

三耦合腔系统双光子过程中的纠缠特性

卢道明

(武夷学院电子工程系, 福建 武夷山 354300)

摘要 研究腔与腔之间通过双光子过程耦合的三耦合腔系统, 考虑每个腔囚禁一个二能级原子, 并且原子通过双光子跃迁过程与腔场共振相互作用的情况。采用负本征值来度量两个子系统间的纠缠, 利用数值计算方法研究了系统中两个子系统间的纠缠动力学特性。讨论了腔场间耦合系数变化对两个子系统间纠缠特性的影响。研究发现, 随腔场间耦合系数的增大, 两原子间的纠缠增强, 两腔场间的纠缠减弱。

关键词 量子光学; 三耦合腔; 双光子过程; 量子纠缠

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201333.0127001

Entanglement Properties of Two-Photon Process in Three Coupling Cavities

Lu Daoming

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

Abstract Three identical cavities are considered each of which contains one two-level atom with the two cavities coupled via a two-photon hopping interaction. Negativity is used to quantify the degree of entanglement. By means of the numerical calculations, the evolution of the entanglement between atoms or between cavities has been investigated. The influence of cavity-cavity coupling coefficient on the entanglement is discussed. The results show that the entanglement between atoms is strengthened, and that between cavities is weakened with cavity-cavity coupling coefficient increasing.

Key words quantum optics; three coupling cavities; two-photon process; quantum entanglement

OCIS codes 270.5580; 020.5580

1 引 言

腔量子电动力学(QED)主要是研究在腔提供的特殊边界条件下电磁场量子化及其对实物粒子的相互作用。至今, 对如何利用腔 QED 技术进行量子态制备和传送进行了比较系统的研究^[1~5]。例如, Zheng^[1] 提出了不需要进行 Bell 态的测量传送未知原子态的方案。Xiang 等^[2] 提出了利用腔 QED 产生多粒子纠缠态的方案。Yang 等^[3] 建议了一种在腔 QED 中制备非经典态的新方案。另一方面, 由于在耦合腔 QED 系统中每个腔囚禁一个原子, 可避免了单个腔中操控多个原子有可能产生相互干扰带来的影响。因此, 耦合腔 QED 系统引起了人们的广泛关注。到目前为止, 人们已提出许多利

用耦合腔系统进行量子信息处理的方案^[6~17]。例如, Zheng 等^[6] 提出利用耦合腔 QED 系统产生双模压缩态的建议。Yin 等^[7] 建议了一种利用腔 QED 系统实现量子态转换和逻辑门的方案。Ogden^[8] 研究了耦合腔系统中的动力学特性。Zhou^[9] 指出了一种利用耦合腔系统实现三维量子态转换的方案。最近, 人们对 Jaynes-Cummings 模型进行推广, 提出了双光子 Jaynes-Cummings 模型。由于双光子过程在实验上的实现, 使双光子 Jaynes-Cummings 模型成为人们研究的热门课题^[18~20]。例如, 刘小娟等^[18] 讨论了双光子过程中系统初态对原子信息熵压缩的影响, 张桂明等^[19] 讨论了斯塔克效应对两模双光子 J-C 模型腔场谱的影响。在已有对耦合腔系

收稿日期: 2012-08-20; **收到修改稿日期**: 2012-09-06

基金项目: 福建省自然科学基金(2011J01018)资助课题。

作者简介: 卢道明(1963—), 教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

统的研究中,主要是讨论通过单光子过程相互作用的情况,2011年,Alexanian^[21]提出了利用双光子过程耦合腔系统实现双光子转换的方案,但对双光子过程三耦合腔系统的研究尚未见报道。本文在文献[22]研究的基础上,将双光子过程推广到3个耦合腔的情况,研究了3个耦合腔系统中两个原子之间和两个腔场之间的纠缠特性。

2 理论模型

所研究的物理模型如图1所示。每个腔囚禁一个原子,考虑原子通过双光子跃迁与腔场发生共振相互作用,并且腔与腔之间也通过双光子耦合的情况。在旋波近似下,在相互作用绘景中系统的哈密顿量为^[21]

$$H_I = f_1(a_A^+s_1^+ + a_A^+s_1^-) + f_2(a_B^+s_2^+ + a_B^+s_2^-) + f_3(a_C^+s_3^+ + a_C^+s_3^-) + J_1(a_A^+a_B^+ + a_A^+a_B^-) + J_2(a_B^+a_C^+ + a_B^+a_C^-), \quad (1)$$

式中 a_L^+ , a_L ($L = A, B, C$)分别为第 L 个腔中场的产生和湮没算符, s_i^+ 和 s_i^- ($i = 1, 2, 3$)为第 i 个原子的跃迁算符。 f_i ($i = 1, 2, 3$)表示第 i 个腔中原子与腔场的耦合系数, J_i ($i = 1, 2$)表示相邻两个腔之间的耦合系数。定义激发数算符 $\hat{N} = \sum_{i=1}^3 (|e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|) + a_A^+a_A + a_B^+a_B + a_C^+a_C$,因 \hat{N} 与 H_I 满足对易关系 $[\hat{N}, H_I] = 0$,所以在系统演化过程中激发数守恒。式中 $|e_i\rangle$ 和 $|g_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$)表示第 i 个原子的激发态和基态。

假设初始时刻系统总激发数等于2,那么系统的态矢将在以 $|\varphi_1\rangle = |egg\rangle_{123} |000\rangle_{ABC}$, $|\varphi_2\rangle = |geg\rangle_{123} |000\rangle_{ABC}$, $|\varphi_3\rangle = |gge\rangle_{123} |000\rangle_{ABC}$, $|\varphi_4\rangle = |ggg\rangle_{123}$

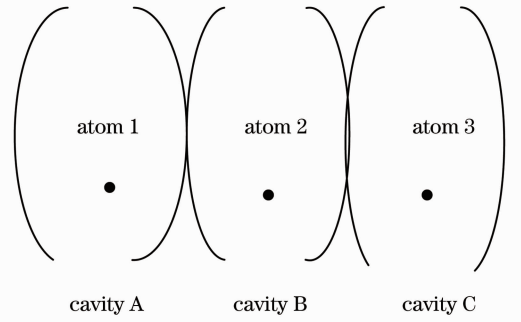


图1 系统的示意图

Fig. 1 Sketch of the system

$|200\rangle_{ABC}$, $|\varphi_5\rangle = |ggg\rangle_{123} |020\rangle_{ABC}$, $|\varphi_6\rangle = |ggg\rangle_{123} |002\rangle_{ABC}$ 为基矢构成的子空间中演化。 $|efg\rangle_{123}$ 态表示原子1、2和3分别处于 $|e\rangle$ 、 $|f\rangle$ 和 $|g\rangle$ 态, $|lmn\rangle_{ABC}$ 态表示腔A、B、C分别处于 $|l\rangle$ 、 $|m\rangle$ 和 $|n\rangle$ 态。以 $|\varphi_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots, 7$)为基矢,系统的哈密顿的矩阵表示为

$$H_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}f_3 \\ \sqrt{2}f_1 & 0 & 0 & 0 & 2J_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}f_2 & 0 & 2J_1 & 0 & 2J_2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}f_3 & 0 & 2J_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

在相互作用绘景中,态矢演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle, \quad (3)$$

取 $\hbar = 1$ 。假设系统初态为 $|\varphi_2\rangle = |geg\rangle_{123} |000\rangle_{ABC}$ 。那么, t 时刻系统的态矢可表示为

$$|\varphi(t)\rangle = d_1 |\varphi_1\rangle + d_2 |\varphi_2\rangle + d_3 |\varphi_3\rangle + d_4 |\varphi_4\rangle + d_5 |\varphi_5\rangle + d_6 |\varphi_6\rangle. \quad (4)$$

为简单起见,设 $f_1 = f_2 = f_3 = f$, $J_1 = J_2$ 。将(4)式代入(3)式,解方程可得出

$$\begin{cases} d_1 = d_3 = D\sin(\alpha t) + E\sin(\beta t), \\ d_2 = 1 + \frac{i}{2J} \left\{ \frac{\alpha^2 - 2f^2}{\alpha} [\cos(\alpha t) - 1] D + \frac{\beta^2 - 2f^2}{\beta} [\cos(\beta t) - 1] E \right\}, \\ d_4 = d_6 = \frac{i}{\sqrt{2}f} [D\alpha \cos(\alpha t) + E\beta \cos(\beta t)], \\ d_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}fJ} [(\alpha^2 - 2f^2) D \sin(\alpha t) + (\beta^2 - 2f^2) E \sin(\beta t)], \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\alpha = \sqrt{2(2J^2 + f^2) - 2H}$, $\beta = \sqrt{2(2J^2 + f^2) + 2H}$, $H = \sqrt{(2J^2 + f^2)^2 - f^4}$, $D = \frac{iJf^2}{H\alpha}$, $E = -\frac{iJf^2}{H\beta}$ 。

3 两原子间纠缠的演化

利用负本征值来度量两子系统间的纠缠,即对于用密度矩阵 ρ 表示的两个子系统,其纠缠可用其部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值来定义:

$$N = -2 \sum_i \lambda_i, \quad (6)$$

式中 λ_i 为部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值。 $N = 0$ 表示两子系统是分离的; $N = 1$ 表示两子系统处于最大纠缠态; $0 < N < 1$ 表示两子系统是纠缠的。

首先研究原子 1 与原子 2 间的纠缠。利用(4)式,对原子 3 和 3 个腔场的态求迹,以 $|e_1\rangle|e_2\rangle$, $|e_1\rangle|g_2\rangle$, $|g_1\rangle|e_2\rangle$, $|g_1\rangle|g_2\rangle$ 为基矢,可得到原子 1 和原子 2 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_1|^2 & d_1 d_2^* & 0 \\ 0 & d_2 d_1^* & |d_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_{3456}|^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

为方便起见,(7)式和以下各式中 $|d_{ijkl}|^2 = |d_i|^2 + |d_j|^2 + |d_k|^2 + |d_l|^2$ 。利用(7)式,通过计算可得到

原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$N_{12} = \sqrt{|d_{3456}|^4 + 4|d_1 d_2|^2} - |d_{3456}|^2. \quad (8)$$

下面利用数值计算方法讨论纠缠量 N_{12} 随规范时间 ft 的演化。两个腔之间的耦合系数 J 分别取 $0.2f, 0.5f, 2f, 5f$ 时, N_{12} 的演化计算结果如图 2 所示。比较图 2 中不同腔场间耦合强度的演化曲线可得出:随腔场间耦合系数的增大,纠缠量 N_{12} 演化的周期性逐渐增强, J 大于一定值后 N_{12} 的演化表现为规则的周期性振荡。另一方面,随 J 的增大,曲线重心上升,纠缠量的平均值增大。例如 $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.10085$; $J = 0.5f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.12072$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.23175$; 而 $J = 5f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.29097$ 。这表明原子间的纠缠随腔场间耦合系数增大而增强。与文献[23]的结果进行比较,表明它不同于单光子过程的情况。这是因为随腔场间耦合增强,场模被激发的可能性降低,两原子通过腔场间耦合作用使其占有初始激发子的几率增大,导致两原子间的纠缠增强。

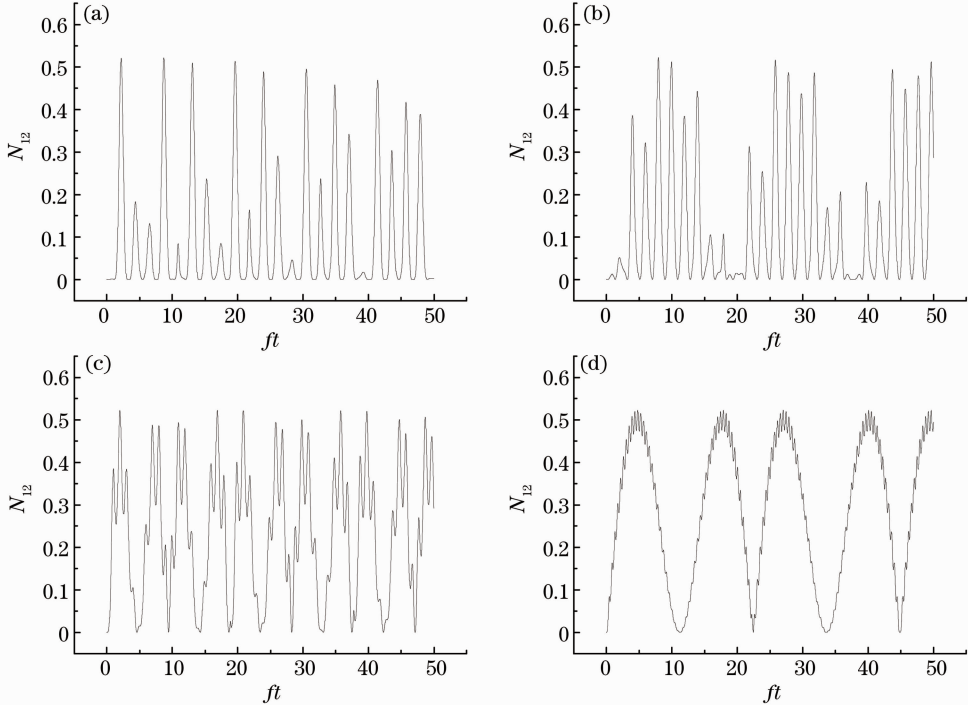


图 2 原子间纠缠量 N_{12} 随时间的演化。(a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2f$; (d) $J = 5f$

Fig. 2 Evolution of atom-atom entanglement N_{12} with time. (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2f$; (d) $J = 5f$

采用同样的方法,可得出原子 2 与原子 3 间的纠缠和原子 1 与原子 3 间的纠缠为

$$\begin{cases} N_{23} = \sqrt{|d_{1456}|^4 + 4|d_2 d_3|^2} - |d_{1456}|^2, \\ N_{13} = \sqrt{|d_{2456}|^4 + 4|d_1 d_3|^2} - |d_{2456}|^2. \end{cases} \quad (9)$$

可见 $N_{12} = N_{23} \circ J$ 同样取 $0.2f, 0.5f, 2f, 5f$ 时, 纠

缠量 N_{13} 随规范时间 ft 的演化如图 3 所示。从图 3 中可以看出: N_{13} 的演化与 N_{12} 的演化相似, 均随腔场间耦合的增强, 曲线重心上升, 纠缠量的平均值增大。例如 $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{13} = 0.12979$; $J = 0.5f$ 时, $\bar{N}_{13} = 0.14485$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{13} = 0.27557$; 而 $J =$

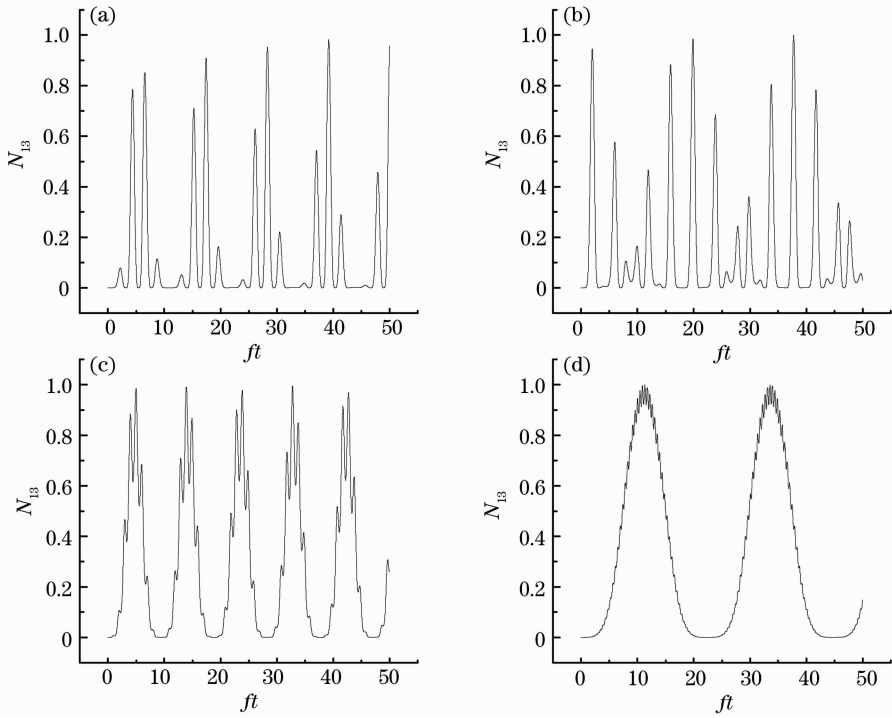


图 3 原子间纠缠量 N_{13} 随时间的演化。(a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2f$; (d) $J = 5f$

Fig. 3 Evolution of atom-atom entanglement N_{13} with time. (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2f$; (d) $J = 5f$

$5f$ 时, $\bar{N}_{13} = 0.31264$ 。

4 两腔场间纠缠的演化

同样采用负本征值来描述腔场间的纠缠。利用(4)式,对3个原子和腔场C的态求迹,以 $|2\rangle_A$, $|2\rangle_B$, $|2\rangle_A|0\rangle_B$, $|0\rangle_A|2\rangle_B$, $|0\rangle_A|0\rangle_B$ 为基矢,可得到腔A和腔B构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_4|^2 & d_4 d_5^* & 0 \\ 0 & d_5^* d_4^* & |d_5|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_{1236}|^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

利用(10)式,通过计算可得到腔A和腔B间的纠缠量为

$$N_{AB} = \sqrt{|d_{1236}|^4 + 4|d_4 d_5|^2 - |d_{1236}|^2}. \quad (11)$$

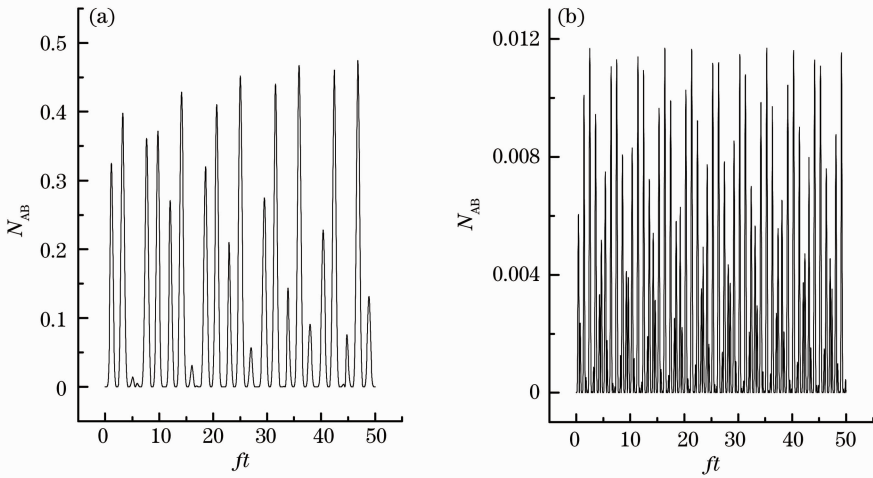


图 4 腔场间纠缠量 N_{AB} 随时间的演化。(a) $J = 0.2f$; (b) $J = 2f$

Fig. 4 Evolution of cavity-cavity entanglement N_{AB} with time. (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 2f$

J 分别取 $0.2f$ 和 $2f$ 时, 纠缠量 N_{AB} 随规范时间 ft 的演化如图 4 所示。从图 4 中可以看出: N_{AB} 的演化呈现不规则振荡行为, 并且其振荡频率随 J 增大而增大。另一方面, 随 J 增大, 曲线重心下降, 纠缠量的平均值减小。例如 $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{AB} = 0.08898$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{AB} = 0.00213$ 。当腔场间的耦合系数大于一定值后, 腔场 A 与腔场 B 间纠缠消失。这表明腔场 A 与腔场 B 间纠缠随腔场间耦合的增强而减弱, 这是因为随腔场间耦合增强, 场模被激发的可能性降低, 导致两腔之间的纠缠减弱。这一结果与三个耦合腔单光子过程系统中腔场间的纠缠不一致^[23]。

同样可得出腔 B 和腔 C 间的纠缠量, 以及腔 A

和腔 C 间的纠缠量为

$$N_{BC} = \sqrt{|d_{1234}|^4 + 4|d_5 d_6|^2} - |d_{1234}|^2, \\ N_{AC} = \sqrt{|d_{1235}|^4 + 4|d_4 d_6|^2} - |d_{1235}|^2. \quad (12)$$

可见 $N_{AB} = N_{BC}$ 。 J 同样取 $0.2f, 2f$ 时, 纠缠量 N_{AC} 随规范时间 ft 的演化如图 5 所示。从图 5 中可以看出: N_{AC} 的演化与 N_{AB} 的演化相似, 均随腔场间耦合的增强, 曲线重心下降, 纠缠量的平均值减小。例如 $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{AC} = 0.11769$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{AC} = 0.00332$ 。这表明随腔场间耦合的增强, 腔场 A 与腔场 C 间的纠缠也减弱。

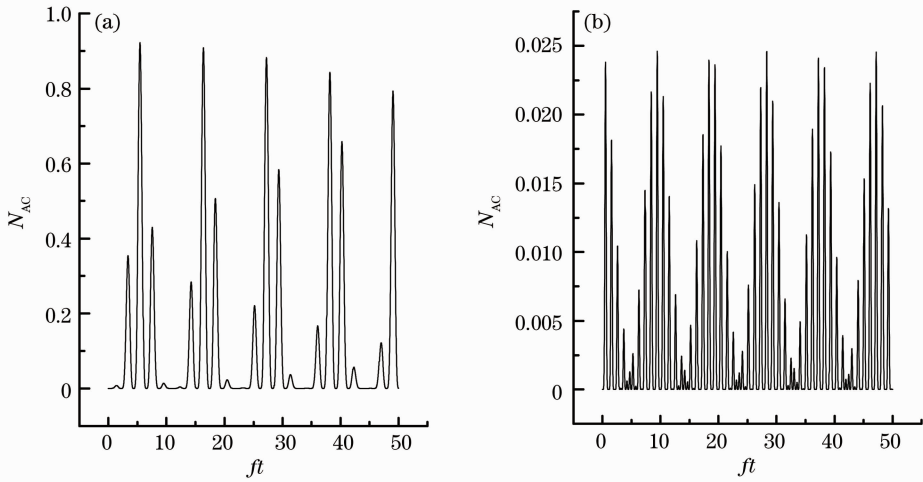


图 5 腔场间纠缠量 N_{AC} 随时间的演化。(a) $J=0.2f$; (b) $J=2.0f$

Fig. 5 Evolution of cavity-cavity entanglement N_{AC} with time. (a) $J=0.2f$; (b) $J=2.0f$

5 结 论

考虑三个耦合腔系统中, 每个腔囚禁一个二能级原子, 并且每个腔中原子通过双光子跃迁与腔场发生共振相互作用的情况。腔与腔之间也通过双光子耦合。运用负本征值来描述两个子系统间的纠缠, 采用数值计算方法研究了两个子系统间的纠缠动力学特性, 给出了腔场间的耦合系数取不同值时两子系统间的纠缠演化曲线。通过比较不同腔场间耦合强度的演化曲线, 可发现: 随耦合腔的耦合系数增大, 两原子间的纠缠增强, 两腔场间的纠缠减弱。

参 考 文 献

- 1 S. B. Zheng. Scheme for approximate conditional teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement[J]. *Phys. Rev. A*, 2004, **69**(6): 064302
- 2 Xiang Shaohua, Shao Bin, Song Kehui. Conditional generation of multiparticle entanglement via cavity QED [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2009, **52**(5): 835~839
- 3 Z. Yang, B. Zhang, S. Zheng. Quantum state engineering by

superpositions of coherent states along a straight line with a single atomic state measurement [J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(14): 2872~2875

- 4 Yang Hongqin, Xie Shusen, Lu Zukang. Teleportation of a three-particle GHZ state via three-particle W states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(2): 300~304
- 杨洪钦, 谢树森, 陆祖康等. 利用三粒子 W 态隐形传送三粒子 GHZ 态 [J]. *光学学报*, 2006, **26**(2): 300~304
- 5 Z. B. Yang. Teleportation of two-atom entangled state in resonant cavity quantum electrodynamics [J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(2): 329
- 6 S. B. Zheng, Z. B. Yang, Y. Xia. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, **81**(1): 015804
- 7 Z. Q. Yin, F. L. Li. Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(1): 012324
- 8 C. D. Ogden, E. K. Irish, M. S. Kim. Dynamics in a coupled-cavity array [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **78**(6): 063805
- 9 Y. L. Zhou, Y. M. Wang, L. M. Liang *et al.*. Quantum state transfer between distant nodes of a quantum network via adiabatic passage [J]. *Phys. Rev. A*, 2009, **79**(4): 044304
- 10 Z. B. Yang, Y. Xia, S. B. Zheng. Resonant scheme for realizing quantum phase gates for two separate atoms via coupled

- cavities [J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(15): 3052~3057
- 11 S. B. Zheng, C. P. Yang, F. Nori. Arbitrary control of coherent dynamics for distant qubits in a quantum network [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, **82**(4): 042327
- 12 Y. Q. Zhang, Z. D. Hu, J. B. Xu. Entanglement transfer through arrays of cavities coupled by optical fibers [J]. *International J. Theoretical Physics*, 2011, **50**(8): 2438~2445
- 13 Pellizzari. Quantum networking with optical fibres [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79**(26): 5242~5245
- 14 S. Y. Ye, Z. R. Zhong, S. B. Zheng. Deterministic generation of three-dimensional entanglement for two atoms separately trapped in two optical cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **77**(1): 014303
- 15 F. Ciccarello. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays [J]. *Phys. Rev. A*, 2011, **83**(4): 043802
- 16 J. Song, X. D. Sun, Y. Xia *et al.*. Efficient creation of continuous-variable entanglement for two atomic ensembles in coupled cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2011, **83**(5): 052309
- 17 P. Peng, F. L. Li. Entangling two atoms in spatially separated cavities through both photon emission and absorption processes [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(6): 062320
- 18 Liu Xiaojuan, Zhou Bingju, Fang Maofa *et al.*. Information entropy squeezing of the atom of an arbitrary initial state via the two-photon process [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 704~711
- 刘小娟, 周并举, 方卯发 等. 双光子过程中任意初态原子的信息熵压缩 [J]. 物理学报, 2006, **55**(2): 704~711
- 19 Zhang Guiming, Li Yueke, Gao Yunfeng. Effects of stark shift on cavity fiend spectra of nondegenerate two-photon Jaynes-Cummings model [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **27**(3): 555~558
- 张桂明, 李悦科, 高云峰. 斯塔克效应对两模双光子 J-C 模型腔场谱的影响 [J]. 光学学报, 2007, **27**(3): 555~558
- 20 Xu Jingping, Yang Yaping. The time-dependent atom-field coupling J-C model with an initial squeezing state: two-photon process [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2): 251~255
- 许静平, 羊亚平. 压缩态光场变耦合系数双光子 J-C 模型性质 [J]. 光学学报, 2005, **25**(2): 251~255
- 21 M. Alexanian. Two-Photon exchange between two three-level atoms in separate cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2011, **83**(2): 023814
- 22 Lu Daoming. The entanglement properties in the system of atoms interacting with coupled cavities via a two-photon hopping interaction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(2): 0229001
- 卢道明. 双光子过程耦合腔系统中的纠缠特性 [J]. 光学学报, 2012, **32**(2): 0229001
- 23 Lu Daoming. Entanglement properties in the system of atoms interacting with three coupled cavities [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(15): 150303
- 卢道明. 三个耦合腔系统中的纠缠特性 [J]. 物理学报, 2012, **61**(15): 150303

栏目编辑: 李文喆