

# 基于单光弹调制器的米勒矩阵测量技术

曹绍谦<sup>1,2</sup> 步 扬<sup>1</sup> 王向朝<sup>1</sup> 李思坤<sup>1</sup> 汤飞龙<sup>1,2</sup> 李中梁<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学与光电技术实验室, 上海 201800)  
<sup>2</sup> 中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 针对已有米勒矩阵测量方法的不足,提出了一种基于单光弹调制器的米勒矩阵测量技术,给出了米勒矩阵测量优化算法及系统参数两步校准法。该技术通过两步校准法对系统参数进行校准测量,利用优化算法计算得到待测样品的米勒矩阵。实验结果表明,待测 1/4 波片相位延迟量测量值为  $90.4185^\circ$ ,误差在标称偏差  $\lambda/300$  以内,快轴方位角测量值为  $0.2348^\circ$ ,误差在最大旋转误差  $0.4^\circ$  以内。同快轴方位角为  $0^\circ$  的 1/4 波片标准米勒矩阵相比,待测 1/4 波片米勒矩阵各元素最大相对误差的直接测量值和间接测量值分别为 1.97% 和 0.83%,均小于最大相对误差的模拟仿真值 2.11%。通过提高旋转台的读数精度和减小相位延迟量的标称偏差,可以进一步减小米勒矩阵各元素的最大相对误差。

**关键词** 测量;偏振;米勒矩阵;单光弹调制器;校准

中图分类号 O436.3 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201333.0112006

## Measurement Technique for the Mueller Matrix Based on a Single Photo-Elastic Modulator

Cao Shaoqian<sup>1,2</sup> Bu Yang<sup>1</sup> Wang Xiangzhao<sup>1</sup> Li Sikun<sup>1</sup> Tang Feilong<sup>1,2</sup> Li Zhongliang<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> *Laboratory of Information Optics and Opto-Electronic Technology, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China*  
<sup>2</sup> *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

**Abstract** A measurement technique for the Mueller matrix based on a single photo-elastic modulator is proposed to improve the current measurement methods. An optimization algorithm and a two-step procedure of system parameter calibration are also presented. System parameters are calibrated by the two-step calibration procedure. Then, the Mueller matrix of the measured sample is obtained with the optimization algorithm. The experimental results show that the retardation and the fast axis angle of the measured quarter-wave plate are  $90.4185^\circ$  and  $0.2348^\circ$ , respectively. The corresponding errors are less than the retardation tolerance  $\lambda/300$  and the maximum rotation error  $0.4^\circ$ , respectively. Compared to the standard Mueller matrix of a quarter-wave plate whose fast axis angle is set at  $0^\circ$ , the maximum relative errors of each element of the Mueller matrix of the measured quarter-wave plate are 1.97% and 0.83% with direct and indirect measurement method, respectively. Both errors are less than 2.11%, which is the simulation value of the maximum relative error. Decreasing the retardation tolerance or improving the precision of the rotation stage can diminish the maximum relative error of each element of the Mueller matrix.

**Key words** measurement; polarization; Mueller matrix; single photo-elastic modulator; calibration

**OCIS codes** 120.2130; 120.5050; 120.5060; 120.5410; 260.1440; 260.5430

收稿日期: 2012-07-19; 收到修改稿日期: 2012-09-06

基金项目: 国家自然科学基金(60938003, 61205102, 61275207)和科技部国际科技合作项目(2011DFR10010)资助课题。

作者简介: 曹绍谦(1986—),男,硕士研究生,主要从事超大数值孔径光刻成像与图形保真技术等方面的研究。

E-mail: sqcao@siom.ac.cn

导师简介: 步 扬(1973—),男,研究员,硕士生导师,主要从事信息光电子技术方面的研究。

E-mail: buyang@siom.ac.cn(通信联系人)

# 1 引 言

米勒矩阵表示法是一种描述光学材料及元器件光学各向异性、旋光性的有效且普遍的方法<sup>[1~5]</sup>。米勒矩阵通常无法通过理论推导得到,而是通过实验来确定。常用的米勒矩阵测量方法主要包括旋转光学元件法<sup>[6~8]</sup>和相位调制法<sup>[9,10]</sup>。旋转光学元件法要求光源持续稳定,各旋转光学元件的两个通光面必须严格与系统光轴垂直,以免旋转光学元件时光束偏离系统光轴。因此,测量系统复杂,测量精度难以保证。相位调制法可以实现相位的自动调制,调制频率高,可以保证米勒矩阵的测量精度。光弹调制器(PEM)具有高灵敏度、宽光谱范围及高精度相位调制的特性,广泛应用在相位调制法中<sup>[11~14]</sup>。基于双光弹调制器的米勒矩阵测量方法精度高,但是结构复杂,费用昂贵。基于单光弹调制器的米勒矩阵测量方法需要在测量过程中旋转 1/4 波片、光弹调制器及检偏器等数种器件 30 余次,旋转次数多,测量误差较大。针对上述米勒矩阵测量技术的不足,本文提出一种基于单光弹调制器的米勒矩阵测量技术。

# 2 原 理

## 2.1 测量原理

基于单光弹调制器的米勒矩阵测量装置如图 1 所示。起偏器 P 透振方向沿 X 轴,设为 0°,PEM 振

动轴方向和起偏器透振方向平行,检偏器 A 透振方向在两种状态下与 X 轴分别成 45°和 22.5°。起偏器和 1/4 波片(QWP)组成偏振态发生器(PSG),PEM 和检偏器组成偏振态分析器(PSA)。激光器 L 出射的准直激光束通过 PSG、待测样品 S 及 PSA 后,由光电探测器(PD)接收。PD 探测到的信号经前置放大后进入信号调理器(SCU),分离出直流分量(DC)和交流分量(AC),DC 经数据采集卡采集后输入计算机(PC),AC 分别由锁相放大器 LIA-A 和 LIA-B 锁相后得到基频分量和二次谐波分量,经数据采集卡采集后输入到 PC。旋转 1/4 波片,使 PSG 依次产生四束线性无关的偏振光,测量对应状态下检偏器透振方向分别为 45°和 22.5°时的直流分量、基频分量和二次谐波分量。通过处理与分析各次谐波分量,在无须旋转光弹调制器振动轴方向且只需旋转 4 次 1/4 波片和 8 次检偏器透振方向的情况下,即可得到待测样品的米勒矩阵。

从激光器 L 出射的激光束,经过起偏器 P、1/4 波片后,产生偏振光为<sup>[15]</sup>

$$S^{in} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^2 2\beta \\ \sin 2\beta \cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中起偏器透振方向沿 X 轴,即  $\alpha = 0^\circ$ ,1/4 波片快轴方位与 X 轴成  $\beta$  角。

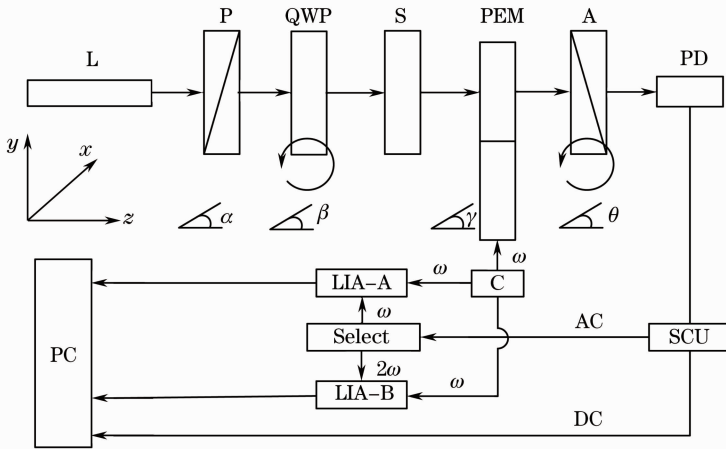


图 1 米勒矩阵测量装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram for measuring the Mueller matrix

偏振光  $S^{in}$  经过待测样品 S 后,输出的偏振光  $S^{out}$  为

$$S^{out} = MS^{in}, \quad (2)$$

式中  $M$  为待测样品的米勒矩阵。

PSG 产生四束线性无关的偏振光束依次通过待测样品时,有

$$S_i^{out} = MS_i^{in}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{S}_i^{\text{in}} = \begin{pmatrix} S_{0i}^{\text{in}} \\ S_{1i}^{\text{in}} \\ S_{2i}^{\text{in}} \\ S_{3i}^{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^2 2\beta_i \\ \sin 2\beta_i \cos 2\beta_i \\ \sin 2\beta_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} S_{01}^{\text{in}} & S_{02}^{\text{in}} & S_{03}^{\text{in}} & S_{04}^{\text{in}} \\ S_{11}^{\text{in}} & S_{12}^{\text{in}} & S_{13}^{\text{in}} & S_{14}^{\text{in}} \\ S_{21}^{\text{in}} & S_{22}^{\text{in}} & S_{23}^{\text{in}} & S_{24}^{\text{in}} \\ S_{31}^{\text{in}} & S_{32}^{\text{in}} & S_{33}^{\text{in}} & S_{34}^{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_i^{\text{out}} = \begin{pmatrix} S_{0i}^{\text{out}} \\ S_{1i}^{\text{out}} \\ S_{2i}^{\text{out}} \\ S_{3i}^{\text{out}} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

对于四束偏振光, (3)式可以改写为

$$\mathbf{R} = \mathbf{MT}, \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} S_{01}^{\text{out}} & S_{02}^{\text{out}} & S_{03}^{\text{out}} & S_{04}^{\text{out}} \\ S_{11}^{\text{out}} & S_{12}^{\text{out}} & S_{13}^{\text{out}} & S_{14}^{\text{out}} \\ S_{21}^{\text{out}} & S_{22}^{\text{out}} & S_{23}^{\text{out}} & S_{24}^{\text{out}} \\ S_{31}^{\text{out}} & S_{32}^{\text{out}} & S_{33}^{\text{out}} & S_{34}^{\text{out}} \end{pmatrix},$$

PSG产生的四束偏振光线性无关, 矩阵  $\mathbf{T}$  可逆, 有

$$\mathbf{M} = \mathbf{RT}^{-1}. \quad (7)$$

通过测量得到矩阵  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{R}$ , 即可计算得到待测样品米勒矩阵  $\mathbf{M}$ , 其中矩阵  $\mathbf{T}$  通过  $1/4$  波片方位角的四种组合 ( $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ) 求得<sup>[16]</sup>。矩阵  $\mathbf{R}$  中  $S_i^{\text{out}}$  通过 PSA 测量得到, 其测量原理如下。

从待测样品出射的偏振光束  $S_i^{\text{out}}$  经过 PEM 和检偏器 A 后, 由 PD 接收, 其光强大小为<sup>[12]</sup>

$$I = \frac{1}{2} S_{0i}^{\text{out}} + \frac{1}{2} S_{1i}^{\text{out}} \cos(2\theta - 2\gamma) \cos 2\gamma + \frac{1}{2} S_{2i}^{\text{out}} \cos(2\theta - 2\gamma) \sin 2\gamma - \frac{1}{2} J_0(\delta_0) S_{1i}^{\text{out}} \sin(2\theta - 2\gamma) \sin 2\gamma + \frac{1}{2} J_0(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}} \sin(2\theta - 2\gamma) \cos 2\gamma + J_1(\delta_0) S_{3i}^{\text{out}} \sin(2\theta - 2\gamma) \sin \omega t - J_2(\delta_0) S_{1i}^{\text{out}} \sin(2\theta - 2\gamma) \sin 2\gamma \cos 2\omega t + J_2(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}} \sin(2\theta - 2\gamma) \cos 2\gamma \cos 2\omega t + \dots, \quad (8)$$

式中  $\gamma, \delta_0$  和  $\omega$  分别为光弹调制器的振动轴方向、峰值相位延迟量和调制频率,  $\theta$  为检偏器的透振方向,  $J_0(\delta_0), J_1(\delta_0)$  和  $J_2(\delta_0)$  分别为零阶、一阶和二阶贝塞尔函数。

当  $\gamma = 0^\circ, \theta = 45^\circ$  时, 光强为

$$I = \frac{1}{2} S_{0i}^{\text{out}} + \frac{1}{2} J_0(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}} + J_1(\delta_0) S_{3i}^{\text{out}} \sin \omega t + J_2(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}} \cos 2\omega t + \dots. \quad (9)$$

改变检偏器透振方向为  $\theta = 22.5^\circ$ , 则

$$I = \frac{1}{2} S_{0i}^{\text{out}} + \frac{\sqrt{2}}{4} S_{1i}^{\text{out}} + \frac{\sqrt{2}}{4} J_0(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}} + \frac{\sqrt{2}}{2} J_1(\delta_0) S_{3i}^{\text{out}} \sin \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} J_2(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}} \cos 2\omega t + \dots. \quad (10)$$

通过(9)、(10)式可得输出光 Stokes 参数  $S_{0i}^{\text{out}}, S_{1i}^{\text{out}}, S_{2i}^{\text{out}}, S_{3i}^{\text{out}}$ 。(9)、(10)式中的直流分量、基频分量、二次谐波分量分别用  $I_{1\text{dc}}, I_{1\text{QU1}}, I_{1\text{QU2}}$  和  $I_{2\text{dc}}, I_{2\text{QU1}}, I_{2\text{QU2}}$  表示, 则

$$\begin{aligned} I_{1\text{dc}} &= \frac{1}{2} S_{0i}^{\text{out}} + \frac{1}{2} J_0(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}}, & I_{1\text{QU1}} &= J_1(\delta_0) S_{3i}^{\text{out}}, \\ I_{1\text{QU2}} &= J_2(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}}, & I_{2\text{dc}} &= \frac{1}{2} S_{0i}^{\text{out}} + \frac{\sqrt{2}}{4} S_{1i}^{\text{out}} + \frac{\sqrt{2}}{4} J_0(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}}, \\ I_{2\text{QU1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} J_1(\delta_0) S_{3i}^{\text{out}}, & I_{2\text{QU2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} J_2(\delta_0) S_{2i}^{\text{out}}. \end{aligned} \quad (11)$$

对于特定频率信号, 光电探测器量子效率及锁相放大器放大倍数一定<sup>[17~20]</sup>, 则

$$\begin{aligned} I_{1\text{dc}} &= c_{\text{dc}} S_{1\text{dc}}, & I_{1\text{QU1}} &= c_{\text{QU1}} S_{1\text{QU1}}, \\ I_{1\text{QU2}} &= c_{\text{QU2}} S_{1\text{QU2}}, & I_{2\text{dc}} &= k c_{\text{dc}} S_{2\text{dc}}, \\ I_{2\text{QU1}} &= k c_{\text{QU1}} S_{2\text{QU1}}, & I_{2\text{QU2}} &= k c_{\text{QU2}} S_{2\text{QU2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $I_{1\text{dc}}, S_{1\text{dc}}$  和  $c_{\text{dc}}$  分别为理论探测信号、实际探测信号、理论探测信号与实际探测信号之间的比例系数,  $k$  为检偏器旋转前后光强的波动系数

$$k = \frac{\sqrt{2} S_{1\text{QU1}}}{2 S_{2\text{QU1}}}, \text{ or } k = \frac{\sqrt{2} S_{1\text{QU2}}}{2 S_{2\text{QU2}}}. \quad (13)$$

由(11)、(12)式得

$$\begin{pmatrix} S_{1dc} \\ S_{2dc} \\ S_{1QU2} \\ S_{1QU1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c_{dc}} & 0 & \frac{J_0(\delta_0)}{2c_{dc}} & 0 \\ \frac{1}{2kc_{dc}} & \frac{\sqrt{2}}{4kc_{dc}} & \frac{\sqrt{2}J_0(\delta_0)}{4kc_{dc}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_2(\delta_0)}{c_{QU2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_1(\delta_0)}{c_{QU1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{0i}^{out} \\ S_{1i}^{out} \\ S_{2i}^{out} \\ S_{3i}^{out} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} S_{0i}^{out} \\ S_{1i}^{out} \\ S_{2i}^{out} \\ S_{3i}^{out} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

当矩阵  $\mathbf{G}$  在对角线上的 4 个元素都不为零时,该矩阵可逆,则

$$\begin{pmatrix} S_{0i}^{out} \\ S_{1i}^{out} \\ S_{2i}^{out} \\ S_{3i}^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_{dc} & 0 & -\frac{J_0(\delta_0)c_{QU2}}{J_2(\delta_0)} & 0 \\ -2\sqrt{2}c_{dc} & 2\sqrt{2}kc_{dc} & \frac{(\sqrt{2}-1)J_0(\delta_0)c_{QU2}}{J_2(\delta_0)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{QU2}}{J_2(\delta_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{QU1}}{J_1(\delta_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{1dc} \\ S_{2dc} \\ S_{1QU2} \\ S_{1QU1} \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} S_{1dc} \\ S_{2dc} \\ S_{1QU2} \\ S_{1QU1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

当  $J_0(\delta_0) = 0$ , 即  $\delta_0 = 2.4048 \text{ rad} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.383\lambda$  时, (15) 式改为

$$\begin{pmatrix} S_{0i}^{out} \\ S_{1i}^{out} \\ S_{2i}^{out} \\ S_{3i}^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_{dc} & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2}c_{dc} & 2\sqrt{2}kc_{dc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{QU2}}{J_2(\delta_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{QU1}}{J_1(\delta_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{1dc} \\ S_{2dc} \\ S_{1QU2} \\ S_{1QU1} \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} S_{1dc} \\ S_{2dc} \\ S_{1QU2} \\ S_{1QU1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

在矩阵  $\mathbf{G}^{-1}$  已知情况下,通过测量  $S_{1dc}$ 、 $S_{2dc}$ 、 $S_{1QU2}$  和  $S_{1QU1}$ ,即可完成对  $S_i^{out}$  及矩阵  $\mathbf{R}$  的测量,进而根据(7)式得到米勒矩阵。

## 2.2 矩阵 $\mathbf{G}^{-1}$ 中未知参数的校准原理

在实验过程中,光电探测器量子效率及锁相放大器放大倍数未知,即矩阵  $\mathbf{G}^{-1}$  中  $c_{dc}$ 、 $c_{QU1}$  和  $c_{QU2}$  为未知数,因此对待测样品米勒矩阵进行测量前,需要对该实验装置的矩阵  $\mathbf{G}^{-1}$  进行测量并校准。对于完全偏振光,有<sup>[12]</sup>

$$(S_{0i}^{out})^2 = (S_{1i}^{out})^2 + (S_{2i}^{out})^2 + (S_{3i}^{out})^2. \quad (17)$$

由(16)、(17)式可以得到

$$(S_{1dc})^2 = 2(kS_{2dc} - S_{1dc})^2 + k_2^2(S_{1QU2})^2 + k_1^2(S_{1QU1})^2, \quad (18)$$

式中  $k_2 = \frac{c_{QU2}}{2c_{dc}J_2(\delta_0)}$ ,  $k_1 = \frac{c_{QU1}}{2c_{dc}J_1(\delta_0)}$ 。

通过测量与校准参数  $k_1$ 、 $k_2$ ,即可完成对未知参数  $c_{dc}$ 、 $c_{QU1}$  和  $c_{QU2}$  的求解。

当入射光  $S_i^{out}$  为完全线偏振光,即  $S_{1QU1} = J_1(\delta_0)S_{3i}^{out}/c_{QU1} = 0$  时, (18) 式改为

$$(S_{1dc})^2 - 2(kS_{2dc} - S_{1dc})^2 = k_2^2(S_{1QU2})^2, \quad (19)$$

式中  $(S_{1dc})^2 - 2(kS_{2dc} - S_{1dc})^2$  和  $(S_{1QU2})^2$  成线性关系。利用该线性关系,通过对多组实验数据进行线性拟合,即可以对参数  $k_2$  进行校准。

当入射光  $S_i^{out}$  为椭圆偏振光时,  $(S_{1dc})^2 - 2(kS_{2dc} - S_{1dc})^2 - k_2^2(S_{1QU2})^2$  和  $(S_{1QU1})^2$  成线性关系,同样利用该线性关系,通过对多组实验数据进行线性拟合,对参数  $k_1$  进行校准。

## 3 实 验

实验光源采用波长为 632.8 nm 的 He-Ne 激光器。起偏器和检偏器均为格兰-泰勒棱镜,其消光比优于  $10^{-5}$ 。光弹调制器为 Hinds 公司 PEM-100 系列 I/FS60 型,其调制频率为 60 kHz,峰值相位延迟量  $\delta_0 = 2.4048 \text{ rad}$ 。1/4 波片和待测样品均为胶合零级 1/4 波片,其相位延迟量的标称偏差为  $\lambda/300$ ,其快轴方位已经被校准。光电探测器是 Hinds 公司的 DET-200 光电探测器和前置放大器。信号调

理单元为 Hinds 公司 SCU-100 信号调理单元。锁相放大器 LIA-A 和 LIA-B 为 Hinds 公司 SIGNALOC™ 2100 锁相放大器。

### 3.1 矩阵 $G^{-1}$ 参数校准

#### 3.1.1 $k_2$ 校准

首先将起偏器透振方向基本调整到水平位置,并设为  $X$  轴,检偏器旋转至消光位置,即检偏器透振方向为  $90^\circ$ ;其次将光弹调制器振动轴方向基本调整至水平位置,并放入光路中,慢慢旋转至二次谐波分量的消光位置(或者直流分量的消光位置),此时 PEM 振动轴方向平行于  $X$  轴;旋转起偏器,使起偏器透振方向依次为  $-90^\circ, -80^\circ, \dots, 80^\circ, 90^\circ$ ,测量对应状态下检偏器透振方向分别为  $45^\circ$  和  $22.5^\circ$  时的直流分量、基频分量和二次谐波分量。

测量数据表明,相对于  $S_{1dc}$  来说,  $S_{1QU1}$  和  $S_{2QU1}$  都近似为零,和校准法中入射光  $S_i^{int}$  为完全线偏振光时分析情况相一致。对测量实验数据进行线性拟合,如图 2 所示。

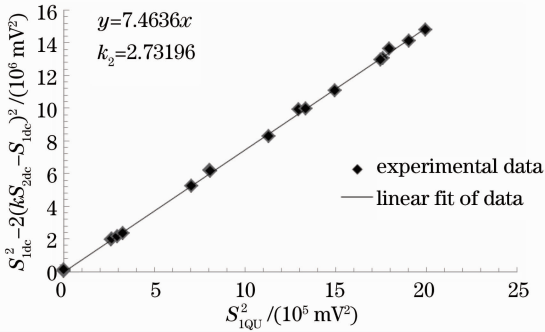


图 2  $k_2$  的校准曲线

Fig. 2 Calibration curve for  $k_2$

线性拟合(见图 2)显示,系数  $k_2^2$  的标准误差为 0.0243,趋近于 0,拟合直线的复相关系数为 0.9998,趋近于 1,表明实验数据线性度很好。该实验数据校准曲线和(19)式中的线性关系相一致。

#### 3.1.2 $k_1$ 校准

同  $k_2$  校准法,首先将起偏器透振方向调整到水平位置,检偏器旋转至消光位置,光弹调制器振动轴方向调整至水平位置;其次将  $1/4$  波片快轴方位基本调到水平位置,放入光路中,慢慢旋转至直流分量的消光位置,此时  $1/4$  波片快轴方位角为  $0^\circ$ 。旋转  $1/4$  波片,使  $1/4$  波片快轴方位依次为  $-90^\circ, -80^\circ, \dots, 80^\circ, 90^\circ$ ,测量对应状态下检偏器透振方向分别为  $45^\circ$  和  $22.5^\circ$  时的直流分量、基频分量和二次谐波分量。对测得的实验数据进行直线拟合,如图 3 所示,其中  $k_2^2 = 7.4636$ 。

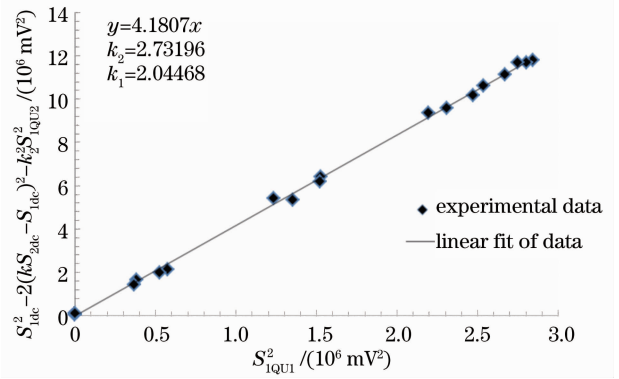


图 3  $k_1$  的校准曲线

Fig. 3 Calibration curve for  $k_1$

线性拟合(见图 3)显示,系数  $k_1^2$  的标准误差为 0.0198,趋近于 0,拟合直线的复相关系数为 0.9996,趋近于 1,表明实验数据线性度很好。该实验数据校准曲线和(18)式中的线性关系相一致。

### 3.2 待测 $1/4$ 波片米勒矩阵的测量实验

测量方法包括两种:直接测量方法和间接测量方法。直接测量是通过测量不同角度组合时的光强各次谐波分量值,直接得到矩阵  $R$  和  $T$ ,然后根据(5)式和(7)式直接计算得到待测  $1/4$  波片的米勒矩阵。间接测量是将直接测量方法中得到的米勒矩阵各对应元素[即(22)式中米勒矩阵各对应元素]代入到相位延迟量和快轴方位角算法(24)、(25)式中,得到待测  $1/4$  波片的相位延迟量及快轴方位角,然后再通过米勒矩阵(23)式计算得到待测  $1/4$  波片的米勒矩阵。

#### 3.2.1 直接测量

依照  $k_1$  的校准法,首先将起偏器透振方向调整到水平位置,检偏器旋转至消光位置,光弹调制器振动轴方向调整至水平位置, $1/4$  波片快轴方位调到水平位置,其次将待测样品(待测  $1/4$  波片)快轴方位调到水平位置,此时  $1/4$  波片和待测  $1/4$  波片快轴方位角均为  $0^\circ$ 。旋转  $1/4$  波片,使  $1/4$  波片快轴方位角依次为  $-90^\circ, -45^\circ, 30^\circ$  和  $60^\circ$ ,测量对应状态下检偏器透振方向分别为  $45^\circ$  和  $22.5^\circ$  时的直流分量、基频分量和二次谐波分量。实验数据如表 1 所示。

结合(6)、(16)、(18)式以及校准法中得到的  $k_2, k_1$ , 矩阵  $R$  在  $1/4$  波片角度组合  $-90^\circ, -45^\circ, 30^\circ$  和  $60^\circ$  情况下的测量结果为

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.9989 & 0.0051 & 0.2536 & 0.2503 \\ 0.0170 & -1.0000 & 0.8660 & 0.8660 \\ 0.0081 & 0.0152 & -0.4330 & 0.4330 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

表 1 待测 1/4 波片米勒矩阵的测量数据

Table 1 Data of the Mueller matrix of the measured quarter-wave plate

$\beta / (^{\circ})$	$\theta = 45^{\circ}$			$\theta = 22.5^{\circ}$		
	$S_{1dc}/mV$	$S_{1QU1}/mV$	$S_{1QU2}/mV$	$S_{2dc}/mV$	$S_{2QU1}/mV$	$S_{2QU2}/mV$
-90	4928	19.6	30.7	4965	47.4	74.7
-45	3857	28.6	1411.8	4200	21.9	1085.2
30	3700	783.6	1172.9	4577	581.2	869.9
60	3914	828.9	1240.7	4495	569.9	859

结合(4)、(6)式,矩阵  $T$  在 1/4 波片角度组合  $-90^{\circ}, -45^{\circ}, 30^{\circ}$  和  $60^{\circ}$  情况下的矩阵值为

$$T = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4330 & -0.4330 \\ 0.0000 & -1.0000 & 0.8660 & 0.8660 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

将(20)、(21)式代入(5)、(7)式,待测 1/4 波片直接测量得到的米勒矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0042 & 0.9947 & 0.0038 & -0.0010 \\ -0.0026 & 0.0197 & 0.0000 & 0.9974 \\ 0.0069 & 0.0013 & -1.0000 & -0.0083 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

### 3.2.2 间接测量法

相位延迟量为  $\delta$ 、快轴方位角为  $\varphi$  的相位延迟器的米勒矩阵为<sup>[21,22]</sup>

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \cos \delta & (1 - \cos \delta) \sin 2\varphi \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \sin \delta \\ 0 & (1 - \cos \delta) \sin 2\varphi \cos 2\varphi & \sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \cos \delta & \cos 2\varphi \sin \delta \\ 0 & \sin 2\varphi \sin \delta & -\cos 2\varphi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (23)$$

根据(23)式可以推导出待测 1/4 波片的相位延迟量及快轴方位角分别为

$$\delta = \frac{\arccos(m_{22} + m_{33} - m_{11}) + \left\{ \arctan \left[ \frac{\sqrt{(m_{42} - m_{24})^2 + (m_{34} - m_{43})^2}}{2m_{44}} \right] + 180^{\circ} \right\}}{3} + \frac{\arccos m_{44}}{3} = \frac{90.3037^{\circ} + 90.4762^{\circ} + 90.4756^{\circ}}{3} = 90.4185^{\circ}, \quad (24)$$

$$\varphi = \frac{\arctan \left( \frac{1}{2} \frac{m_{23} + m_{32}}{m_{11} - m_{33}} \right) + \arctan \left[ \frac{2(m_{23} + m_{32})(m_{11} + m_{44})}{(m_{34} - m_{43})^2} \right]}{6} - \frac{1}{6} \arctan \left( \frac{m_{24} - m_{42}}{m_{34} - m_{43}} \right) = \frac{0.3366^{\circ} + 0.3347^{\circ} + 0.0330^{\circ}}{3} = 0.2348^{\circ}, \quad (25)$$

式中  $m_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  为待测 1/4 波片米勒矩阵各对应元素[即(22)式中米勒矩阵中各对应元素]。从(24)、(25)式计算过程及结果可以看出,三种不同计算算法得到的待测 1/4 波片相位延迟量和快轴方位角分别为  $90.3037^{\circ}$ 、 $90.4762^{\circ}$ 、 $90.4756^{\circ}$  和  $0.3366^{\circ}$ 、 $0.3347^{\circ}$ 、 $0.0330^{\circ}$ , 平均值分别为  $90.4185^{\circ}$  和  $0.2348^{\circ}$ 。相位延迟量误差在标称偏差  $\lambda/300$  (即相位延迟量在  $88.8^{\circ} \sim 91.2^{\circ}$  之间) 以内,快轴方位角误差在最大旋转误差 ( $0.4^{\circ}$ ) 以内。

当待测 1/4 波片快轴方位角为  $0.2348^{\circ}$ , 相位延

迟量为  $90.4185^{\circ}$  时,根据(23)式,间接测量所测得的米勒矩阵为

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9999 & 0.0083 & -0.0082 \\ 0.0000 & 0.0083 & -0.0072 & 0.9999 \\ 0.0000 & 0.0082 & -0.9999 & -0.0073 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

当标准 1/4 波片的快轴方位角为  $0^{\circ}$  时,其标准米勒矩阵为<sup>[21]</sup>

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

标准米勒矩阵中各元素绝对值最大为 1。比较(22)和(27)式,实验直接测量得到待测 1/4 波片米勒矩阵各元素的最大相对误差为 1.97%。比较(26)和(27)式,实验间接测量得到待测 1/4 波片米勒矩阵各元素的最大相位误差只有 0.83%,小于直接测量所得到的最大相位误差 1.97%。

## 4 误差分析

实验中误差来源主要有待测 1/4 波片相位延迟量的标称偏差,检偏器、起偏器的旋转定位误差。

只考虑待测 1/4 波片的相位延迟量的标称偏差对测量结果的影响。待测 1/4 波片相位延迟量的标称偏差  $\lambda/300$ ,即  $1.2^\circ$ 。根据(23)式,1/4 波片快轴方位角为  $0^\circ$ ,相位延迟为  $91.2^\circ$  时的米勒矩阵为

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0209 & 0.9998 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.9998 & -0.0209 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

比较(27)和(28)式,由相位延迟量的标称偏差引起的米勒矩阵各元素的最大相对误差为 2.09%。当 1/4 波片快轴方位角为  $0^\circ$ ,相位延迟为  $88.8^\circ$  时,由相位延迟量的标称偏差引起米勒矩阵各元素的最大相对误差也为 2.09%。

由于实验中起偏器和检偏器旋转台的读数精度为  $0.2^\circ$ ,因此会对待测 1/4 波片快轴方位角带来  $0.4^\circ$  的误差。只考虑旋转误差时,模拟仿真表明,由起偏器和检偏器旋转引起米勒矩阵各元素的最大相对误差均为 1.40%。同时考虑相位延迟量的标称偏差及起偏器、检偏器的旋转误差时,由旋转及标称偏差共同引起米勒矩阵各元素的最大相对误差为 2.11%。

模拟仿真过程中,所用的相位延迟量误差为最大标称偏差  $\lambda/300$ ,快轴方位角误差为最大旋转误差  $0.4^\circ$ 。在实际实验测量过程中,用到的待测 1/4 波片相位延迟量误差在最大标称偏差  $\lambda/300$  以内,快轴方位角误差在最大旋转误差  $0.4^\circ$  以内。因此,待测 1/4 波片米勒矩阵各元素最大相对误差的模拟仿真值 2.11% 要大于实验测量值。在间接测量过程中,由于采用了三种不同的算法计算相位延迟量

和快轴方位角,并将其平均值作为相位延迟量和快轴方位角实际值,因此,采用该方法测得的待测 1/4 波片米勒矩阵的各元素最大相对误差 0.83% 相对于模拟仿真值 2.11% 和直接测量值 1.97% 具有更高的精度。

模拟计算表明,当待测 1/4 波片的相位延迟量标称偏差减小到  $\lambda/500$ ,起偏器和检偏器旋转台的读数精度提高到  $0.05^\circ$  时,由旋转及标称偏差共同引起米勒矩阵各元素最大相对误差的模拟仿真值可以减小到 1.26%,实验直接测量值将在 1.26% 以内,间接测量值精度将会更高。因此,通过提高旋转台的读数精度和减小相位延迟量的标称偏差,可以进一步减小米勒矩阵各元素的最大相对误差。

## 5 结论

本文提出了一种基于单光弹调制器的米勒矩阵测量技术,给出了米勒矩阵测量优化算法及系统参数两步校准法。该技术首先通过两步校准法对系统参数进行校准测量,然后利用优化算法计算得到待测样品的米勒矩阵。对快轴方位角为  $0^\circ$ ,相位延迟量标称偏差为  $\lambda/300$  的 1/4 波片的测量实验结果表明,待测 1/4 波片相位延迟量实际测量值为  $90.4185^\circ$ ,误差在标称偏差  $\lambda/300$  以内,快轴方位角实际测量值为  $0.2348^\circ$ ,误差在最大旋转误差  $0.4^\circ$  以内。同快轴方位角为  $0^\circ$  的 1/4 波片标准米勒矩阵相比,待测 1/4 波片米勒矩阵各元素最大相对误差的模拟仿真值、直接测量值和间接测量值分别为 2.11%、1.97% 和 0.83%。模拟仿真精度最低,直接测量次之,间接测量方法精度最高。通过提高旋转台的读数精度和减小相位延迟量的标称偏差,可以进一步减小米勒矩阵各元素的最大相对误差,提高米勒矩阵测量精度。

## 参考文献

- 1 M. Losurdo, M. M. Giangregorio, P. Capezuto *et al.*. Structural and optical properties of nanocrystalline  $\text{Er}_2\text{O}_3$  thin films deposited by a versatile low-pressure MOCVD approach [J]. *J. Electrochem. Soc.*, 2008, **155**(2): G44~G50
- 2 M. Losurdo, M. Bergmair, G. Bruno. Spectroscopic ellipsometry and polarimetry for materials and systems analysis at the nanometer scale: state-of-the-art, potential, and perspectives [J]. *J. Nanopart. Res.*, 2009, **11**(7): 1521~1554
- 3 G. R. McIntyre, J. Kye, H. Levinson *et al.*. Polarization aberrations in hyper-numerical-aperture projection printing: a comparison of various representations [J]. *Microolith., Microfab. Microsyst.*, 2006, **5**(3): 033001
- 4 S. B. Hatit, M. Foldyna, A. D. Martino *et al.*. Angle-resolved Mueller polarimeter using a microscope objective [J]. *Phys.*

- Stat. Sol. (A), 2008, **205**(4): 743~747
- 5 R. A. Chipman. Handbook of Optics [M]. New York: McGraw Hill, Inc., 1995
- 6 D. H. Goldstein. Mueller matrix dual-rotating retarder polarimeter [J]. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(31): 6676~6683
- 7 R. W. Collins, J. Koh. Dual rotating-compensator multichannel ellipsometer; instrument design for real-time Mueller matrix spectroscopy of surfaces and films [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(8): 1997~2006
- 8 I. J. Vaughn, B. G. Hoover. Noise reduction in a laser polarimeter based on discrete waveplate rotations [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(3): 2091~2108
- 9 A. D. Martino, Y. K. Kim, E. Garcia-Caurel *et al.*. Optimized Mueller polarimeter with liquid crystals [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(8): 616~618
- 10 D. Goldstein. Polarized Light [M]. New York: Marcel Dekker, Inc., 2003
- 11 Aijun Zeng, Fanyue Li, Linglin Zhu *et al.*. Simultaneous measurement of retardance and fast axis angle of a quarter-wave plate using one photoelastic modulator [J]. *Appl. Opt.*, 2011, **50**(22): 4347~4352
- 12 Y. W. Liu, G. A. Jones, Y. Peng *et al.*. Generalized theory and application of Stokes parameter measurements made with a single photoelastic modulator [J]. *Appl. Phys.*, 2006, **100**(6): 063537
- 13 B. Wang, T. C. Oakberg. A new instrument for measuring both the magnitude and angle of low level linear birefringence [J]. *Rev. Sci. Instrum.*, 1999, **70**(10): 3847~3854
- 14 W. Guan, G. A. Jones, Y. W. Liu *et al.*. The measurement of the Stokes parameters: a generalized methodology using a dual photoelastic modulator system [J]. *Appl. Phys.*, 2008, **49**(14): 2644~2652
- 15 Y. Takakura, J. E. Ahmad. Noise distribution of Mueller matrices retrieved with active rotating polarimeters [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(30): 7354~7364
- 16 A. Ambirajan, D. C. Look. Optimum angles for a polarimeter; part 1 [J]. *Opt. Eng.*, 1995, **34**(6): 1651~1655
- 17 Yang Kun, Zeng Aijun, Wang Xiangzhao *et al.*. Fast axis calibration of quarter-wave plate by fundamental component extinction [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(11): 1554~1556  
杨 坤, 曾爱军, 王向朝 等. 基于基频分量消光的 1/4 波片快轴标定方法[J]. *中国激光*, 2007, **34**(11): 1554~1556
- 18 Hu Jianming, Zeng Aijun, Wang Xiangzhao. Method to measure phase retardation of wave plate based on photoelastic modulation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(11): 1681~1686  
胡建明, 曾爱军, 王向朝. 基于光弹调制技术的波片相位延迟量测量方法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(11): 1681~1686
- 19 Zeng Aijun, Wang Xiangzhao, Dong Zuoren *et al.*. Application of photoelastic modulator in modulation of polarization direction [J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(8): 1063~1067  
曾爱军, 王向朝, 董作人 等. 光弹调制器在偏振方向调制中的应用[J]. *中国激光*, 2005, **32**(8): 1063~1067
- 20 Zeng Aijun, Wang Xiangzhao, Li Dailin *et al.*. A new method to calibrate accurately a photoelastic modulator [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 799~802  
曾爱军, 王向朝, 李代林 等. 精确标定光弹调制器的新方法[J]. *光学学报*, 2005, **25**(6): 799~802
- 21 Baoliang Wang, T. C. Oakberg. A new instrument for measuring both the magnitude and angle of low level linear birefringence [J]. *Rev. Sci. Instrum.*, 1999, **70**(10): 3847~3854
- 22 Li Fanyue, Han Jie, Zeng Aijun *et al.*. Method for measuring retardation by swinging quarter-wave plate with phase modulator [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(2): 0208003  
李凡月, 韩 杰, 曾爱军 等. 基于相位调制和样品摆动的 1/4 波片相位延迟量测量方法[J]. *中国激光*, 2011, **38**(2): 0208003

栏目编辑: 何卓铭