

双变量正交多项式描述光学自由曲面

王庆丰 程德文* 王涌天

(北京理工大学光电学院, 北京 100081)

摘要 推导了单位圆域和单位方域内的双变量正交多项式曲面的数学模型,详细分析了将不同正交多项式曲面应用于自由曲面拟合的精度问题。采用均匀随机、阵列分布和环状辐射三种采样方式,并选择具有代表性的普通非球面、自由曲面以及 Peaks 自由曲面进行了大量的拟合实验。实验结果表明:三种采样方法中,阵列采样的拟合适应度最高;XY 多项式和正交 XY 多项式的拟合适应度最高;方域和圆域内正交的泽尼克多项式在曲面拟合中优势显著;双变量正交切比雪夫多项式在方域内、阵列采样的情况下曲面拟合优势明显。

关键词 光学设计;自由曲面光学;面形拟合;正交多项式;采样类型

中图分类号 TP302.7 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201232.0922002

Description of Free-form Optical Curved Surface Using Two-Variable Orthogonal Polynomials

Wang Qingfeng Cheng Dewen Wang Yongtian

(School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract The orthogonal polynomials of two variables are generated on the unit circle and unit square, and a detailed analysis of the free-form fitting precision is carried out using the orthogonal polynomials with three different sampling grids, which are uniformly pseudo-random grid, array grid and circular grid. To ensure the universality of the fitting analysis, many experiments are conducted on rotationally symmetric aspheric surfaces, free-form surfaces and Peaks free-form surfaces. According to the experiments, among the three sampling grids, the array sampling grid is suitable for most fitting situations. XY-polynomial and orthogonal XY-polynomial give better fitting precision than other surface types in most cases on the wave-front fitting, the orthogonal Zernike polynomial has advantage in circle or square domain and orthogonal Chebyshev is the best polynomial when fitting is required on a square domain using the array sampling grid.

Key words optical design; free-form surface optics; surface fitting; orthogonal polynomials; sampling grid

OCIS codes 220.1250; 220.3620

1 引言

曲面拟合在逆向工程中有着非常广泛的应用。在光学领域,曲面拟合在光学曲面重构、波前像差拟合以及光学系统分析和优化等方面发挥极其重要的作用^[1~4]。在光机优化设计过程中,用有限元分析(FEA)软件完成系统热分析后,需要将面形变化的数据进行曲面拟合,然后导入到光学设计软件中进行像质评估^[5,6],以此指导光学系统的进一步优化

设计。通常温度变化引起的光学面形变化十分细微,而且光学曲面和波前像差对拟合精度的要求非常高,故曲面拟合的精度是光机有限元交互分析成败的关键。

在自由曲面光学设计中,自由曲面的数学描述方法^[7~9]近年来取得了突破性的进展,其采用的面形表达式变得更为复杂,增加了自由曲面面形之间的转换难度。在成像领域,传统光学设计理论对自

收稿日期: 2012-03-12; **收到修改稿日期:** 2012-04-19

基金项目: 国家 973 计划(2011CB706701)和国家自然科学基金(61178038)资助课题。

作者简介: 王庆丰(1982—),男,博士研究生,主要从事自由曲面光学设计、光机集成分析等方面的研究。

E-mail: qfwanglz@163.com

导师简介: 王涌天(1957—),男,博士,教授,主要从事光学设计、光学 CAD/CAE、虚拟现实和增强显示等方面的研究。

E-mail: wyt@bit.edu.cn

* **通信联系人.** E-mail: cdwlxk@bit.edu.cn

由曲面折反射式(例如自由曲面棱镜)等新颖光学系统不再适用,甚至难以得到一个好的初始结构。一种可行的解决方法是在现有庞大的专利库中选取传统光学系统作为初始结构,然后逐渐将球面升级成灵活的自由曲面以满足设计要求^[10]。在曲面升级过程中需要对被转换曲面进行采样并拟合成更高级的自由曲面;另一种途径是通过光学原理求解曲面上的点云数据,然后拟合优化的方法,例如求解偏微分方程的 Wassermann-Wolf 方法^[11],根据物像关系计算曲面上点云的多曲面同步设计法等^[12],也需要将点云数据进行高精度的曲面拟合以得到光学表面的描述方程,便于进一步优化和分析以及后期的加工。非成像领域也同样需要曲面拟合,例如 LED 匀光照明光学系统的优化。

光学工程中波前拟合有着重要的应用。面形检测中波前拟合的精度直接关系到检测的精度,光学设计中的波像差计算等也需要对波前进行拟合。在光学设计软件的波像差拟合计算中,一般可以提供两种采样方式:环形辐射采样和阵列采样,数目可以从 64 pixel × 64 pixel 到 1024 pixel × 1024 pixel。现有的波前拟合绝大部分采用泽尼克于 1964 年提出的泽尼克多项式,其在单位圆内正交且各项系数可以与赛德尔像差相对应,在光学设计、检测和装调等领域得到了最广泛的应用。但是,随着光学技术的发展,在一些系统中被检测曲面可能是矩形甚至是方形,此时采用圆域正交的泽尼克多项式进行拟合已不能满足正交条件,故而不能准确表示像差。

针对圆域正交的泽尼克多项式不适用于方域的不足,需要研究新的正交多项式在其他域内进行波前拟合。Liu 等^[13]采用双变量正交切比雪夫多项式进行矩形曲面的拟合,成功的装调了一个 W 型的方形光学补偿器;Mahajan 等^[14~16]则以单位圆内正交的泽尼克多项式为基,通过正交构造的方式得到方域、圆域以及六边形域内的泽尼克多项式,并提出可以在相应的检测方法中应用。

由于各项之间的正交性,正交多项式在拟合应用中有诸多优势:更敏感、高效的优化进程;正交多项式各项系数独立,相互间互不影响,优化中增加高次项的优化效果明显,无论幂次多高,原先各低阶项的系数值都不会改变。鉴于正交多项式的诸多优点,构建其它域内正交多项式并进行光学自由曲面的拟合研究是一项非常有意义的工作。

本文针对曲面拟合应用中的实际问题,利用 Matlab 软件分别在圆域内和方域内构造了双变量

正交多项式自由曲面,利用均匀随机、阵列分布和环状辐射三种不同的采样类型,通过大量实验全面地验证正交多项式对不同自由曲面的拟合效果,并详细给出了实验分析结果。

2 双变量正交多项式构造方法

2.1 正交多项式面形研究背景

正交多项式在光学中应用广泛,尤其是泽尼克多项式在光学领域的应用。利用正交的数学性质,Forbes 根据最小二乘原理和正交多项式的特点,2007 年构造出旋转对称非球面的“Forbes Asphere”模型^[7],2012 年构造出新的自由曲面数学模型^[9]。两种面形在设计中可以控制面形曲率变化的程度、可以控制面形公差在可检测的范围以内以及可以控制面形得到最佳球面等诸多优势^[17~20],是近几年自由曲面光学领域的一个重大进展。

2.2 双变量正交多项式的构造

格雷姆-施瓦兹正交化方法是正交构造中使用较普遍的方法,其单变量的构造方法^[21]依照正交要求修改后可以构造双变量的正交多项式,方法如下。

给定一个初始的多项式 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$,令 $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 代表正交、非归一化多项式, $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 代表正交、归一化多项式,可表示为

$$\begin{cases} \psi_0 = u_0 \\ \phi_0 = \frac{\psi_0}{\sqrt{\iint \psi_0^2 \omega dx dy}} \\ \dots\dots \\ \psi_i = u_i - \left(\iint u_i \phi_{i-1} \omega dx dy \right) \phi_{i-1} \\ \phi_i = \frac{\psi_i}{\sqrt{\iint \psi_i^2 \omega dx dy}} \end{cases}, \quad (1)$$

如果方程归化成 $N_m N_n$ 而不是 1,则需要做以下修改:

$$\begin{cases} \iint \psi_i^2 \omega dx dy = N_m^2 N_n^2 \\ \phi_i = N_m N_n \frac{\psi_i}{\sqrt{\iint \psi_i^2 \omega dx dy}} \end{cases}. \quad (2)$$

双变量的正交构造方法不仅只有一种,除以上方法外,1975 年 Koornwinder 提出一种利用单变量正交多项式构造双变量正交多项式的方法^[22]。

设 w_1 是在区间 $[a, b]$ 的权重函数, w_2 是在区间 $[c, d]$ 的权重函数。

ρ 在区间 $[a, b]$ 内是正函数且具有如下性质：

- 1) ρ 是最高项系数为 1 的多项式；
- 2) ρ 是最高项系数为 2 的多项式的根，且假定

$d = -c > 0, \omega_2$ 在区间 $[c, d]$ 是偶函数。

则双变量正交多项式的表达式为

$$P_k^n(x, y) = p_{n-k, k}(x) [\rho(x)]^k q_k \left[\frac{y}{\rho(x)} \right], \quad 0 \leq k \leq n \quad (3)$$

权重函数为

$$W(x, y) = w_1(x)w_2[\rho^{-1}(x)y], \quad (x, y) \in R \quad (4)$$

式中 R 为

$$R = \{(x, y) : a < x < b, c\rho(x) < y < d\rho(x)\}. \quad (5)$$

利用上述方法，可以对切比雪夫多项式直接构造写出方域内 ρ 等于 1 的双变量正交多项式的形式，可表示为

$$C_{mm} = C_m(x, y)C_n(x, y), \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C_m(x, y)C_n(x, y) \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ K, & m = n \end{cases} \quad (7)$$

$$K = \begin{cases} \pi^2, & m = n = 0 \\ \pi^2/4, & m \neq 0, n \neq 0 \\ \pi^2/2, & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

利用 Koornwinder 方法可以根据单变量正交多项式的递推公式构造到任意项双变量正交多项式而没有数值舍入误差，在自由曲面设计的应用中具有很大潜力。例如，方域内双变量正交切比雪夫多项式的展开项与赛德尔像差有着对应关系，其傅里叶变换也较为便利，可以在检测柱面等光学元件中采用此类多项式进行波前拟合、干涉条纹检测及其他应用^[13]。

3 数据抽样

采样方式、采样频率和曲面表达式是影响曲面拟合精度的关键因素，Kaya 等^[23]利用泽尼克多项式研究了不同采样方式对拟合精度的影响；对采样数量来说，理论上一般是采样数量较多为好，在实际拟合过程中一种比较常用的方法是在面形变化剧烈的地方采样较多的数据点，这样既可以提高采样精度又不增加过多的采样和计算负担。

拟合试验中，依据 Kaya 文章中的相关结论并保证采样频率满足采样定律，经过不同采样频率的实验验证，表明使用 500 左右采样点数进行拟合可以在时间和空间上实现比较好的效果；实验中圆形面形的直径为 50 mm，方形面形的对角线为 50 mm，为保证正交性，拟合时需要归一化操作。

为保证拟合实验的普适性，采用均匀随机分布 [图 1(a), (d)]、环形辐射分布 [图 1(b), (e)] 和阵列

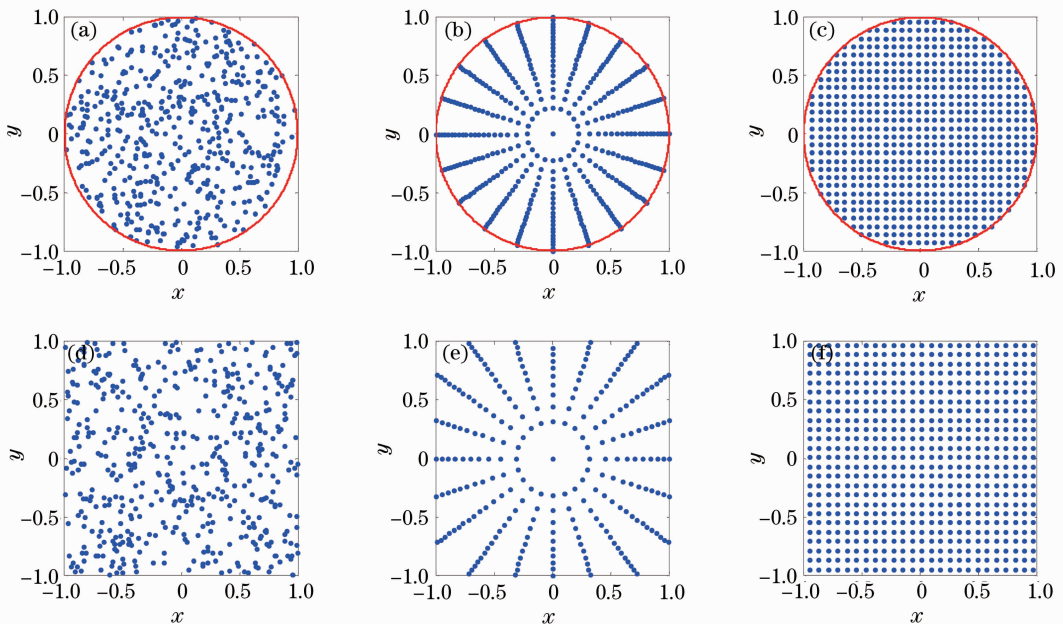


图 1 圆形和方形曲面的三种采样类型

Fig. 1 Three sampling methods of the unit circular and square curved surface

分布[图 1(c),(f)]三种采样方法分别对圆形和矩形曲面上的点进行抽样,在选取拟合面形后,首先通过非线性迭代优化方法拟合出最佳二次曲面基底,并用点云数据减去二次基底项得到一组残余矢高点云数据,然后利用面形的多个正交项通过最小二乘法或奇异值分解(SVD)法将新点云数据进行线性拟合。

选用的多项式拟合最高项数和商用光学设计软件中的光学面形最高项数是一致的,这个项次的选择经过很多光学研究者的论证,满足大部分的光学应用,众多的光学设计软件使用者和光学设计系统的成功加工等可以间接验证出现过拟合的情况很少。

与过拟合现象关系较密切的是采样点数对拟合的影响,采样点的过多或过少都可能会出现过拟合现象。实际操作中通过理论和经验结合的方式避免过拟合现象的出现。

4 拟合实验与结果分析

分别采用以下多项式进行面形拟合精度分析:旋转对称非球面(ASP)、XY 多项式(XYP)、正交 XY 多项式(OXYP)、泽尼克多项式和切比雪夫双变量正交多项式。正交多项式分为圆域正交多项式和方域正交多项式,其中 OXYP 是利用格雷姆-施瓦茨正交化方法分别在圆域和方域内对 XYP 进行正交构造得到的;方域泽尼克多项式是参考文献[14]中所述的方法并利用格雷姆-施瓦兹正交化方法构

造得到;切比雪夫双变量正交多项式采用 Koornwinder 方法进行构造。用圆域正交的多项式拟合圆形采样的数据,方域正交多项式拟合方形采样的数据,保证不同拟合时多项式的正交性。

为实验普适性考虑,对四种具有代表性的面形进行点云数据抽样,它们包括旋转对称非球面、浅度自由曲面、深度自由曲面、Peaks 自由曲面。其中 Peaks 自由曲面的空间频率最高,在相同项次拟合的情况下拟合误差会比较大。

考虑在 Code V 光学软件^[24]中多项式面形的项数最高为 66 项,因此将实验中采用的最高拟合项数定为 66 项。在波前检测等领域中需要根据所要求的精度合理地选择项数。

图 2 为对普通非球面进行拟合时各种正交多项式的拟合精度。图中横坐标代表不同的拟合项数,纵坐标代表均方根(RMS)值拟合误差,后文中其他附图坐标与此相同。普通非球面利用旋转对称多项式拟合可以在较少的项次条件下达到比较高的拟合精度,RMS 误差最小为 5.282×10^{-7} mm,在亚纳米量级。其它多项式的拟合误差在 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ mm 量级,这是因为没有刻意剔除非对称拟合项,所以导致精度相对较低,但也能满足使用要求。在项次增加后,XYP 的拟合精度最优,OXYP 次之。圆域正交泽尼克多项式比圆域正交双变量切比雪夫多项式

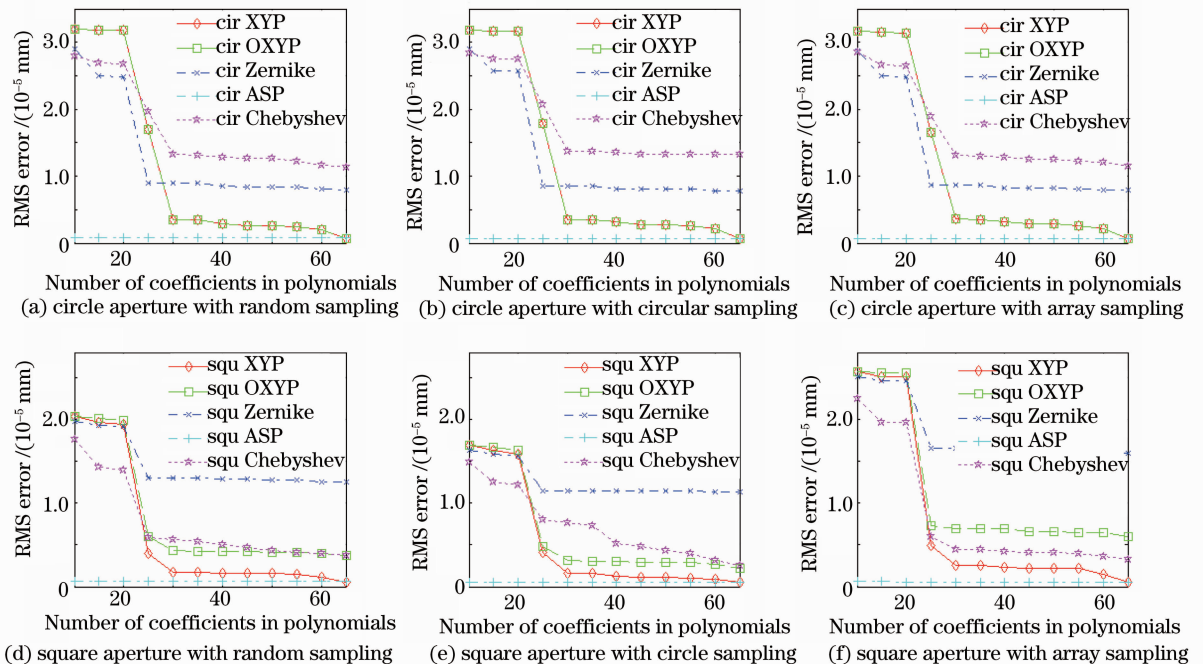


图 2 旋转对称非球面采样数据的多项式拟合结果

Fig. 2 Polynomial fitting results of sampling data of rotationally symmetric aspheric surface

拟合误差小;方域正交切比雪夫多项式比方域正交泽尼克多项式拟合误差小,在阵列采样中其拟合效果仅次于 XYP。

图 3 和图 4 为两类自由曲面的拟合误差对比图。如表 1 所示,在 66 项拟合情况下,XYP 和 OXYP 的拟合 RMS 误差在 10^{-7} mm 量级上,其中

圆形浅度自由曲面的 XYP 拟合 RMS 误差最小为 1.102×10^{-7} mm;深度自由曲面的 XYP 最小拟合误差为 2.603×10^{-7} mm;方形浅度自由曲面的 XYP 拟合误差最小为 6.310×10^{-8} mm,深度自由曲面的 XYP 最小拟合误差为 2.396×10^{-7} mm;并

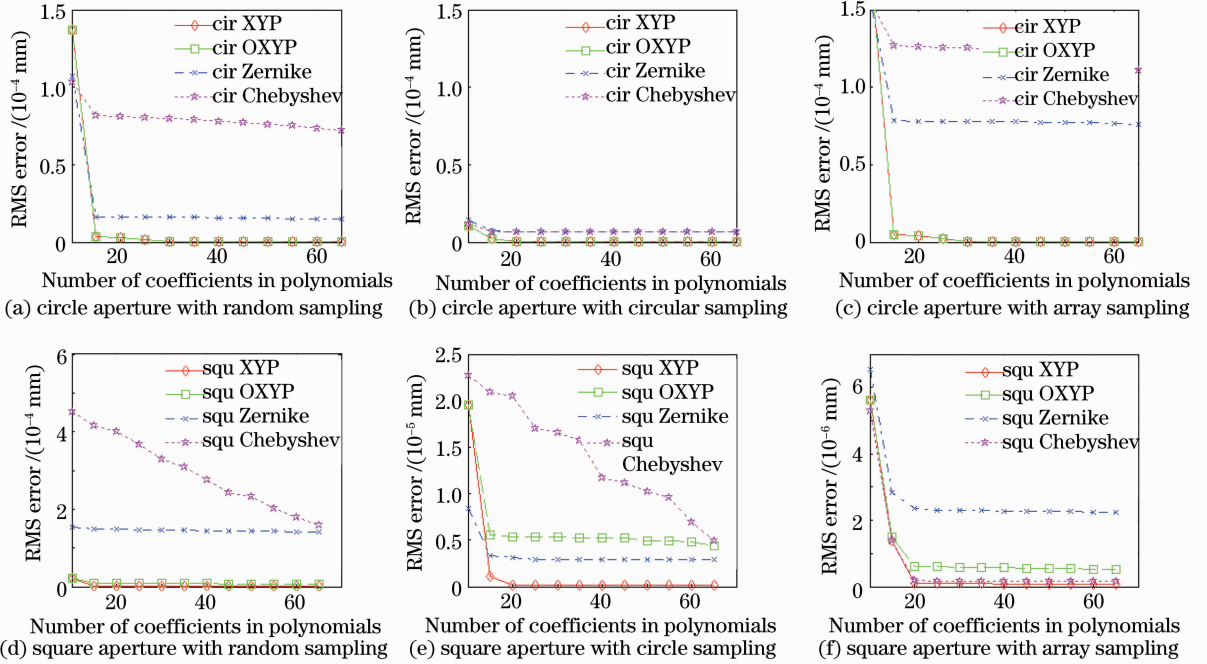


图 3 浅度非旋转对称自由曲面采样数据的拟合结果

Fig. 3 Fitting results of sampling data of mild slope symmetric free-form surface

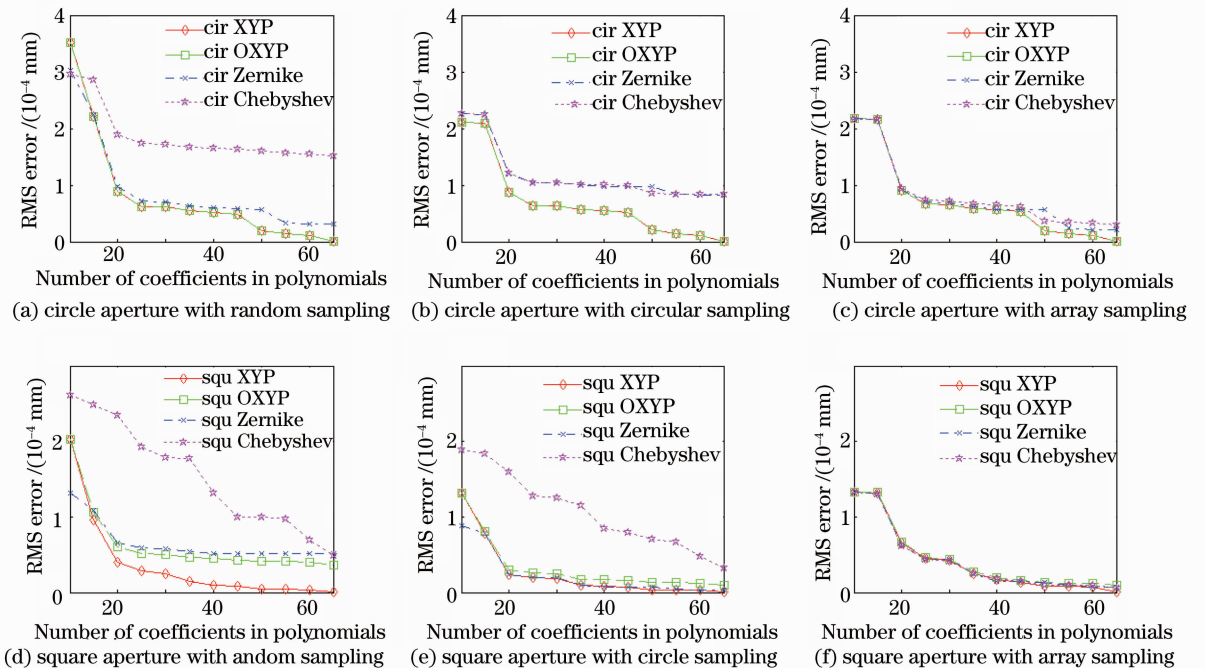


图 4 深度非旋转对称自由曲面采样数据的拟合结果

Fig. 4 Fitting results of sampling data of deep slope symmetric free-form surface

且以上 4 个极小值都是在阵列采样的情况下得到的,表明 XYP 的拟合采用阵列采样会得到好的拟合效果。环形辐射采样条件下,浅度自由曲面在圆域内误差最小值,深度自由曲面在在方域内取得极小值。圆域内,泽尼克多项式相对于切比雪夫多项式的拟合适应度较好,其中圆域正交泽尼克多项式拟合效果较好,切比雪夫正交多项式值在阵列采样的情况下有较好的采样误差,最好结果达到了 1.565×10^{-7} mm,而在其它采样情况下误差最高有 1.582×10^{-4} mm,差别显著。从实验结果可知,不同的采样类型对自由曲面拟合误差的影响比较明显,XYP 和 OXYP 适于采用阵列采样进行拟合,而

环形辐射采样则对泽尼克多项式拟合效果好,方域正交的切比雪夫多项式采用阵列采样效果好。

图 5 是针对 Peaks 函数面形的拟合结果。对于此类面形变化比较剧烈的自由曲面面形,圆域泽尼克正交和切比雪夫多项式的整体拟合效果较好,最小 RMS 误差在 10^{-2} 毫米量级,其中圆域正交泽尼克多项式在均匀随机采样方式下拟合 RMS 误差最小,为 3.527×10^{-2} mm。方域切比雪夫多项式的拟合效果最好,特别是在阵列采样拟合中,RMS 误差达到 8.997×10^{-3} mm,比其它多项式拟合精度高 1~2 个数量级,具体数据如表 1 所示。

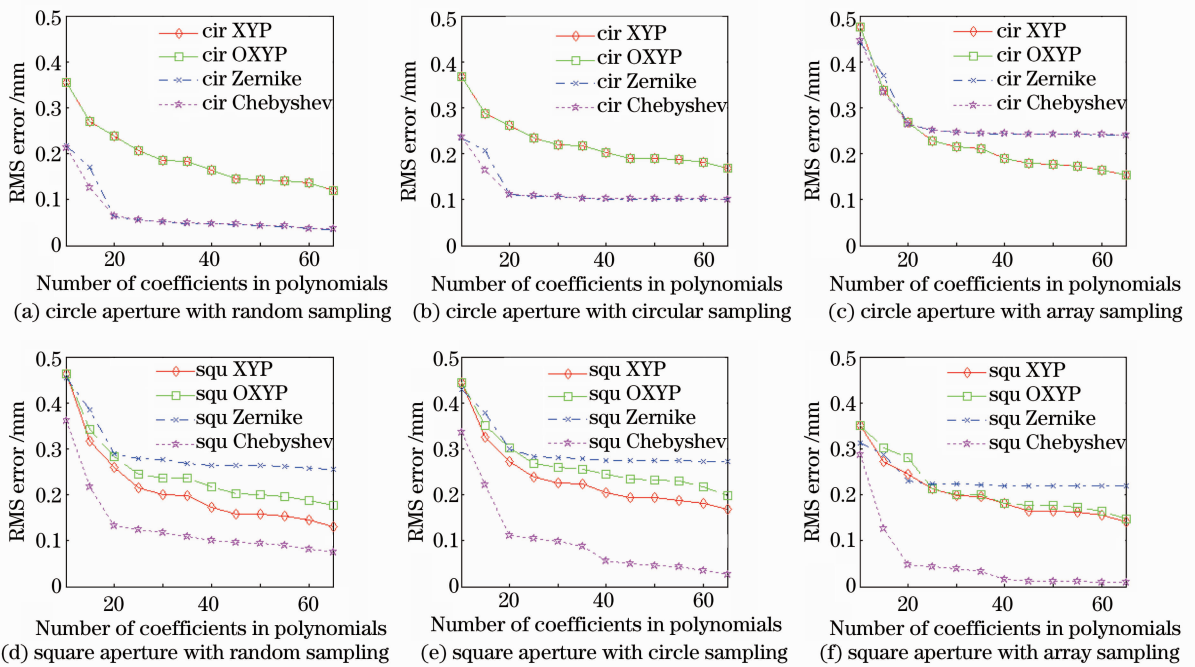


图 5 Peaks 自由曲面采样数据的拟合结果

Fig. 5 Fitting results of sampling data of Peaks free form surface

表 1 给出了在采用 66 项多项式进行拟合的情况下,在方形和圆形曲面分别采用三种抽样方式并选取四种面形进行拟合的 RMS 误差。图 6 和图 7 将表 1 的数据以折线的方式直观地显示出来。图中横坐标代表拟合采用的正交多项式,纵坐标代表为 66 项多项式拟合的 RMS 误差。结合图 6、7 和表 1 所给的数据趋势,可以分析出 XYP 和 OXYP 的拟合适应度最好,在各种采样情况下均能得到比其他多项式低的拟合误差。

在采样类型中,阵列采样的拟合适应度最好,如表 1 所示,在 40 组拟合实验中,有 24 次误差最小值是在阵列采样方式的情况下取得的,占总数的 60%;环形辐射采样类型有 9 次出现最小值,占总数

的 22.5%,均匀随机占其余的 17.5%。

环形辐射采样类型所取得的 9 次最小拟合误差中,泽尼克多项式占 4 次,占 44.5%,普通非球面 2 次,切比雪夫多项式 2 次,OXYP 占 1 次。

而阵列采样的 24 个极小值中,泽尼克多项式仅有 3 次,XYP、OXYP 和切比雪夫多项式各有 6 次,另 3 次为普通非球面。对于旋转对称面形的拟合,采用旋转对称的多项式拟合可以在比较少的项次情况下取得相对于其他多项式高很多的拟合误差,这表明在已知拟合面形为旋转对称情况下,选择具有旋转对称的多项式可以取得较好的效果。依此分析,如果其他多项式在拟合中仅挑选旋转对称的项次进行拟合,可以达到和旋转对称多项式相近甚至

更优的拟合效果,因为 XY 多项式不仅包含普通非球面的项数,还具有普通非球面没有的其它项,有更大的拟合自由度,所以理论上能取得更好的拟合效

果。此外,三种采样方式下不同多项式拟合误差的差别非常小,数据采样方式对旋转对称曲面拟合精度的影响很小。

表 1 几种多项式在拟合系数为 66 时的拟合精度 RMS 值

Table 1 RMS errors of the polynomial fitting accuracy with fitting coefficients of 66

Shape	Surfaces	Sampling	ASP	XYP	OXY P	Zernike	Chebyshev
Circle	Sym-asphere	Random	7.752×10^{-7}	7.059×10^{-7}	7.059×10^{-7}	7.974×10^{-6}	1.140×10^{-5}
		Circular	7.325×10^{-7}	6.505×10^{-7}	6.505×10^{-7}	7.812×10^{-6}	1.325×10^{-5}
		Array	6.700×10^{-7}	6.447×10^{-7}	6.447×10^{-7}	7.902×10^{-6}	1.157×10^{-5}
	Asym-free-form surface 1	Random	4.725×10^{-3}	6.156×10^{-7}	6.156×10^{-7}	3.171×10^{-5}	1.522×10^{-4}
		Circular	4.637×10^{-3}	6.810×10^{-7}	6.810×10^{-7}	8.277×10^{-5}	8.345×10^{-5}
		Array	4.559×10^{-3}	2.603×10^{-7}	2.603×10^{-7}	2.186×10^{-5}	3.013×10^{-5}
	Asym-free-form surface 2	Random	1.631×10^{-2}	1.314×10^{-7}	1.314×10^{-7}	1.483×10^{-5}	7.195×10^{-5}
		Circular	1.648×10^{-2}	1.406×10^{-7}	1.406×10^{-7}	6.571×10^{-6}	6.577×10^{-6}
		Array	1.644×10^{-2}	1.102×10^{-7}	1.102×10^{-7}	7.624×10^{-5}	1.111×10^{-4}
Peaks free-form surface	Random	1.166	1.204×10^{-1}	1.204×10^{-1}	3.527×10^{-2}	3.721×10^{-2}	
	Circular	1.145	1.681×10^{-1}	1.681×10^{-1}	1.005×10^{-1}	1.013×10^{-1}	
	Array	1.310	1.526×10^{-1}	1.526×10^{-1}	2.409×10^{-1}	2.415×10^{-1}	
Square	Sym-asphere	Random	5.987×10^{-7}	5.529×10^{-7}	3.775×10^{-6}	1.251×10^{-5}	3.718×10^{-6}
		Circular	5.282×10^{-7}	5.114×10^{-7}	2.139×10^{-6}	1.128×10^{-5}	2.566×10^{-6}
		Array	5.684×10^{-7}	4.977×10^{-7}	6.020×10^{-6}	1.591×10^{-5}	3.250×10^{-6}
	Asym-free-form surface 1	Random	3.628×10^{-3}	5.310×10^{-7}	3.600×10^{-5}	5.136×10^{-5}	4.834×10^{-5}
		Circular	3.656×10^{-3}	4.998×10^{-7}	1.014×10^{-5}	3.184×10^{-6}	3.202×10^{-5}
		Array	3.819×10^{-3}	2.396×10^{-7}	9.351×10^{-6}	6.578×10^{-6}	6.153×10^{-6}
	Asym-free-form surface 2	Random	1.300×10^{-2}	1.110×10^{-7}	5.676×10^{-6}	1.419×10^{-4}	1.582×10^{-4}
		Circular	1.345×10^{-2}	1.102×10^{-7}	4.432×10^{-6}	2.923×10^{-6}	4.918×10^{-6}
		Array	1.426×10^{-2}	6.310×10^{-8}	5.199×10^{-7}	2.239×10^{-6}	1.565×10^{-7}
	Peaks free-form surface	Random	1.264	1.300×10^{-1}	1.764×10^{-1}	2.561×10^{-1}	7.614×10^{-2}
		Circular	1.235	1.693×10^{-1}	1.987×10^{-1}	2.729×10^{-1}	2.754×10^{-2}
		Array	1.120	1.416×10^{-1}	1.478×10^{-1}	2.189×10^{-1}	8.997×10^{-3}

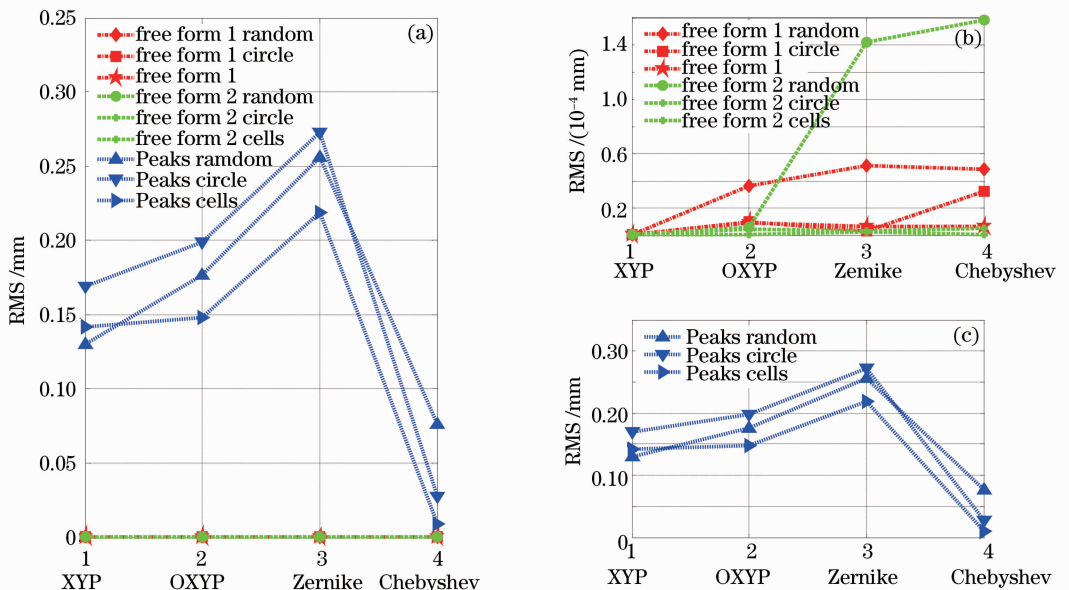


图 6 方形曲面三种抽样情况下不同多项式的拟合精度对比

Fig. 6 Comparison of the fitting accuracy of different polynomials with square aperture in three sampling grids

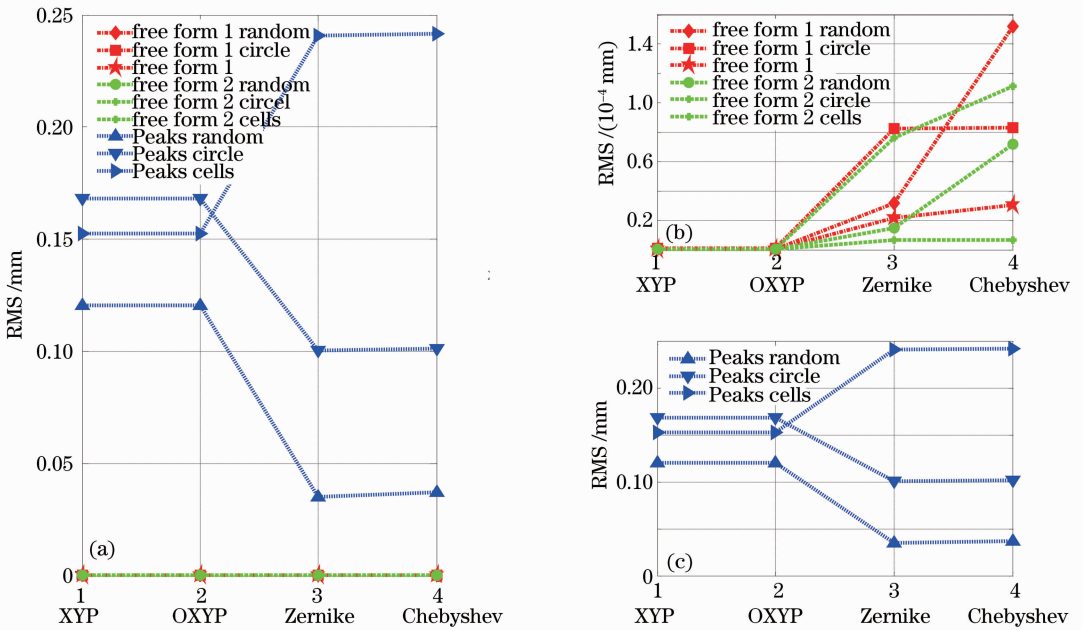


图 7 圆形曲面三种抽样情况下不同多项式的拟合精度对比

Fig. 7 Comparison of the fitting accuracy of different polynomials with circle aperture in three sampling grids

由此不难看出,在进行旋转对称曲面拟合时,采样方式对拟合精度的影响不明显;如果采用双变量多项式进行拟合,恰当地选取多项式的项数就可以达到事半功倍的效果。

在相同的实验条件下,XYP 和 OXYP 对实验面形的拟合适应度较广,拟合精度相对较好,在不涉及像差分析的情况下,采用 OXYP 进行拟合是一个比较好的选择。可以在光学设计中采用 OXYP 作为光学面形进行优化,能够利用正交特性保证优化速度。同时综合实验数据(图 2~5)可以得出,在拟合项数达到 20 时,拟合 RMS 误差有比较明显的下降,之后的变化则趋于平缓。所以,对于一般的光学面形,采用 20 项左右就可达到比较好的拟合效果。

三种抽样方式中,阵列采样的拟合适应度最好;环形辐射采样对于泽尼克多项式拟合也有比较高的

适应度;对 Peaks 类型的自由曲面,随机采样的适应度相对其它面形适应度较高。

圆域、方域内正交的泽尼克多项式的拟合适应度好;如果是方域前并且采用阵列采样的情况下,方域内正交的双变量切比雪夫多项式是拟合多项式的首选。所以在进行波前拟合和系统装调等需要对像差进行分析时,圆形波前检测图用圆域正交的泽尼克多项式拟合;对于方形的波前检测图,如果采用阵列抽样则首选方域内正交的双变量切比雪夫多项式进行拟合,否则使用方域内正交的泽尼克多项式拟合。

经过光学设计软件的验证,面形转换或点云拟合的精度在波长量级基本上可以满足使用要求,根据实验数据,除 Peaks 自由曲面外采用 66 项次的多项式拟合精度满足光学使用要求。对于 Peaks 自由

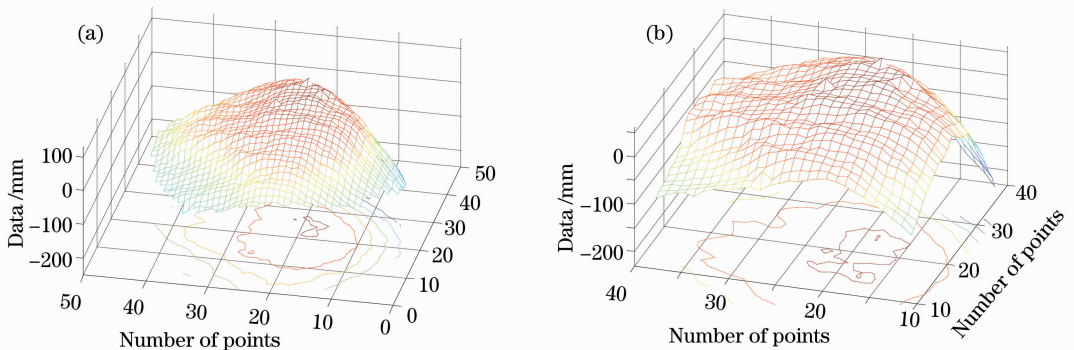
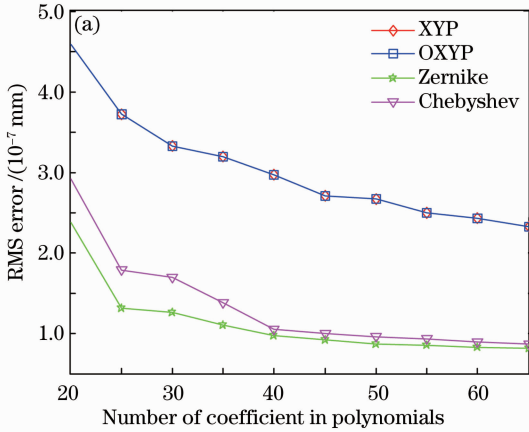


图 8 干涉测量点数据。(a)圆形面形;(b)方形面形

Fig. 8 Point data from interference measurement. (a) Circular surface; (b) square surface

曲面和其它类似的自由曲面,由于曲面空间频率太高^[25],光学设计的常用面形所给的系数是不能满足要求的,实际中可以编写用户自定义面形进行面形表述和优化。

为更好的验证结论的正确性,使用 Fisba 干涉



仪测量了圆形和方形的面形点数据,数据为阵列分布类型,圆形采样点为 1040,方形点为 784,测量面形直径为 16 mm。面形的干涉测量数据和拟合结果如图 8 和图 9 所示。从图 9 拟合误差曲线结果可以看到拟合结论和实验的拟合结论一致。

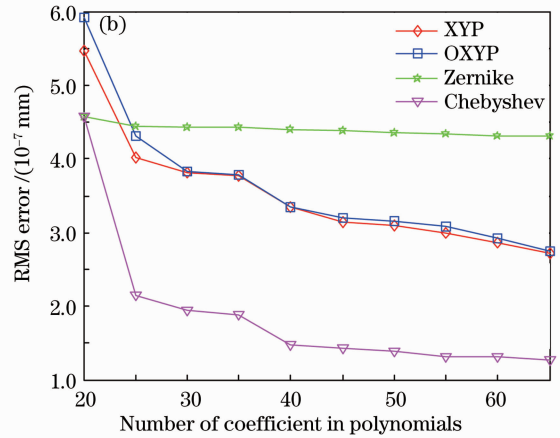


图 9 干涉数据拟合误差。(a)圆形拟合;(b)方形拟合

Fig. 9 RMS error of fitting using the interference measurement data. (a) Circular fitting; (b) square fitting

5 结 论

本文通过构造方域和圆域内的双变量正交多项式,详细分析了两种形域内的双变量多项式的拟合精度。针对三种不同的采样类型,分别对三种具有代表性的曲面进行了采样和数据拟合。实验结果表明:对于旋转对称非球面的数据拟合,采样类型影响不大;对一般的自由曲面数据拟合,阵列采样类型的适应度最好;XYP 和 OXYP 两种多项式的拟合适应度较好,并且在阵列采样的拟合中,首选 OXYP 进行拟合;在光学设计的自由曲面面形转换中,采取 20 项多项式一般就可以满足使用要求。结论可以应用于光学面形拟合、FEA 数据转换和波前检测等方面的研究和生产,也可以应用于光机分析数据交互软件的研发。此外,文中多项式的最高拟合项次为 66 项,所以 Peaks 自由曲面的拟合误差较大,这是由于 Peaks 自由曲面的空间频率较高所致,可以在增加多项式拟合系数的情况下达到更高的精度。

致谢 本文干涉测量数据由北京理工大学光电学院文永富博士提供,特此感谢。

参 考 文 献

- 1 Fan Xinlong, Guan Chunlin, Rao Changhui. Wave-front fitting capability analysis of 1.8 m telescope's adaptive secondary mirror [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 0822002
- 樊新龙, 官春林, 饶长辉. 1.8 m 望远镜变形次镜波前拟合能力

- 分析[J]. *光学学报*, 2011, **31**(8): 0822002
- 2 Chen Xu, Yuan Wenquan, Feng Yutao. Study of the error of the reference lens in absolute spherical testing and the thermal deformation model establishment[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(2): 0212002
- 陈旭, 袁文全, 冯玉涛等. 绝对检验参考镜误差分析与热变形模型建立[J]. *光学学报*, 2011, **31**(2): 0212002
- 3 Peng Xiang, Yin Yongkai, Liu Xiaoli *et al.*. Phase-aided three-dimensional imaging and metrology [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(9): 189~201
- 彭翔, 殷永凯, 刘晓利等. 基于相位辅助的三维数字成像与测量[J]. *光学学报*, 2011, **31**(9): 189~201
- 4 Qingfeng Wang, Qican Zhang, Yuankun Liu. Three-dimensional measurement of object in water by tracking phase value[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **31**(6): 1570~1576
- 王庆丰, 张启灿, 刘元坤. 基于相位追踪的水中物体三维面形测量[J]. *光学学报*, 2009, **31**(6): 1570~1576
- 5 P. A. Coronato, R. C. Juergens. Transferring FEA results to optics codes with Zernikes; a review of techniques[C]. *SPIE*, 2003, **5176**: 1~8
- 6 R. C. Juergens, P. A. Coronato. Improved method for transfer of FEA results to optical codes [C]. *SPIE*, 2003, **5174**: 105~115
- 7 G. W. Forbes. Shape specification for axially symmetric optical surfaces[J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(8): 5218~5226
- 8 G. W. Forbes. Robust and fast computation for the polynomials of optics[J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(13): 13851~13862
- 9 G. W. Forbes. Characterizing the shape of freeform optics[J]. *Opt. Express*, 2012, **20**(3): 2483~2499
- 10 K. Fuerschbach, J. P. Rolland, K. P. Thompson. A new family of optical systems employing ϕ -polynomial surfaces[J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(22): 21919~21928
- 11 D. Cheng, Y. Wang, H. Hua. Free form optical system design with differential equations[C]. *SPIE*, 2010, **7849**: 78490Q
- 12 C. Minano Juan, Benitez Pablo, Lin Wang. An application of the SMS method for imaging designs [J]. *Opt. Express*, 2009,

- 17(26): 24036~24044
- 13 F. Liu, B. M. Robinson, P. J. Reardon *et al.*. Analyzing optics test data on rectangular apertures using 2-D Chebyshev polynomials[J]. *Opt. Engng.*, 2011, **50**(4): 43608~43609
- 14 V. N. Mahajan, G. Dai. Orthonormal polynomials in wavefront analysis: analytical solution[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(9): 2994~3016
- 15 V. N. Mahajan. Zernike annular polynomials and optical aberrations of systems with annular pupils[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(34): 8125~8127
- 16 V. N. Mahajan. Orthonormal aberration polynomials for anamorphic optical imaging systems with rectangular pupils[J]. *Appl. Opt.*, 2010, **49**(36): 6924~6929
- 17 G. W. Forbes. Manufacturability estimates for optical aspheres [J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(10): 9923~9941
- 18 F. Greg. Better ways to specify aspheric shapes can facilitate design, fabrication and testing alike [C]. Optical Society of America, 2010. JMA1
- 19 P. T. Kevin, F. Florian, P. R. Jannick *et al.*. The Forbes polynomial; a more predictable surface for fabricators [C]. Optical Society of America, 2010. O7uA6
- 20 B. Ma, L. Li, K. P. Thompson *et al.*. Applying slope constrained Q-type aspheres to develop higher performance lenses [J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(22): 21174~21179
- 21 E. W. Weisstein. Gram-Schmidt Orthonormalization [Z]. 2012From MathWorld--A Wolfram Web Resource
- 22 C. F. Dunkl, Y. Xu. Orthogonal Polynomials of Several Variables[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 30~57
- 23 I. Kaya, K. P. Thompson, J. P. Rolland. Edge clustered fitting grids for φ -polynomial characterization of freeform optical surfaces [J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(27): 26962~26974
- 24 Synopsys. Code V Reference Manual[Z]. 2011
- 25 Liu Jianfeng, Long Funian, Zhang Wei. Frequency domain analysis of surface figure fitting based on Zernike polynomials[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(8): 1062~1066
刘剑峰, 龙夫年, 张伟等. 基于泽尼克多项式进行面形误差拟合的频域分析[J]. *光学学报*, 2005, **25**(8): 1062~1066

栏目编辑: 韩 峰