为系统焦距, $V = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) f^2$, 为双像质心相对位置方差。(3)式即

$$r_0^{-5/3} = \frac{r_{01}^{-5/3} + r_{0t}^{-5/3}}{2}. \quad (4)$$

还有一种更简单的取值方法, 即取 r_{01}, r_{0t} 的算术平均值。显然该方法单次测得的 r_0 值与(4)式有细微差异, 但统计上其结果是一致的。实际应用中只需选定一种方法即可, 目前广泛采用(3)式。

广泛采用的(3)式中的系数为 0.358, 是 Freid^[7-8]由圆域波前相位整体倾斜项所引入的相位起伏方差得出的。本文对该公式进行重新推算, 发现系数的准确值应为 0.364(保留 3 位有效位数)。简单推算过程如下:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \lambda^2 \frac{16D_s(D)}{\pi^3 D^2} \int_0^1 u^{8/3} [8u(1-u^2)^{3/2} + 4u(1-u^2)^{1/2} - 4\sec u] du = \\ &\lambda^2 \frac{16 \times 6.88}{\pi^3 D^{1/3} r_0^{5/3}} [4B(7/3, 5/2) + 2B(7/3, 3/2) - 6/11B(7/3, 1/2)] = 0.364\lambda^2 D^{-1/3} r_0^{-5/3}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中, σ_a^2 是直径为 D 的圆孔到达角起伏方差, $D_s(D)$ 为相位结构函数, 已作近场近似, B 为贝塔函数。分别用软件 Mathematica 和 Matlab 进行数值计算, 得出的结果皆为 0.364。

圆域畸变波前可用 Zernike 多项式表示, 其中的相位倾斜项称为 Z-tilt, 对应于畸变波前最小二乘拟合面的法线方向; 另有一种倾斜对应于孔径上相位梯度的平均, 称为 G-tilt。这两类倾斜引起的圆孔上到达角起伏方差分别为^[9]

$$\sigma_a^2 = 0.364\lambda^2 D^{-1/3} r_0^{-5/3}, \quad \text{Z-tilt}, \quad (6)$$

$$\sigma_a^2 = 0.340\lambda^2 D^{-1/3} r_0^{-5/3}, \quad \text{G-tilt}. \quad (7)$$

可以发现(5)式与(6)式完全一致, 说明 Freid 计算的是 Z-tilt。在没有光强起伏的条件下, 质心探测对应的是 G-tilt, DIMM 中探测的是光强质心, 对应的既不是 G-tilt, 也不是 Z-tilt。文献[10]对质心算法的数值研究表明, DIMM 探测的量更接近 Z-tilt, 而不是普遍认为的 G-tilt。故(1)、(2)式的系数 0.179 应为 0.182, (3)式的 0.358 应为 0.364。

3 子瞳大小及间距

光波的起伏可用复相位 $S(r) - iA(r)$ 完全描述, 其中 $S(r)$ 为相位起伏, $A(r)$ 为对数振幅起伏, 则波结构函数可以表示为^[7]

$$D(r) = \overline{[S(x) - iA(x)] - [S(x') - iA(x')]}^2 = D_s(r) + D_A(r), \quad (8)$$

式中 $D_s(r)$ 为相位结构函数, $D_A(r)$ 为对数振幅结构函数。

在 Kolmogorov 湍流模型、Rytov 近似条件下, 波结构函数的计算式为

$$D(r) = 2.91k^2 r^{5/3} \int_0^L C_n^2(z) \gamma^{5/3} dz, \quad (9)$$

式中 k 为光波波数, C_n^2 为折射率结构常数, γ 为传播因子。以观测点为坐标原点, 对于平面波, γ 为 1; 对于球面波, γ 为 $1 - z/L$ 。

Freid 在研究受湍流大气影响的望远镜光学分辨率时引入了大气相干长度的表达式, 即

$$D(r) = 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (10)$$

$$r_0 = \left[0.423k^2 \int_0^\infty C_n^2(z) \gamma^{5/3} dz \right]^{-3/5}. \quad (11)$$

如无特别说明, r_0 皆指平面波下的大气相干长度。在到达角法测 r_0 中, 测量的量理论上对应的是相位结构函数, (5)~(7)式在推导过程中忽略了对数振幅结构函数 $D_A(D)$, 所以测量值与真值的关系为

$$r_0^{\text{meas}} = \left[1 + \frac{D_A(D)}{D_s(D)} \right]^{3/5} r_0. \quad (12)$$

从(12)式可知,测量值总是偏大。在近场近似下 $D \gg \sqrt{\lambda L}$, L 为传播距离, $\frac{D_A(D)}{D_S(D)}$ 趋于零,(12)式引入的误差可忽略。对于近场近似引入的误差具体为多少,不符合该条件时引入的误差是多少,目前未见报道。为此计算了在 Kolmogorov 湍流模型、弱扰动条件下平面波 $D_S(r)$ 、 $D_A(r)$ 各自的大小。

对于水平大气传输在湍流强度水平均匀假设下,有^[11]

$$D_A(\rho) = 0.62k^{7/6}L^{11/6}C_n^2[1 - b_A(\rho)], \quad (13)$$

$$D_S(\rho) = 2.91k^2LC_n^2\rho^{5/3} - 0.62k^{7/6}L^{11/6}C_n^2[1 - b_A(\rho)], \quad (14)$$

式中协方差系数 $b_A(r)$ 为

$$b_A(\rho) = \frac{\int_0^\infty \kappa J_0(\kappa\rho) \kappa^{-11/3} \left[1 - \frac{\sin(\kappa^2 L/k)}{\kappa^2 L/k}\right] d\kappa}{\int_0^\infty \kappa^{-8/3} \left[1 - \frac{\sin(\kappa^2 L/k)}{\kappa^2 L/k}\right] d\kappa}, \quad (15)$$

式中 κ 为空间波数, J_0 为第一类零阶贝塞尔函数。

设 $\rho = x \sqrt{\lambda L}$, 则

$$D_S(x) = \{13.46x^{5/3} - 0.62[1 - b_A(x)]\} \times (k^{7/6}L^{11/6}C_n^2). \quad (16)$$

数值计算得出 $D_S(x)$ 、 $D_A(x)$ 的关系及忽略对数振幅结构函数下 r_0 的计算偏差如图 1 所示。

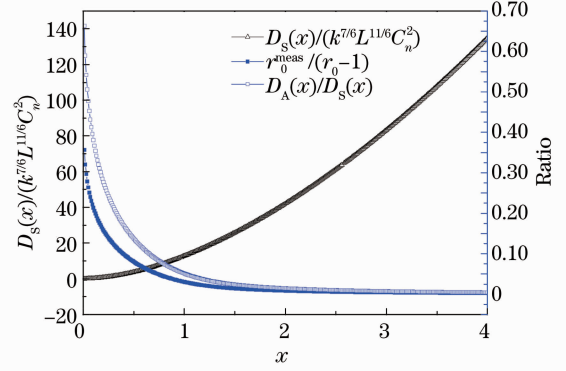


图 1 水平大气传输下 $D_S(x)$ 、 $D_A(x)$ 随 x 的变化关系
Fig. 1 Relationship between $D_S(x)$ and $D_A(x)$ in horizontal atmospheric path

对于整层大气传输,传播路径上湍流强度不均匀,相位结构函数、对数振幅结构函数为

$$D_S(\rho) = 8\pi^2(0.033)k^2 \int_0^L dz C_n^2(z) \int_0^\infty \kappa [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa^{-11/3} \cos^2\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) d\kappa, \quad (17)$$

$$D_A(\rho) = 8\pi^2(0.033)k^2 \int_0^L dz C_n^2(z) \int_0^\infty \kappa [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa^{-11/3} \sin^2\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) d\kappa. \quad (18)$$

在 $HV_{5/7}$ 模型下,波长取 500 nm,计算得出 $D_S(r)$ 、 $D_A(r)$ 的关系及忽略对数振幅结构函数下 r_0 的计算偏差如图 2 所示。

如图 1、2 所示,对数振幅结构函数与相位结构函数的比值随着空间两点间距的增大迅速递减,当

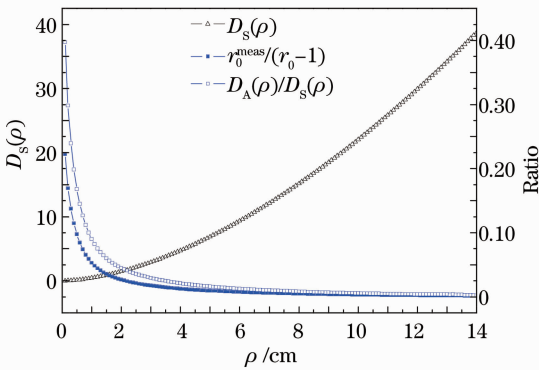


图 2 $HV_{5/7}$ 模型下 $D_S(r)$ 、 $D_A(r)$ 随 r 的变化关系
Fig. 2 Relationship between $D_S(r)$ and $D_A(r)$ in $HV_{5/7}$ model

间距超过一定值后缓慢递减,测量值偏差随探测孔径大小的关系亦然。故当探测孔径大于某一定值,测量值偏差将小到可以接受范围;若将该定值称之为临界间距,近场近似条件即为探测孔径大于临界间距。如图 1 所示,对于水平大气传输,菲涅耳尺度可视临界间距,当探测孔径大于该值时,测量值偏差小于 3.05%,对于统计量 r_0 的测量,该误差可以接受,故近场近似条件可放宽为 $D \geq \sqrt{\lambda L}$ 。如图 2 所示,对于整层大气传输,可将 2 cm 视为临界间距,此时测量值偏差大于 2.67%,若将 2 cm 作为菲涅耳尺度,对应的传播距离 L' 为 0.8 km;对于 $HV_{5/7}$ 模型,通常认为 30 km 以上湍流强度为零,此时菲涅耳尺度为 12.2 cm,可见相对于水平传输,整层大气传输中近场近似条件可放得更宽。对于整层大气湍流强度随高度近似呈指数衰减,经计算 0~0.8 km 湍流积分占整层湍流积分的 83.5% ($HV_{5/7}$ 模型);各层湍流对相位起伏影响都一样,但离观测

点越远的湍流对振幅起伏影响越大,故对于整层大气,只要孔径大于路径上主要湍流区域 L' 对应的菲涅耳尺度满足 $D \geq \sqrt{\lambda L'}$,则对数振幅结构函数也远小于相位结构函数,因而可忽略。

在实际测量中,对于水平大气传输,可算出对数振幅结构函数与相位结构函数的比例,通过(12)式进行修正可得到准确的相干长度值,理论上来说,相干长度值对子瞳直径大小无要求;对于整层大气传输,由于难以获得湍流廓线,无法计算对数振幅结构

函数与相位结构函数的比例,因而不能通过对(12)式进行修正。对 $HV_{5/7}$ 模型的分析可知,子瞳直径大于 2 cm 即可。

对于子瞳间距,一般要求 $d \geq 2D$,此时可用两点的相关函数近似代替两孔径上的相关函数。Sasiela^[9]在研究倾斜非等晕性时给出了准确的两子瞳波前对应于 Z-tilt 的差分到达角的纵向、横向方差公式

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix} = 0.364\lambda^2 D^{-1/3} r_0^{-5/3} \left\{ \begin{aligned} & \left[1.316 \left(\frac{d}{D}\right)^2 {}_5F_4 \left[\frac{7}{6}, -\frac{17}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{2}, 1; -\frac{1}{3}, 3, \frac{3}{2}, 2; \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. 0.4392 \left(\frac{d}{D}\right)^2 {}_4F_3 \left[\frac{7}{6}, -\frac{17}{6}, -\frac{5}{6}, 1; -\frac{1}{3}, 3, 2; \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] \right] + \\ & \left[2.195 \left(\frac{d}{D}\right)^{14/3} {}_4F_3 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{23}{6}; \frac{17}{6}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}; \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. 0.388 \left(\frac{d}{D}\right)^{14/3} {}_3F_2 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{13}{3}, \frac{10}{3}; \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] \right] \end{aligned} \right\}, \quad d < D, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix} = 0.364\lambda^2 \frac{D^{-1/3}}{r_0^{5/3}} \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.531 \left(\frac{D}{d}\right)^{1/3} {}_4F_3 \left[-\frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}; 5, 3, -\frac{1}{3}; \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right] \\ 0.799 \left(\frac{D}{d}\right)^{1/3} {}_3F_2 \left[-\frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{1}{6}; 5, 3; \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad d > D, \quad (20)$$

式中 ${}_{n+1}F_n$ 为广义超几何函数。

将(1)、(2)(系数 0.179 改为重新推导后的 0.182)、(20)式改写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix} = 0.364\lambda^2 \frac{D^{-1/3}}{r_0^{5/3}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 \end{bmatrix}, \quad d > D, \quad (21)$$

将系数 C_i 称为归一化倾斜系数,其前面的量恰是单孔上的倾斜相位方差。计算出两种公式对应的系数 C_i 随 d/D 的变化关系如图 3 所示,可以预计,随着间距 d 的增大,两子瞳对应路径上的湍流愈发不相关,归一化倾斜系数 C_i 趋于 1。 $C_{1,Z}$, $C_{1,Z}$ 为(20)式对应

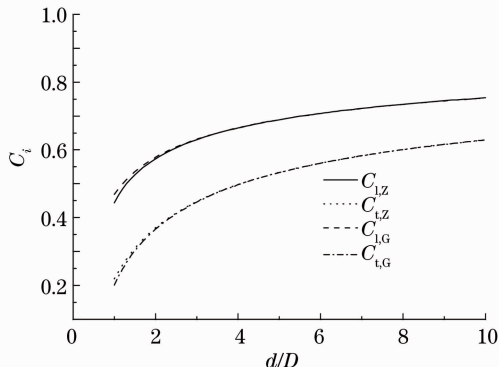


图 3 归一化倾斜系数与子瞳间距的关系

Fig. 3 Normalized tilt coefficient versus displacement

的纵向、横向系数, $C_{1,G}$, $C_{1,G}$ 为(1)、(2)式更正系数后对应的纵向、横向系数。

由图 3 可知,当 $d \geq 2D$ 时,两种公式计算的系数趋于一致,说明(1)、(2)式作为近似公式是可行的, DIMM 的实质是利用两子瞳倾斜项差分掉仪器抖动影响,子瞳间距的问题实际上是倾斜非等晕性问题。实际测量中使用(20)式进行推算更为准确,且对子瞳间距的限制可去掉。

4 结 论

通过上述讨论,可得出以下结论:

- 1) Freid 计算的系数 0.358 应为 0.364; Freid 计算的到达角起伏量对应的是 Z-tilt;
- 2) 子瞳间距问题是倾斜非等晕性问题,选用 Sasiela 给出的计算公式更精确,且不受子瞳间距限制,降低了仪器的结构条件;
- 3) 对于湍流均匀路径传输,近场近似条件可放宽为 $D \geq \sqrt{\lambda L}$,系统口径若不符合该条件,可以通过公式修正测量结果;对于湍流不均匀路径,近场近似可放宽为 $D \geq \sqrt{\lambda L'}$, L' 为路径上主要湍流区域。近场近似条件的放宽扩展了仪器的适用范围;

4) 近场近似引入的误差可根据大致湍流廓线估算出来,且该误差总为正值。

上述是理论结果,实际仪器设计中,考虑到信噪比要求,子瞳直径不能太小,考虑到成像要求,子瞳间距须大于子瞳直径。

参 考 文 献

- 1 F Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy [J]. *Progress in Optics*, 1981, 19: 281-376.
- 2 Yu Longkun, Wu Yi, Hou Zaihong, *et al.*. Measurement and analysis of whole layer atmospheric coherence length at seaside of South China Sea [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 11(41): 3046-3049.
于龙昆, 吴毅, 侯再红, 等. 南海海边整层大气相干长度的测量与分析[J]. *红外与激光工程*, 2012, 11(41): 3046-3049.
- 3 Peng Qi, Chen Hongbin, Wang Jihong, *et al.*. Analysis of solving power of telescopes for non-Kolmogorov turbulence [J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(1): 0113002.
彭起, 陈洪斌, 王继红, 等. 非科尔莫戈罗夫湍流下望远镜的分辨力分析[J]. *中国激光*, 2012, 39(1): 0113002.
- 4 Tan Huisong, Cen Xuefen, Qian Tongling. The factors influencing the seeing measurement by the DIMM [J].

- Publications of Yunnan Observatory, 2002, (1): 38-46.
谭徽松, 岑学奋, 钱铜铃. 用 DIMM 测视宁度的几个问题[J]. *云南天文台台刊*, 2002, (1): 38-46.
- 5 M Sarazin, F Roddier. The ESO differential image motion monitor [J]. *Astron Astrophys*, 1990, 227(1): 294-300.
- 6 Liu Zhong, Qiu Yaohui, Qian Ping. Two problems on the principle of the measurement of seeing by using the differential image motion method [J]. *Publication of Yunnan Observatory*, 1993, (2): 55-60.
刘忠, 邱耀辉, 钱苹. 关于差分像运动法视宁度测量原理中的两个问题[J]. *云南天文台台刊*, 1993, (2): 55-60.
- 7 D L Fried. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion [J]. *J Opt Soc Am*, 1965, 55(11): 1427-1431.
- 8 D L Fried. Differential angle of arrival; theory, evaluation, and measurement feasibility [J]. *Radio Science*, 1975, 10(1): 71-76.
- 9 R J Sasiela. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence* [M]. Berlin: SPIE, 2007. 100-168.
- 10 A Tokovinin. From differential image motion to seeing [J]. *PASP*, 2002, 114(800): 1156-1166.
- 11 V I Tatarskii. *Wave Propagation in a Turbulent Media* [M]. Wen Jingsong Transl. Beijing: Science Press, 1978.
塔塔尔斯基. 湍流大气中波的传播理论[M]. 温景嵩译. 北京: 科学出版社, 1978.

栏目编辑: 王晓球