

非偏振贝塞尔高斯光束的球散射

马秀波^{1,2} 李恩邦¹

(¹ 天津大学精密仪器与光电子工程系, 天津 300072)
(² 中国石油大学(华东)理学院, 山东 青岛 266580)

摘要 无衍射光束球散射性质的研究目前一般采用贝塞尔光束,但是贝塞尔光束在物理上是不可实现的。贝塞尔高斯光束作为近似无衍射光束,是亥姆霍兹方程在傍轴条件下的解,并且可以用激光振荡器直接产生,但其光束宽是有限的。应用傅里叶变换,平面波谱展开和球面矢量波函数展开法,推导了非偏振贝塞尔高斯光束的球散射远场的无量纲散射函数。通过数值模拟,对非偏振的贝塞尔高斯光束与贝塞尔光束,高斯光束的球散射远场进行了比较,比较发现:当球散射体偏离光轴时,非偏振贝塞尔高斯光束跟贝塞尔光束散射远场的差异主要是散射强度的差异,但是散射极点所在的方向基本保持不变;贝塞尔高斯光束和贝塞尔光束的散射在光束圆锥角方向上比较显著,但高斯光束的前向散射比较显著。

关键词 散射;无量纲散射函数;数值模拟;贝塞尔高斯光束;贝塞尔光束

中图分类号 O436; O441 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0829002

Scattering of Unpolarized Bessel-Gauss Beams by a Sphere

Ma Xiubo^{1,2} Li Enbang¹

(¹ College of Precision Instrument and Optoelectronics Engineering, Tianjin University,
Tianjin 300072, China)
(² College of Science, China University of Petroleum (Huadong),
Qingdao, Shandong 266580, China)

Abstract The Bessel beams are often used for investigating the scattering properties of the non-diffracting beams, but the Bessel beams cannot be realized physically. As the pseudo-nondiffracting beams and the exact solution to the paraxial Helmholtz equation, the Bessel-Gauss beams can be generated directly from the laser resonator and possess finite spatial width. The dimensionless scattering function is derived for the Bessel-Gauss beams scattered by a sphere by means of Fourier-transform, the plane wave expansion and the vector spherical wave expansion. By numerical simulation and comparison with that of the Bessel beam and the Gauss beam, it can be found that only the scattering intensity is influenced as the spherical scatterer is shifted off the beam axis, the directions where the scattering extreme points exist almost keep no changes. The scattering is dominant in the direction of the conical angle for the Bessel-Gauss beam and the Bessel beam, but for the Gauss beam the forward scattering is always dominant.

Key words scattering; dimensionless scattering function; numerical simulation; Bessel-Gauss beam; Bessel beam

OCIS codes 290.2558; 290.4020; 290.5828; 290.5850

1 引言

自无衍射光束的概念提出以来,关于无衍射光束的产生、传播和应用就成为研究的热点^[1~6]。目前关于无衍射光束球散射特性的研究,从现有的文

献来看,都是以理想的贝塞尔光束为研究对象^[7~9]。以贝塞尔光束作为研究对象的一个重要原因就是可以得到贝塞尔光束球散射的解析解,在数学处理上比较简单,但是贝塞尔光束在物理上是无法实现的,

收稿日期: 2012-03-05; **收到修改稿日期**: 2012-04-01

作者简介: 马秀波(1970—),男,硕士,讲师,主要从事激光传播和应用方面的研究。E-mail: tdmxb@126.com

导师简介: 李恩邦(1963—),男,博士,教授,主要从事激光与光电子技术、光纤传感等方面的研究。

E-mail: enbang@tju.edu.cn

因为它的实现需要无穷大的能量。在物理上可以实现的是近似无衍射光束。贝塞尔高斯光束作为近似无衍射光束是 Gori 等^[5]在 1987 年提出的。贝塞尔高斯光束不仅是傍轴条件下亥姆霍兹方程的解^[6]，而且可以用激光振荡器直接产生^[1,2]。同理想的贝塞尔光束相比较，贝塞尔高斯光束可以认为光束宽有限。广义洛伦茨-米氏理论(GLMT)是解决任意光束均质电介质球散射问题的一个重要工具，其中一个重要的步骤就是把光束展开为球面矢量波函数或者球谐函数的级数形式^[10,11]，确定束形因子，也就是确定展开系数。文中应用 GLMT 推导了贝塞尔高斯光束的球散射远场，并同贝塞尔光束，高斯光束的球散射远场进行了比较。

2 非偏振贝塞尔高斯光束的球散射

考虑某一半径为 a 的均质球散射体，位于沿 x 轴偏振沿 z 轴方向传播的贝塞尔高斯光束中发生的散射。贝塞尔高斯光束具有圆对称性，在柱坐标系中的表达式仅跟径向坐标 r 有关。在 $z=0$ 平面上，沿 x 轴方向偏振的贝塞尔高斯光束，省略时间因子 $\exp(-i\omega t)$ ，可以表示为贝塞尔函数与高斯函数乘积的形式：

$$E_x(r) = E_0 J_0(\gamma r) \exp(-r^2/\omega_0^2), \quad (1)$$

式中 E_0 为峰值振幅， $J_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数， γ 为横向波数， ω_0 为高斯函数的腰半径。贝塞尔光束可视为贝塞尔高斯光束的特殊形式，当高斯函数的参数 $\omega_0 \rightarrow \infty$ 时，贝塞尔高斯光束就成为贝塞尔光束。

根据光的角谱理论，在任一平面上光场的分布都可以视为许多不同振幅和传播方向的平面波的线性叠加。对(1)式进行傅里叶变换得

$$BG(\rho) = \int_0^\infty r E_x(r) J_0(2\pi\rho r) dr = E_0 \pi \omega_0^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma^2 \omega_0^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4}\omega_0^2 \rho^2\right) I_0\left(\frac{1}{2}\gamma \omega_0^2 \rho\right), \quad (2)$$

式中 $\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ，波数 $k = |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ ，波矢 $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ ， $k_x = k \sin \alpha \cos \beta$ ， $k_y = k \sin \alpha \sin \beta$ ， $k_z = k \cos \alpha$ ； $I_0(\cdot)$ 为第一类修正贝塞尔函数。在(2)式两端乘以 $\exp(ik_z z)$ ，并进行傅里叶逆变换，得沿 x 轴偏振贝塞尔高斯光束的积分形式：

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} BG(\rho) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dk_x dk_y, \quad (3)$$

式中被积函数是平面波的形式。对(3)式进行下列积分变量代换： $k_x = k \sin \alpha \cos \beta$ ， $k_y = k \sin \alpha \sin \beta$ ， $dk_x dk_y = k^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta$ (其中 α 为天顶角， β 为方位角)，得

$$E_x(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/2} \int_0^{2\pi/2} BG(k \sin \alpha) \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta, \quad (4)$$

于是，对于沿 x 轴偏振贝塞尔高斯光束，其光场分布为

$$\mathbf{E}_x(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/2} \int_0^{2\pi/2} BG(k \sin \alpha) \hat{\mathbf{e}}_x \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta, \quad (5)$$

设球散射体的中心直角坐标为 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ，建立以球心为坐标原点的球坐标系 $O' - r\theta\phi$ 。在球坐标系中，贝塞尔高斯光束表示为

$$\mathbf{E}_x(r, \theta, \phi) = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/2} \int_0^{2\pi/2} BG(k \sin \alpha) \mathbf{e}_x \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta, \quad (6)$$

式中 \mathbf{r} 表示场点在球坐标系 $O' - r\theta\phi$ 中的径向矢量。将(6)式中矢量平面波 $\mathbf{e}_x \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 用球面矢量波函数展开，即

$$\mathbf{e}_x \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{nm} [p'_{nm} \mathbf{M}_{nm}^1(kr) + q'_{nm} \mathbf{N}_{nm}^1(kr)], \quad (7)$$

式中 \mathbf{M}_{nm}^1 和 \mathbf{N}_{nm}^1 以及后面出现的 \mathbf{M}_{nm}^3 和 \mathbf{N}_{nm}^3 均为球面矢量波函数，球面矢量波函数采用文献[8]中的定义。

$$D_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{4n(n+1)(n+m)!} \cdot \begin{cases} p'_{nm} = -4i^{n+1} \exp(-im\beta) \mathbf{e}_x [\pi_{nm}(\cos \alpha) \mathbf{e}_\theta - i\tau_{nm}(\cos \alpha) \mathbf{e}_\phi] \cdot \\ q'_{nm} = -4i^{n+1} \exp(-im\beta) \mathbf{e}_x [\tau_{nm}(\cos \alpha) \mathbf{e}_\theta - i\pi_{nm}(\cos \alpha) \mathbf{e}_\phi] \cdot \end{cases} \begin{cases} (\theta = \alpha) \\ (\phi = \beta) \end{cases}$$

将(7)式代入(6)式，完成对方位角 β 的积分，可得到沿 x 轴偏振贝塞尔高斯光束的球面矢量波函数展开式：

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [p_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^1(kr) + q_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^1(kr)], \quad (8)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} p_{nm}^x &= \frac{k^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -4i^{n+1} D_{nm} \int_0^{\pi/2} BG(k \sin \alpha) [\cos \alpha I_+ \pi_{nm}(\cos \alpha) + i I_- \tau_{nm}(\cos \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ q_{nm}^x &= \frac{k^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -4i^{n+1} D_{nm} \int_0^{\pi/2} BG(k \sin \alpha) [\cos \alpha I_+ \tau_{nm}(\cos \alpha) + i I_- \pi_{nm}(\cos \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ I_+ &= \int_0^{2\pi} \exp(-im\beta) \cos \beta \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\beta = \pi \exp(ikz_0 \cos \alpha) \{ \exp[i(1-m)\phi_0] J_{1-m}(\rho_0) + \\ &\quad \exp[-i(m+1)\phi_0] J_{-1-m}(\rho_0) \}, \\ I_- &= \int_0^{2\pi} \exp(-im\beta) \sin \beta \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\beta = -\pi i \exp(ikz_0 \cos \alpha) \{ \exp[i(1-m)\phi_0] J_{1-m}(\rho_0) - \\ &\quad \exp[-i(m+1)\phi_0] J_{-1-m}(\rho_0) \}, \end{aligned} \right. ,$$

由于展开系数 p_{nm}^x 和 q_{nm}^x 中的积分函数比较复杂,无法得到解析的结果。根据球面矢量波函数的性质,对于沿 x 轴偏振的贝塞尔高斯光束,其磁场的表达式为

$$\mathbf{H}_x(\mathbf{r}) = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (p_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^1 + q_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^1), \quad (9)$$

把偏振贝塞尔高斯光束的球散射场($\mathbf{E}_{xs}, \mathbf{H}_{xs}$),以及球散射体内部的电磁场($\mathbf{E}_{x1}, \mathbf{H}_{x1}$)都写成球面矢量波函数线性组合的形式:

$$\mathbf{E}_{xs}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^3(k\mathbf{r}) + b_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^3(k\mathbf{r})], \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_{xs}(\mathbf{r}) = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [b_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^3(k\mathbf{r}) + a_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^3(k\mathbf{r})], \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_{x1}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^1(k\mathbf{r}) + d_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^1(k\mathbf{r})], \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_{x1}(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{i\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [d_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^1(k_1\mathbf{r}) + c_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^1(k_1\mathbf{r})], \quad (13)$$

式中 k_1 和 k 分别为光波在球散射体和球散射体周围媒质的波数, μ_1 和 μ 为相应的磁导率。在球散射体表面,电磁场的边界条件为

$$\begin{cases} E_{x\theta} + E_{xs\theta} = E_{x1\theta} \\ H_{x\theta} + H_{xs\theta} = H_{x1\theta} \end{cases} \quad (r = a),$$

电磁场在球散射体表面的边界条件将入射场、散射场以及球散射体内部的电磁场联系起来,据此可以求得散射场的系数(a_{nm}^x, b_{nm}^x):

$$\begin{cases} a_{nm}^x = A_n p_{nm}^x \\ b_{nm}^x = B_n q_{nm}^x \end{cases}, \quad (14)$$

式中

$$\begin{cases} A_n = \frac{\mu j_n(x) [\eta x j_n(\eta x)]' - \mu_1 j_n(\eta x) [x j_n(x)]'}{\mu_1 j_n(\eta x) [x h_n^1(x)]' - \mu h_n^1(x) [\eta x j_n(\eta x)]'} \\ B_n = \frac{\mu \eta^2 j_n(\eta x) [x j_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [\eta x j_n(\eta x)]'}{\mu_1 h_n^1(x) [\eta x j_n(\eta x)]' - \mu \eta^2 j_n(\eta x) [x h_n^1(x)]'} \end{cases}, \quad (15)$$

在(15)式中的撇号表示对括号中的项求导, η 是球散射体相对于周围媒质的折射率, $x = ka$ 。

非偏振贝塞尔高斯光束可以视为两个等振幅且振动方向相互正交的偏振贝塞尔高斯光束的非相干叠加。因此,非偏振贝塞尔高斯光束的球散射场可以认为是分别沿 x 轴和 y 轴偏振贝塞尔高斯光束的球散射场的非相干叠加。对于沿 y 轴偏振的贝塞尔高斯光束的球散射场,也可以采用相同的步骤求得其球散射场的系数(a_{nm}^y, b_{nm}^y):

$$\begin{cases} a_{nm}^y = A_n p_{nm}^y \\ b_{nm}^y = B_n q_{nm}^y \end{cases}, \quad (16)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} p_{nm}^y &= \frac{k^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -4i^{n+1} D_{nm} \int_0^{\pi/2} BG(k \sin \alpha) [\cos \alpha I_- \pi_{nm}(\cos \alpha) - i I_+ \tau_{nm}(\cos \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ q_{nm}^y &= \frac{k^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -4i^{n+1} D_{nm} \int_0^{\pi/2} BG(k \sin \alpha) [\cos \alpha I_- \tau_{nm}(\cos \alpha) - i I_+ \pi_{nm}(\cos \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \end{aligned} \right. ,$$

这样非偏振贝塞尔高斯光束的球散射场的表达式为

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm}^x \mathbf{M}_{nm}^3 + b_{nm}^x \mathbf{N}_{nm}^3 + a_{nm}^y \mathbf{M}_{nm}^3 + b_{nm}^y \mathbf{N}_{nm}^3), \quad (17)$$

根据(17)式可得,在远场条件下非偏振贝塞尔高斯光束球散射的无量纲散射函数:

$$F(\theta, \phi) = \sum_{v=x,y} |S_1^v(\theta, \phi)|^2 + \sum_{v=x,y} |S_2^v(\theta, \phi)|^2, \quad (18)$$

式中

$$\begin{cases} S_1^v(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \exp(im\phi) [a_{nm}^v \pi_{nm}(\cos \theta) + b_{nm}^v \tau_{nm}(\cos \theta)] \\ S_2^v(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \exp(im\phi) [a_{nm}^v \tau_{nm}(\cos \theta) + b_{nm}^v \pi_{nm}(\cos \theta)] \end{cases} \quad v = x, y.$$

3 贝塞尔高斯光束与贝塞尔光束、高斯光束的球散射远场的比较

为了数值计算的目的,取贝塞尔高斯光束的参数: $\lambda = 1550 \text{ nm}$, $\gamma = k \sin \theta_B$, 光束的圆锥角 $\theta_B = \pi/10$, 那么贝塞尔高斯光束中心光斑半径 $\rho_0 = 2.405/(k \sin \theta_B)$; 取贝塞尔高斯光束的腰半径 $\omega_0 = 6\rho_0$ 。贝塞尔光束即是取贝塞尔高斯光束的腰半径 $\omega_0 \rightarrow \infty$, 而高斯光束则是取贝塞尔高斯光束的参数 $\gamma = 0$, 其他参数不变。取球散射体的相对折射率和半径: $\eta = 1.33$, $a = 2\rho_0$ 。球散射体及其周围媒质的磁导率: $\mu_1 = \mu = 1$ 。因为无量纲散射函数是

无穷级数和的形式,取求和指标 n 的上限 $N = x + 4x^{1/3} + 2$, x 为大小参数^[12]。图1是贝塞尔高斯光束,贝塞尔光束和高斯光束的球散射远场在半平面 $\phi = 0, 5\pi$ 内归一化后的分布,四幅子图依次是球散射体中心在 y 轴上位置分别为 $0, 2\rho_0, 4\rho_0, 6\rho_0$ 时的分布。图1表明当球散射体在光束中心时,两者散射几乎完全相同。当球散射体偏离光轴时,偏离越大,两者的散射分布差异越大,但是极点分布方向基本一致。相对于贝塞尔光束,贝塞尔高斯光束的球散射远场分布要平滑些。高斯光束的前向散射比较显著,而贝塞尔高斯光束和贝塞尔光束的散射则是在光束圆

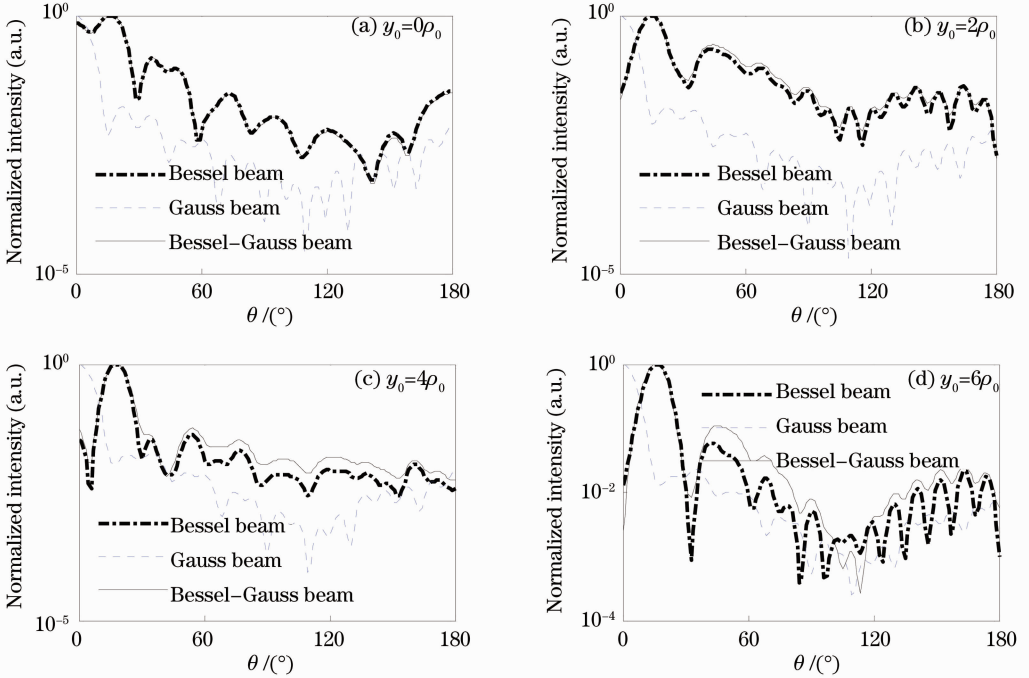


图1 贝塞尔高斯光束与贝塞尔光束,高斯光束球散射远场在 $\phi = 0.5\pi$ 内的比较

Fig. 1 Comparison of the scattering far fields for the Bessel-Gauss beam with Bessel beam and Gauss beam by a sphere in $\phi = 0.5\pi$

锥角方向上比较显著。

4 结 论

应用傅里叶变换,平面波谱展开和球面矢量波函数展开法,求得了非偏振贝塞尔高斯光束球散射远场的无量纲散射函数。通过数值模拟,对非偏振的贝塞尔高斯光束和贝塞尔光束,高斯光束的球散射远场进行了比较。比较发现,当球散射体偏离光束中心时,非偏振贝塞尔高斯光束和贝塞尔光束的球散射远场的差异主要是散射强度的差异,随着球散射体对光束中心偏离的增大,两光束球散射分布的差异也逐渐增大,但是极点所在的方向基本一致,在光束圆锥角($\theta_B = \pi/10$)附近方向上,两者散射分布比较一致。高斯光束的前向散射比较显著,而贝塞尔高斯光束和贝塞尔光束的散射则是在光束圆锥角方向上比较显著。

参 考 文 献

- 1 K. Uehara, H. Kikuchi. Generation of nearly diffraction-free laser beams[J]. *Appl. Phys. B*, 1989, **48**(2): 125~129
- 2 J. Rogel-Salazar, G. H. C. New, S. Chavez-Cerda. Bessel-Gauss beam optical resonator [J]. *Opt. Commun.*, 2001, **190**(1-6): 117~122
- 3 Lu Wenhe, Wu Fengtie, Zheng Weitao. Generation of non-

diffraction Bessel-like beam using a lens axicon[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1618~1621

卢文和, 吴逢铁, 郑维涛. 透镜轴棱锥产生近似无衍射贝塞尔光束[J]. *光学学报*, 2010, **30**(6): 1618~1621

- 4 Ma Liang, Wu Fengtie. Bottle beam generated by reconstruction of Bessel beam with an annular obstacle[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **38**(2): 0202011

马 亮, 吴逢铁. 环形障碍物后的无衍射光重建产生局域空心光束[J]. *中国激光*, 2011, **38**(2): 0202011

- 5 F. Gori, G. Guattari, C. Padovani. Bessel-Gauss beams[J]. *Opt. Commun.*, 1987, **64**(6): 491~495
- 6 Z. Bouchal. Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments and applications [J]. *Czech J. Phys.*, 2003, **53**(7): 537~578
- 7 Philip L. Marston. Scattering of a Bessel beam by a sphere[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, **121**(2): 753~758
- 8 Ma Xiubo, Li Enbang. Scattering of an unpolarized Bessel beam by spheres[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2010, **8**(12): 1195~1198
- 9 F. G. Mitri. Arbitrary scattering of an electromagnetic zero-order Bessel beam by a dielectric sphere[J]. *Opt. Lett.*, 2011, **36**(5): 766~768
- 10 B. Maheu, G. Gouesbet, G. Rrehan. A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile[J]. *J. Opt. (Paris)*, 1988, **19**(2): 59~67
- 11 A. Doicu, T. Wriedt. Computation of the beam-shape coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory by using the translational addition theorem for spherical vector wave function [J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(13): 2971~2978
- 12 C. F. Bohren, D. R. Huffman. Absorption and Scattering of Light by Small Particles[M]. New York: Wiley-Interscience, 1983. 477

栏目编辑: 李文喆