

# 一种联合直线特征的基础矩阵计算方法

周 凡<sup>1</sup> 邵世维<sup>2</sup> 吴建华<sup>3</sup> 付仲良<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 武汉大学遥感信息工程学院, 湖北 武汉 430079; <sup>2</sup> 武汉市国土资源和规划信息中心, 湖北 武汉 430014)

<sup>3</sup> 江西师范大学地理与环境学院, 江西 南昌 330022

**摘要** 为了解决缺乏明显特征点给基础矩阵计算带来的难题, 针对水平直线与垂直直线所特有的极几何关系, 提出了一种可以联合这两种直线特征的基础矩阵计算方法。首先以相机方位元素、相对姿态为基础矩阵的参数化要素, 构建基于水平直线与垂直直线的等量方程式, 然后以特征直线作为 RANSAC 算法的内点筛选出特征点的最优子集, 再结合 M-estimators 算法确定各个要素的权值, 最后构建统一的平差模型进行计算。模拟数据与真实图像的对比实验结果表明, 该方法切实可行, 能够减少传统基础矩阵计算方法对特征点的依赖, 特征直线的引入也能在一定程度上提高计算结果的精确度与稳定性。

**关键词** 机器视觉; 基础矩阵; 对极几何; 直线特征; 稳健性

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201333.1015003

## Method for Fundamental Matrix Estimation Combined with Line Features

Zhou Fan<sup>1</sup> Shao Shiwei<sup>2</sup> Wu Jianhua<sup>3</sup> Fu Zhongliang<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430079, China

<sup>2</sup> Wuhan Land Resource and Urban Planning Information Center, Wuhan, Hubei 430014, China

<sup>3</sup> School of Geography and Environment, Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi 330022, China

**Abstract** In order to resolve the current problems of fundamental matrix estimation caused by lacking of obvious feature points, according to the epipolar geometry of the horizontal lines and vertical lines, a new method of calculating the fundamental matrix that can be combined with these two kinds of line features is proposed. Firstly, camera orientation elements and relative attitude are used as the elements of fundamental matrix, the equivalent relationship based on horizontal lines and vertical lines is deduced, and then the line features are made as the interior point of the RANSAC algorithm, after that the weight of each factor is determined combined with M-estimators, and finally the unified adjustment model is built. Experimental results of simulation data and real images show that the proposed approach is feasible in practice, and can reduce the dependence of intraditional method on feature points, and the introduction of the line features can improve the accuracy and stability of the calculation results to a certain extent.

**Key words** machine vision; fundamental matrix; epipolar geometry; line feature; robustness

**OCIS codes** 150.0155; 150.1135; 150.6910; 080.1753

## 1 引 言

基础矩阵是分析同一场景两幅影像间对极几何关系的有力工具<sup>[1]</sup>, 它独立于场景结构, 只利用两幅影像中的对应点就可以计算得出, 可以应用于图像

匹配、运动估计、相机标定、三维重建以及虚拟现实技术等<sup>[2-7]</sup>, 其较高精度的求解是后续工作的基础。目前常用的计算方法可以分为线性方法、迭代方法和稳健方法<sup>[8]</sup>。线性方法计算快, 但忽略参数间的

**收稿日期:** 2013-04-11; **收到修改稿日期:** 2013-05-28

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金(41201409)

**作者简介:** 周 凡(1986—), 男, 博士研究生, 主要从事计算机视觉、近景摄影测量等方面的研究。

E-mail: carter1zfl@126.com

**导师简介:** 付仲良(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理与分析、地理信息系统和虚拟现实技术等方面的研究。E-mail: duzhl@263.net

约束关系且最小化准则缺乏物理意义,所以估计精度较差。迭代方法精度较高,但计算时间长,不能消除误匹配对结果的影响。为此,研究人员引入了统计学中的稳健回归分析理论,提出了一些估计基础矩阵的稳健方法,如 RANSAC 方法<sup>[9]</sup>、LMeds 方法<sup>[10]</sup>、M-estimators 方法<sup>[11]</sup>等。

在实际的应用中,稳健方法越来越受到重视,在上述经典稳健方法的基础上,研究人员提出了一定的改进<sup>[12-13]</sup>。然而这些计算方法都是基于特征点来进行匹配计算的,但是在某些情况下可能存在特征点较少、不宜提取或者分布不太理想的问题,此时求解像对的基础矩阵可能无法获得较理想的结果。在像对成像的过程中,除了特征点以外还存在着直线、曲线等几何特征,灭点、绝对二次曲线等概念特征。这些要素在成像过程中也蕴含了极几何关系,但由于基础矩阵是由特征点的极几何关系推导出来的,其他类型的要素在形式上难以纳入到求解的过程中。如果能够将尽可能多的要素用来求解基础矩阵,就可以减少基础矩阵计算对特征点的依赖,也能够扩大基础矩阵的应用范围。

本文针对水平直线、垂直直线所特有的极几何关系,提出了一种以相机方位元素、相对姿态为要素的参数化方法,可以构建关于直线特征的基础矩阵要素等量方程式,然后将特征直线作为 RANSAC 方法的内点以筛选出特征点的最优子集,再结合 M-estimators 方法确定各个要素的权值,最后构建统一的平差模型进行计算。这样做有效地减少了传统计算方法对特征点的依赖,适用于特征点较少但存在直线的情况。另外,特征直线相对于特征点来说几何特征更加明显,定位精度高,出现错误匹配的可能性要小。因此,特征直线的引入也能够提高基础矩阵最终计算结果的精确度与稳定性。

## 2 联合直线特征的基础矩阵求解

### 2.1 原理分析

在计算基础矩阵时,初始给定的特征点数据集中,不可避免地会受到噪声以及异常数据的干扰。异常数据可以分为两类:不正确定位和错误匹配。不正确定位一般是指误差大于 3 个像素的特征点,这样的点会严重降低估计的精度。错误匹配是在建立像对间点与点对应关系时,由于各种原因所造成的错误对应关系,它会彻底地扰乱基础矩阵的估计过程。

线性方法和迭代方法都无法有效地应对异常数

据的干扰,稳健方法能够在很大程度上剔除异常数据,因此获得了更加广泛的应用。但是剔除异常数据时依然会出现两类错误:异常点被错误地认为是正常点,或者正常点被错误地认为是异常点。因此,如何避免这两类错误是当前稳健方法研究的重点。相对于特征点来说,特征直线的几何特征更加明显,出现错误匹配的可能性要小很多。另外,特征直线可以由多个特征点通过最小二乘法求解出来,它的定位精度一般要高于特征点。因此,联合特征直线进行求解,既能够在一定程度上解决特征点不足的问题,也能够提高最终的求解精度。

在现有的经典稳健方法中,RANSAC 方法与 LMeds 方法很相似,虽然 LMeds 方法解算得出的精度更高,但是当特征点集中异常数据多余 50% 时,LMeds 方法的误差很大,并且对于存在高斯噪声的情况,LMeds 方法的效果并不理想。根据每个点对估计基础矩阵的贡献不同,对其进行加权处理,给误差大的点施加小的权重因子,从而降低其对估计基础矩阵的影响,由此产生了 M-estimators 方法,实验结果表明当数据中异常数据是不正确定位时,用 M-estimators 方法得到的结果非常好,但是当数据中有错误匹配时,结果不够理想。

本文在总结上述方法的基础上,提出了一种联合直线特征求解的稳健方法:首先将特征直线作为 RANSAC 算法的内点,在特征点集中搜索出最大一致集并计算出基础矩阵的初始值,再以点到极线的距离最小化和特征直线所能提供的等量关系作为最优化准则,采用贪心策略<sup>[13]</sup>在特征点集中寻找最优子集。当特征点的最优子集确定后,错误匹配已经基本被剔除,然后结合 M-estimators 方法计算各特征点的权值因子及各特征直线的权值因子,最后以特征点的最优子集与特征直线集构建统一的平差模型进行求解,即采用“直线为内点的 RANSAC 算法+联合直线平差的 M-estimators 算法”的方法。在这个过程中关键的问题就是基础矩阵如何参数化才能将特征点与特征直线联合起来共同求解,以及特征直线所能提供的等量关系。

### 2.2 基础矩阵的参数化

基础矩阵  $F$  是  $3 \times 3$ ,秩为 2 的奇异矩阵,理论上在相差一个比例因子的情况下 7 个独立变量即可表示该矩阵,而不同的解法所采用的参数化方法一般也不一致。依据基础矩阵要素与相机方位元素、相对姿态之间的关系以及联合直线特征计算的需要,本文提出了对应的参数化方法。

如图 1 所示, 设世界坐标系为  $O\text{-}XYZ$ , 在左像平面上以像中心点  $c$  为原点设定像平面坐标系  $c\text{-}xy$ , 再从左像的投影中心  $o$  为原点设定像空间坐标系  $o\text{-}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , 那么像空间坐标系转换到世界坐标系需要经过一个旋转变换和一个平移变换。为了方便, 再以  $o$  为原点, 坐标轴方向与世界坐标系  $O\text{-}XYZ$  的坐标轴方向一致, 设定像空间辅助坐标系  $o\text{-}x_0y_0z_0$ 。那么, 像空间坐标系转换到像空间辅助坐标系需要经过一个旋转变换, 像空间辅助坐标系转换到世界坐标系需要经过一个平移变换。

设三维空间点  $M$  在左像上的像平面坐标为  $m$ , 像空间坐标为  $\tilde{m}$ , 像空间辅助坐标为  $\bar{m}$ , 则有如下关系:

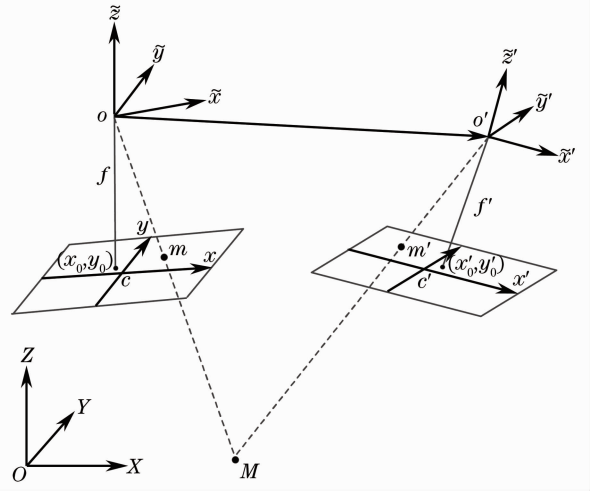


图 1 立体像对中两幅影像的几何关系

Fig. 1 Analytical geometry of two stereo images

$$\tilde{m} = R\bar{m} = R\Omega\bar{m}, \quad (1)$$

$$\tilde{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & -f \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中  $(x_0, y_0, f)$  为像机的内方位元素,  $R$  为像空间坐标系与像空间辅助坐标系之间的旋转变换矩阵, 坐标轴之间旋转的角度为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则  $R$  可以分解为

$$R = R_\alpha R_\beta R_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

同理,  $M$  在右像上的像平面坐标为  $m'$ , 像空间坐标为  $\tilde{m}'$ , 像空间辅助坐标为  $\bar{m}'$ , 有如下关系:

$$\tilde{m}' = R'\bar{m}' = R'\Omega'\bar{m}', \quad (4)$$

$$\tilde{m}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x'_0 \\ 0 & 1 & -y'_0 \\ 0 & 0 & -f' \end{bmatrix}, \quad R' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

两个投影中心的连线为  $oo'$ , 设它的方向向量为  $B$ , 则空间三维向量  $om, o'm'$  与  $B$  共面, 可以推导出<sup>[14]</sup>:

$$\bar{m}^T (B \times \bar{m}') = \bar{m}^T [B]_\times \bar{m}' = 0. \quad (6)$$

将(1)式、(4)式代入(6)式得:

$$\bar{m}^T \Omega^T R^T [B]_\times R' \Omega' \bar{m}' = 0. \quad (7)$$

所以基础矩阵  $F$  在相差一个比例因子的情况下等于  $\Omega^T R^T [B]_\times R' \Omega'$ , 因为基础矩阵表达的是两幅影像间的极几何关系, 计算的结果与世界坐标系的选择无关, 为了简化公式, 将世界坐标系设定为与左像的像空间坐标系重合 ( $R=I$ ), 可以得出基础矩阵的表达式为

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_4 & f_7 \\ f_2 & f_5 & f_8 \\ f_3 & f_6 & f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & -f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x'_0 \\ 0 & 1 & -y'_0 \\ 0 & 0 & -f' \end{bmatrix}. \quad (8)$$

由于内方位元素的参数  $x_0, y_0, x'_0, y'_0$  都非常接近于 0, 另外在基础矩阵的计算过程中必须要经过像点坐标的归一化处理, 在相机未标定时, 可以近似地认为上述 4 个参数为 0, 那么(8)式中的未知参数为  $(b_x, b_y, b_z, f, f', \alpha', \beta', \gamma')$ , 未知参数的个数为 8, 在相差一个比例因子的条件下自由度为 7, 将(8)式代入(7)式展开

后得到未知参数与基础矩阵要素的对应关系为

$$f_1 x'x + f_2 x'y + f_3 x' + f_4 y'x + f_5 y'y + f_6 y' + f_7 x + f_8 y + f_9 = 0, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= b_y r'_{31} - b_z r'_{21}, & f_2 &= b_z r'_{11} - b_x r'_{31}, & f_3 &= f(b_y r'_{11} - b_x r'_{21}), \\ f_4 &= b_y r'_{32} - b_z r'_{22}, & f_5 &= b_z r'_{12} - b_x r'_{32}, & f_6 &= f(b_y r'_{12} - b_x r'_{22}), \\ f_7 &= f'(b_z r'_{23} - b_y r'_{33}), & f_8 &= r'(b_x r'_{33} - b_z r'_{13}), & f_9 &= f f'(b_x r'_{23} - b_y r'_{13}). \end{aligned} \quad (10)$$

至此,就建立了基础矩阵要素与相机方位元素、相对姿态之间的联系。同时,由(9)式也可以构建基于特征点的基础矩阵计算方程组。

### 2.3 直线特征的约束关系

如图2所示,若存在物方直线 $L$ ,它在立体像对中的成像分别为直线 $ab, cd$ ,其中 $a, b, c, d$ 不要求互为对应点,则 $P_1, a, b$ 三点共面 $S_1$ ,令其法方向量为 $\eta_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ;  $P_2, c, d$ 三点共面 $S_2$ ,令其法方向量为 $\eta_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 。平面 $S_1$ 与平面 $S_2$ 必相交,由向量叉乘计算出交线的方向为 $\mathbf{T}(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1, X_2 Z_1 - X_1 Z_2, X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$ ,且交线的方向向量即为该物方直线 $L$ 的方向向量,从而有如下等量关系<sup>[15]</sup>。

若 $L$ 为水平直线,则向量 $\mathbf{T}$ 在 $Z$ 轴方向上的分量为0:

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0. \quad (11)$$

若 $L$ 为垂直直线,则向量 $\mathbf{T}$ 在 $X, Y$ 轴方向上的分量为0:

$$\begin{cases} Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 = 0 \\ X_2 Z_1 - X_1 Z_2 = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

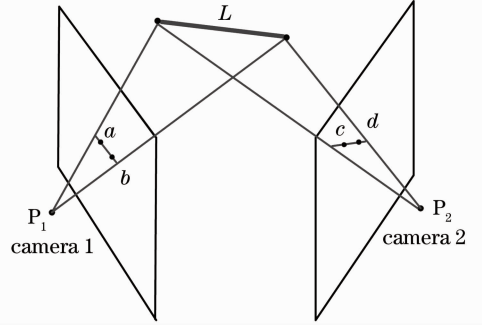


图2 直线特征的极几何关系

Fig. 2 Epipolar geometry of line feature

法向量 $\eta_1$ 可以由空间向量 $P_1 a$ 与 $P_1 b$ 叉乘获得,法向量 $\eta_2$ 可以由空间向量 $P_2 c$ 与 $P_2 d$ 叉乘获得,由于两幅影像的像空间辅助坐标系是分别以 $P_1, P_2$ 为原点的,所以空间向量 $P_1 a, P_1 b, P_2 c, P_2 d$ 在数值上等于 $a, b, c, d$ 四点的像空间辅助坐标,那么法向量 $\eta_1, \eta_2$ 可以表示为

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \bar{x}_a & \bar{y}_a & \bar{z}_a \\ \bar{x}_b & \bar{y}_b & \bar{z}_b \end{vmatrix} = (\bar{y}_a \bar{z}_b - \bar{y}_b \bar{z}_a, \bar{x}_b \bar{z}_a - \bar{x}_a \bar{z}_b, \bar{x}_a \bar{y}_b - \bar{x}_b \bar{y}_a) = (X_1, Y_1, Z_1), \quad (13)$$

$$\eta_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \bar{x}_c & \bar{y}_c & \bar{z}_c \\ \bar{x}_d & \bar{y}_d & \bar{z}_d \end{vmatrix} = (\bar{y}_c \bar{z}_d - \bar{y}_d \bar{z}_c, \bar{x}_d \bar{z}_c - \bar{x}_c \bar{z}_d, \bar{x}_c \bar{y}_d - \bar{x}_d \bar{y}_c) = (X_2, Y_2, Z_2). \quad (14)$$

将(13)式与(14)式分别代入(11)式与(12)式得:

$$(\bar{y}_a \bar{z}_b - \bar{y}_b \bar{z}_a)(\bar{x}_d \bar{z}_c - \bar{x}_c \bar{z}_d) - (\bar{y}_c \bar{z}_d - \bar{y}_d \bar{z}_c)(\bar{x}_b \bar{z}_a - \bar{x}_a \bar{z}_b) = 0, \quad (15)$$

$$\begin{cases} (\bar{x}_b \bar{z}_a - \bar{x}_a \bar{z}_b)(\bar{x}_c \bar{y}_d - \bar{x}_d \bar{y}_c) - (\bar{x}_d \bar{z}_c - \bar{x}_c \bar{z}_d)(\bar{x}_a \bar{y}_b - \bar{x}_b \bar{y}_a) = 0 \\ (\bar{y}_c \bar{z}_d - \bar{y}_d \bar{z}_c)(\bar{x}_a \bar{y}_b - \bar{x}_b \bar{y}_a) - (\bar{y}_a \bar{z}_b - \bar{y}_b \bar{z}_a)(\bar{x}_c \bar{y}_d - \bar{x}_d \bar{y}_c) = 0 \end{cases}. \quad (16)$$

最后将(1)式与(4)式分别代入(15)式与(16)式就可以构建关于 $(b_x, b_y, b_z, f, f', a', \beta', \gamma')$ 的等量方程式,再结合(9)式和(10)式就可以转换为基础矩阵要素的等量方程式。

另外,从图2可以看出,若在像平面已知直线 $ab$ 的方向与 $a$ 点的坐标,那么也可以转换为空间向

量 $ab$ 与 $P_1 a$ ,再叉乘计算获得法向量 $\eta_1$ 。 $P_1 a$ 的计算方法与上文所述方法相同, $ab$ 的计算方法如下:

设直线 $ab$ 在平面坐标系上的方向向量为 $t = [t_1, t_2]^T$ ,在像空间坐标系中的方向向量为 $t = [t_1, t_2, 0]^T$ (该向量在 $xy$ 平面上,所以 $z$ 值为0),由于像空间坐标系转换到世界坐标系的旋转变换矩阵为

$R$ , 所以  $ab = Rt$ , 可以求得:

$$\eta_i = P_1 a \times ab = P_1 a \times Rt. \quad (17)$$

因此, 由水平直线或垂直直线所成影像上的直线方向与该直线上的一点也可以构建关于基础矩阵要素的约束方程。

## 2.4 算法步骤

算法具体步骤如下:

1) 在影像对中提取合适的特征点与特征直线构成集合。

2) 获得集合中特征点的平面坐标与特征直线的直线方程, 对坐标量测值进行归一化处理, 若特征直线是由多余 2 个的特征点拟合而来, 可以使用最小二乘算法求出直线方程。

3) 在特征点集合中随机抽取一个样本  $J$ ,  $J$  中包含 8 个对应点, 使用 8 点算法<sup>[16]</sup> 计算出基础矩阵的初始值, 采用闭合形式解的方法<sup>[14]</sup> 求出(10)式中各要素的初始值。

4) 将特征直线作为 RANSAC 算法的内点, 由特征直线及计算出的基础矩阵初始值代入(15)式或(16)式计算残差值  $l(i)$ , 设定残差的阈值为  $L(i)$ ,  $i$  表示由特征直线所提供的第  $i$  个等量方程式。

5) 若所有残差值都满足  $l(i) < L(i)$ , 则由当前抽样所确定的基础矩阵  $F(k)$  求出它的一致点集  $S[F(k)]$ ,  $k$  表示第  $k$  次抽样; 若不满足, 则重新抽样。

6) 在经过  $K$  次随机抽样后, 选择最大的一致点集所对应的基础矩阵  $F_0$  作为运算的初始值, 以点到极线的距离最小化与(15)式、(16)式的等量关系作为最优化准则, 采用贪心策略在特征点集中寻找最优子集。

7) 以(18)式<sup>[17]</sup> 的权函数确定最优子集中各几何要素的权重, 其中  $w_i$  为第  $i$  项的权值,  $r_i$  为残差值,  $\sigma$  为标准偏差。再联合(7)式、(15)式与(16)式及基础矩阵秩为 2 的约束构建统一的平差计算模型求出矩阵  $F'$ 。

$$w_i = \begin{cases} [1 - (r_i/4.6851)^2]^2 & |r_i| \leq 4.6851\sigma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (18)$$

8) 对结果矩阵  $F'$  反归一化处理后获得最终的基础矩阵计算值  $F$ 。

## 3 实验结果与分析

为了检验本文算法的有效性及其稳健性, 与现有

的经典稳健方法进行了对比分析, 以余差和对极距离作为参考量, 分别利用模拟数据和真实图像进行了对比实验。

### 3.1 模拟数据

模拟实验所采取的方法是先给出控制点物方坐标和相机矩阵的模拟值, 然后根据严格的共线方程生成模拟的像点坐标数据, 在像点坐标值中加入高斯噪声与错误匹配值以模拟像点的观测值。

实验模拟生成 100 个匹配点、4 条水平直线和 4 条垂直直线。通过分别改变错误数据率与高斯噪声的均方差来分析相关算法的准确性与稳健性。表 1 列出了 RANSAC 方法、LMeds 方法与本文方法分别在错误率为 30%、45% 和 60% 时的平均余差和平均对极距离的值。为了获得更加可靠的结果, 对每一种方法中不同错误率的情况分别做了 10 组实验, 以它们的平均值作为最终的结果量。

表 1 3 种方法针对不同错误数据率的精度及稳健性比较  
Table 1 Precision and robustness of three methods aiming at different error data rates

Algorithm	Error rate / %	Average residual errors	Average epipolar distance / pixel
RANSAC	30	0.0414	0.2253
	45	0.1535	0.8512
	60	0.2123	1.1848
LMeds	30	0.0214	0.1064
	45	0.4525	2.0515
	60	0.6452	2.8521
Our method	30	0.0032	0.0124
	45	0.0074	0.0142
	60	0.0092	0.0189

从表 1 可以看出, 本文算法具有较高的精度, 并且针对不同的错误数据率都具有良好的稳健性。当错误数据率较小时, 三种算法的精度从低到高依次为: RANSAC 方法、LMeds 方法和本文算法; 当错误数据率接近或超过 50% 时, LMeds 方法的误差迅速增大并且超过了 RANSAC 方法, 而本文算法的精度仍然最高, 这主要是由于以特征直线为内点, 可以较好地剔除掉错误匹配点。

再分别添加均方差为 0.1、0.5 及 1 个像素的高斯噪声进行对比实验, 表 2 列出了 3 种方法在不同均方差高斯噪声下的平均余差和平均对极距离。同样地, 分别作 10 组实验取平均值。

从表 2 可以看出, 随着误差的增大, LMeds 方法的精度要高于 RANSAC 方法的精度, 这主要是由于 LMeds 方法对内点的限制条件更高, 而本文方

法先以特征直线做为 RANSAC 方法的内点来确定最优匹配点集合,再基于 M-estimators 方法的思想给特征点与特征直线赋予不同的权值,最后进行联合平差,因此本文方法精度最高,并且针对不同均方差的高斯噪声都具有很好的稳定性。

表 2 3 种方法针对不同均方差高斯噪声的精度及稳健性比较

Table 2 Precision and robustness of three methods aiming at different Gaussian noises

Algorithm	Mean square errors /pixel	Average residual errors	Average epipolar distance /pixel
RANSAC	0.1	0.0435	0.1924
	0.5	0.2516	0.5431
	1	0.4325	1.2655
LMeds	0.1	0.0421	0.1784
	0.5	0.2125	0.4181
	1	0.3452	0.8522
Our method	0.1	0.0121	0.0624
	0.5	0.0526	0.0942
	1	0.0856	0.1213

为了进一步分析该方法在特征点较少时的效果,以上述模拟的 4 条水平直线、4 条垂直直线加上少量的特征点为实验数据,在模拟的数据中加入均方差为 1 个像素的高斯噪声进行 2 组对比实验:1)以点到极线的距离最小化为最优化准则,仅使用特征点进行迭代计算;2)以点到极线的距离最小化及(15)式、(16)式的等量关系为最优化准则,使用特征直线与特征点进行联合平差计算。在计算过程中逐步减少计算所使用的特征点,以平均余差为评价依据,结果如图 3 所示。

从图 3 可以看出,随着特征点的减少,联合特征直线进行计算的余差较小且较稳定,而仅使用特征

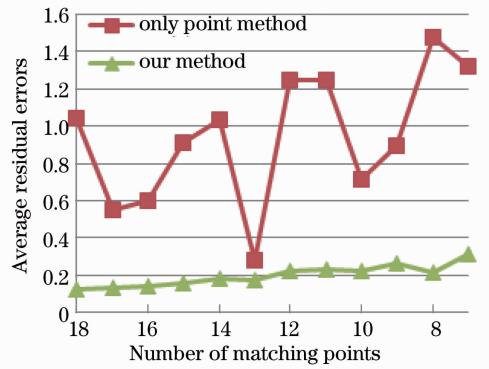


图 3 模拟数据的余差变化对比

Fig. 3 Residual errors variation of simulation data  
点进行计算的余差较大且非常不稳定。这也说明了联合直线特征进行基础矩阵的求解能够在一定程度上减少对特征点的依赖,适用于特征点较少的情况。

由于(15)式和(16)式是关于基础矩阵要素的非线性方程组,它的迭代求解需要基础矩阵的初始值,所以最少需要 7 个特征点计算出迭代运算的初始值。若可以通过场景的先验知识或其它方法获得基础矩阵的初始值,那么本文方法在特征点少于 7 个时,依然可以使用。

### 3.2 真实数据

图 4 与图 5 是分别从不同视点获得的同一场景的两组像对,在影像上选取特征点与特征直线分别做 2 组对比实验:1)不联合直线特征,使用 RANSAC 算法确定特征点的最优子集后,再结合 M-estimators 确定特征点的权值,最后计算出基础矩阵;2)本文算法。

在图 4 的像对选取 50 个特征点及 2 条水平线、4 条垂直线,在图 5 的像对选取 42 个特征点及 4 条水平线、6 条垂直线,然后调整实验所使用的特征点个数来对比分析本文算法的效果。

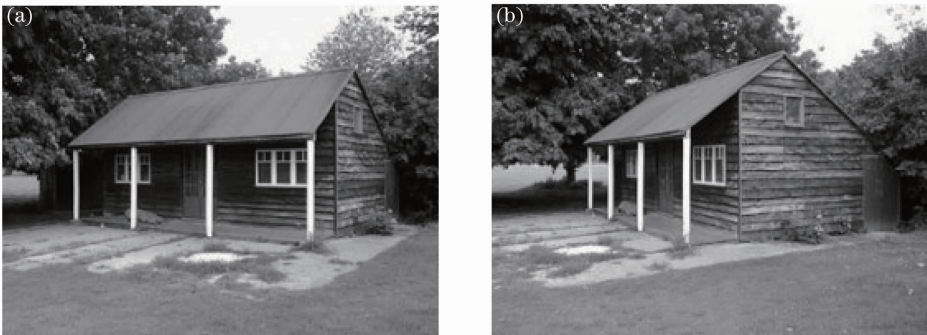


图 4 房子像对

Fig. 4 A pair image of house



从图 6 与表 3 的结果可以看出,当特征点数量较少时,单纯由特征点计算的结果误差较大且不稳定,此时联合直线特征进行计算能够显著地提高计算结果的精度与稳定性。当特征点数量逐渐增多时,本文算法的精度与稳定性依然要优于不联合直线特征的方法。另外,当使用的特征点逐渐增多时,本文算法耗费的时间要更少,这是因为在算法步骤 5 中,将特征直线作为 RANSAC 算法的内点,可以更快地在特征点集中搜索出最优子集。

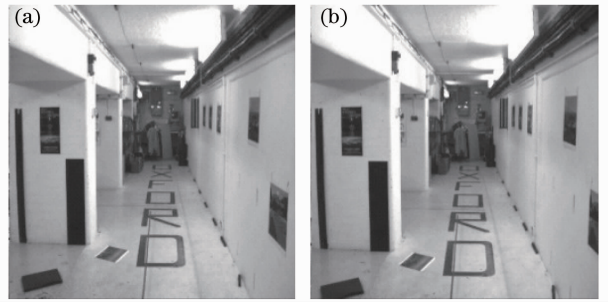


图 5 走廊像对

Fig. 5 A pair image of corridor

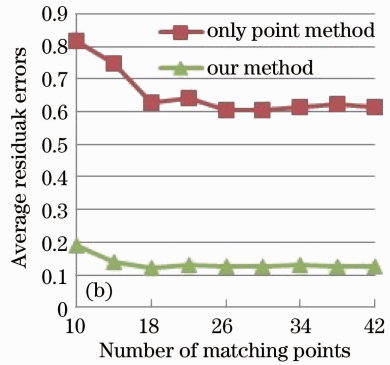
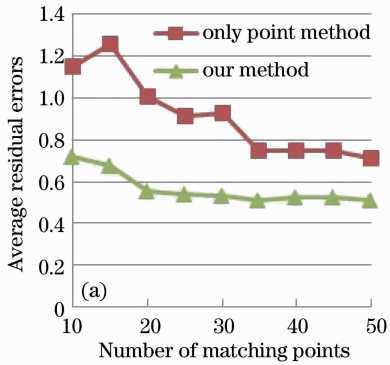


图 6 真实图像的余差的变化对比。(a)房子;(b)走廊

Fig. 6 Residual errors variation of real images. (a) House; (b) corridor

表 3 两种算法对于真实图像的数据比较结果

Table 3 Comparison of estimation errors of two algorithms with real images

Algorithm	House			Corridor			Time /s
	Point number	Average residual errors	Average epipolar distance /pixel	Point number	Average residual errors	Average epipolar distance /pixel	
Only point method	10	1.1451	3.4519	10	0.8160	2.1497	0.0151
Our method		0.5218	0.2412		0.1924	0.8924	
Only point method	30	0.9230	1.2541	26	0.6030	1.8764	0.0621
Our method		0.3354	0.1312		0.1281	0.8014	
Only point method	50	0.7112	1.1254	42	0.6124	1.8847	0.1256
Our method		0.3135	0.1224		0.1241	0.7812	

## 4 结 论

针对水平直线与垂直直线所特有的极几何关系,详细地讨论了一种可以联合直线特征进行基础矩阵计算的稳健方法,并分别以模拟数据和真实图像的对比实验,验证了该方法的可行性与有效性。它能够在一定程度上解决特征点难以获取或者缺乏情况下基础矩阵的求解问题,对于特征点存在错误

匹配以及高斯噪声的情况,该算法在提高估计精度的同时也保持了很好的稳定性。但是本文只讨论了水平直线、垂直直线这两种几何特征,对于一般意义上的直线特征尚未涉及,另外仅使用了比较有代表性的 RANSAC 方法与 M-estimators 方法联合直线特征进行计算,并未考虑其他类型的稳健方法,这些问题有待于进一步研究,以扩大方法的普适性。

## 参 考 文 献

- 1 R Hartley, A Zisserman, I Ebrary. Multiple View Geometry in Computer Vision [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 239.
- 2 Lei Jie, Du Xin, Liu Jilin. A generalized rectification algorithm for co-axis omni-directional stereo system [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(7): 1984-1988.  
雷 杰, 杜 歆, 刘济林. 一种通用的共轴全向立体系统极线校正方法[J]. 光学学报, 2010, 30(7): 1984-1988.
- 3 Xu Qiaoyu, Yao Huai, Che Rensheng. Online calibration of stereo vision measurement system [J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(6): 1546-1551.  
徐巧玉, 姚 怀, 车仁生. 立体视觉测量系统现场校准技术[J]. 光学学报, 2009, 29(6): 1546-1551.
- 4 Xu Qiaoyu, Ye Dong, Che Rensheng. On-line calibration of stereo vision measurement system based on optical reference bar [J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(1): 81-86.  
徐巧玉, 叶 东, 车仁生. 基于光学参考棒的立体视觉测量系统现场标定技术[J]. 光学学报, 2008, 28(1): 81-86.
- 5 Xu Qiaoyu, Che Rensheng. Study of stereo vision coordinate measurement system based on optical probe [J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(11): 2181-2186.  
徐巧玉, 车仁生. 基于光学测棒的立体视觉坐标测量系统的研究[J]. 光学学报, 2008, 28(11): 2181-2186.
- 6 Zhang Xuping, Wang Jiaqi, Zhang Yixin, *et al.*. Large-scale three-dimensional stereo vision geometric measurement system [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(3): 0315002.  
张旭苹, 汪家其, 张益昕, 等. 大尺度三维几何尺寸立体视觉测量系统实现[J]. 光学学报, 2012, 32(3): 0315002.
- 7 Ding Yabing, Peng Xiang, Tian Jindong, *et al.*. Pose estimation of multiple viewpoints for three-dimensional digital imaging system [J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(3): 451-456.  
丁雅斌, 彭 翔, 田劲东, 等. 一种三维数字成像系统的多视点姿态估计方法[J]. 光学学报, 2007, 27(3): 451-456.
- 8 X Armangu, J Salvi. Overall view regarding fundamental matrix estimation [J]. Image and Vision Computing, 2003, 21(2): 205-220.
- 9 M A Fischler, R C Bolles. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography [J]. Communications of the ACM, 1981, 24(6): 381-395.
- 10 Z Zhang. Determining the epipolar geometry and its uncertainty: a review [J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 27(2): 161-195.
- 11 P H S Torr, D W Murray. The development and comparison of robust methods for estimating the fundamental matrix [J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 24(3): 271-300.
- 12 Zhang Jieyu, Zhang Qiang, Liu fuchang, *et al.*. An improved robust method of M-Estimators [J]. Journal of Image and Graphics, 2009, 14(8): 1663-1668.  
张洁玉, 陈 强, 刘复昌, 等. 一种改进 M-Estimators 基础矩阵鲁棒估计法[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(8): 1663-1668.
- 13 Xiang Changbo, Liu Taihui, Song Jianzhong. A robust greedy algorithm for estimating the fundamental matrix [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(5): 651-655.  
向长波, 刘太辉, 宋建中. 基本矩阵的鲁棒贪心估计算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(5): 651-655.
- 14 H Pan. A direct closed-form solution to general relative orientation of two stereo views [J]. Digital Signal Processing, 1999, 9(3): 195-221.
- 15 Y Zhang, B Hu, J Zhang. Relative orientation based on multi-features [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2011, 66(5): 700-707.
- 16 H C Longuet-Higgins. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections [J]. Nature, 1981, 293(5828): 133-135.
- 17 F Mosteller, J W Tukey. Data Analysis and Regression [M]. Reading Mass: Addison-Wesley Publishing Company Press, 1977. 189.

栏目编辑: 李文喆