

# 根据稀疏基底选择抽样模型

李宏霄 陈晓冬\* 汪毅 郁道银

(天津大学精密仪器与光电子工程学院, 天津 300072)

**摘要** 在压缩传感技术应用中,根据稀疏基底选择抽样模型对重构结果影响很大。在傅里叶空间中,极坐标星形抽样和随机抽样的重构效果差异巨大,应用傅里叶光学理论对傅里叶空间的频谱分布进行分析,从理论上解释了原因,并且据此提出稀疏基底和抽样模型的匹配情况会影响重构效果。在小波空间中,进行了均匀抽样和随机抽样的对比重构实验,发现后者的重构效果更好,并确定了根据稀疏基底选择合适抽样模型的可行性,为实际应用中降低抽样率,提高重构效果提供了方法依据。

**关键词** 傅里叶光学; 抽样模型选取; 小波变换; 压缩传感; 稀疏基底

**中图分类号** TN911.73 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0807001

## Sampling Model Selection According to Sparse Base

Li Hongxiao Chen Xiaodong Wang Yi Yu Daoyin

(College of Precision Instrument and Opto-Electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract** The study about the compressed sensing technology indicates that selecting sampling model according to the sparse base has great influence on the reconstruction results. In the Fourier space, there are huge differences between the reconstructions of the stellate sampling of polar coordinates and the random sampling. The spectral distribution of the Fourier space is analyzed by Fourier optical theory and the phenomena is explained theoretically. It is proposed that the matching degree between the sparse base and the sampling model may affect the reconstruction effect. In the wavelet space, a comparison experiment of reconstruction is taken with the uniform sampling and the random sampling, and the latter is better. Therefore, a method is provided for the practical application to reduce the sampling rate and improve the reconstruction effect by choosing suitable sampling models according to the sparse bases.

**Key words** Fourier optics; sampling model selection; wavelet transform; compressed sensing; sparse base

**OCIS codes** 070.4560; 100.3010; 100.7410

## 1 引言

压缩传感技术方兴未艾,它的抽样率远低于奈奎斯特-香农抽样定理规定的标准,但却具有非常好的还原效果<sup>[1]</sup>,该技术主要应用于信号处理,因此各个相关领域都开始引入该技术,比如医学计算机断层扫描(CT)成像<sup>[2,3]</sup>、快速核磁共振成像(MRI)<sup>[4,5]</sup>等。Takhar 等<sup>[6]</sup>做出了单像素成像的原型机,将压缩传感技术低抽样率的优势发挥到了极高水平。近些年来,国内也有很多学者开始了相关的研究,在光信息处理领域,除了重建算法之外<sup>[7,8]</sup>,研究领域还

扩展到了光学器件<sup>[9]</sup>和非可见光波段<sup>[10]</sup>,为光学带来了新的发展契机。在各种压缩传感技术应用中,都需要考虑抽样方式的问题,Candes 等<sup>[11]</sup>提出了有限等距映射(RIP)假设,该假设通过限制测量矩阵以保证重构信号的准确性,同时也证明了采用随机变量矩阵作为转换矩阵,能够最大限度地满足 RIP 的条件。在实验中 Candes 等<sup>[12]</sup>对信号在傅里叶空间的变换系数进行极坐标星形抽样,获得了非常好的还原效果,但是他们没有将该结果与其他的抽样方式进行比较。本文在此基础上,比较了极坐

**收稿日期**: 2012-02-20; **收到修改稿日期**: 2012-03-31

**作者简介**: 李宏霄(1986—),男,博士研究生,主要从事医学图像处理方面的研究。E-mail: hxli@tju.edu.cn

**导师简介**: 郁道银(1945—),男,教授,博士生导师,主要从事光电仪器和医学图像处理等方面的研究。

E-mail: dyu@tju.edu.cn

\* **通信联系人**。E-mail: xdchen@tju.edu.cn

标星形抽样和等密度随机抽样的重构结果。实验表明,在傅里叶变换空间中,极坐标星形抽样比随机抽样的重构效果更好。此外,小波变换空间中,随机抽样则比均匀抽样的重构效果更好。对上述两种现象的产生原因进行了分析论证,本文并提出了根据稀疏基底选择合适抽样模型的理念。

## 2 原理分析

图 1 是傅里叶空间中,极坐标星形抽样与随机抽样的稀疏重构结果的比较,稀疏重构实验采用了  $l_1$ -magic 工具包<sup>[13]</sup>。图 1(a)是原图像,图 1(c)是傅

里叶空间中极坐标星形抽样(22 line; 2740 point)稀疏重构的结果,图 1(c)是傅里叶空间随抽样(2740 point)稀疏重构的结果,两种情况的抽样率相同,都抽取了傅里叶空间中的 2740 point。描述稀疏重构效果的还原误差为

$$\epsilon = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{x}'$  为重构信号,  $\mathbf{x}$  为原信号。通过还原误差率的比较可以发现,图 1(c)中的还原误差率为 2.27%,图 1(e)中的还原误差为 13.8%,极坐标星形抽样的重构效果较好。

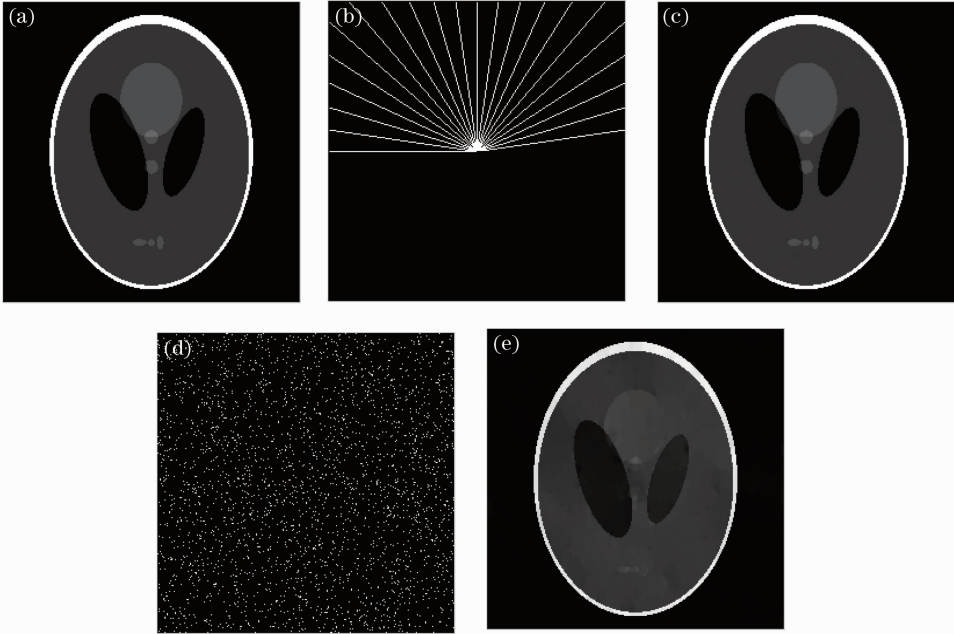


图 1 (a)原图;(b)傅里叶空间中极坐标星形抽样模型与(c)稀疏重构的结果;(d)傅里叶空间随机抽样的模型与(e)稀疏重构的结果

Fig. 1 (a) Original image; (b) stellite sampling model and (c) reconstructed result; (d) random sampling model and (e) sparse reconstructed result in Fourier space

### 2.1 RIP 性质和随机抽样

压缩传感解决问题的思路是:假设有信号向量  $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ , 其中  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$ , 这个信号可以是数字信号也可以是数字图像,如果该信号  $\mathbf{x}$  在某个基底中是稀疏的,那么只要用很少的随机测量值  $\mathbf{y}$ ,通过求解一个简单的线性规划问题,就有可能以高精度还原该信号。设  $\mathbf{x}$  的测量值  $\mathbf{y}$  为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{A}$  是测量矩阵,设重构的结果为  $\mathbf{x}$ ,则通过求解线性规划问题得到重构结果

$$\mathbf{x}' = \arg \min_{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}} \|\mathbf{x}\|_{l_1}^N. \quad (3)$$

为了保证重构的准确性,Candes 等<sup>[11]</sup>引入了针对测量矩阵  $\mathbf{A}$  的 RIP 性质。设集合  $t$  为列索引值的

集合,  $\mathbf{A}_T$  表示  $T$  中索引值对应于矩阵  $\mathbf{A}$  中的列组合成的矩阵,  $\mathbf{x}_T$  表示  $T$  中索引值对应于信号  $\mathbf{x}$  中的项组合成的向量,则可以说矩阵  $\mathbf{A}$  满足  $k$  阶 RIP,如果存在  $\delta_k \in (0,1)$  对所有满足  $\#T \leq k$  的集合  $T$  有

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}_T\|_{l_2}^2 \leq \|\mathbf{A}_T \mathbf{x}_T\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}_T\|_{l_2}^2. \quad (4)$$

通常来说,测量矩阵满足 RIP 的阶数  $k$  越大,则其测量值重构还原的准确性就越高。就目前已知的结果,随机矩阵通常能够很好地满足 RIP,因此利用随机抽样矩阵来对原信号或原信号在其他空间的变换系数进行测量,然后通过求解相应的规划问题重构信号。

## 2.2 傅里叶频谱特征分布

复函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换定义为

$$F(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy, \quad (5)$$

式中  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  表示傅里叶变换, 其变换结果  $F(f_x, f_y)$  是  $f(x, y)$  的傅里叶谱。函数  $f(x, y)$  也可以用其频谱函数  $F(f_x, f_y)$  表示

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(f_x, f_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y, \quad (6)$$

式中  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  傅里叶逆变换。根据(6)式, 二维傅里叶变换可以看作是把函数  $f(x, y)$  分解为基元函数  $\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]$  的线性组合,  $F(f_x, f_y)$  就是对应的权重因子, 权重因子和基元函数整体构成了完整的函数  $f(x, y)$ 。

为了分析傅里叶频谱对应于原空间的特征关系, 引入信息光学波动性分析的方法。波动光学中, 某一平面  $xOy$  上传播的平面波的复振幅表示为

$$U(x, y) = U_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = U_0 \exp\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \cos \alpha + y \cos \beta)\right], \quad (7)$$

式中  $\cos \alpha, \cos \beta$  分别表示平面波波矢  $\mathbf{k}$  的方向余弦。这样的一个单方向平面波正是其他复杂光波的基本构成元素, 把(7)式与基元函数  $\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]$  对比, 可以将基本的平面波看作是一个基元, 于是有

$$\begin{cases} f_x = \cos \alpha / \lambda \\ f_y = \cos \beta / \lambda \end{cases} \quad (8)$$

于是可以用基元函数表示单位振幅的平面波, 传播方向为

$$\begin{cases} \cos \alpha = \lambda f_x \\ \cos \beta = \lambda f_y \end{cases}, \quad (9)$$

随着  $(f_x, f_y)$  的不同, 此平面波在平面  $xOy$  上的方向也不同。

对于任意一对特定的  $(f_x, f_y)$ , 当  $(f_x x + f_y y) = N$  ( $N$  为整数) 时, 有  $\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]$ , 相应的基元函数在由

$$y = -\frac{f_x}{f_y}x + \frac{N}{f_y} \quad (10)$$

表示的直线上相位为 0 或  $2\pi$  的整数倍。因此如图 2 所示, 这些等相位线的法线与  $x$  轴的夹角  $\theta$  可用  $f_x, f_y$  表示成

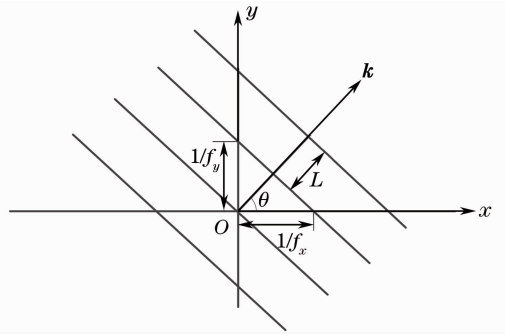


图 2 基元函数的零相位直线族

Fig. 2 Zero-phase straight lines family of primitive function

$$\theta = \arctan\left(\frac{f_y}{f_x}\right). \quad (11)$$

类似于时间频率用于表示特定波形在单位时间内重复的次数, 空间频率则是表示特定波形在单位空间距离内重复的次数, 因此空间频率也可以表示透镜和照相底片等的分辨率, 在本文中, 空间频率则表示二维数字图像的细节分辨率。空间频率的倒数称为空间周期。图 2 中所示的空间周期(即相邻零相位线间的间距)为

$$L = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, \quad (12)$$

而在  $x, y$  轴方向的周期为  $1/f_x, 1/f_y$ , 故  $f_x, f_y$  分别称为沿  $x$  方向和  $y$  方向的空间频率, 而沿等相位线法线方向的空间频率为

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (13)$$

图 3(a) 是 Lena 图像, 图 3(b) 是 Lena 图像的傅里叶变换, 傅里叶空间的坐标分别为  $f_x, f_y$ , 坐标原点的频率值为  $(0, 0)$ , 则以坐标原点为中心沿径向向外辐射依次分布着低频区(红色圆区域内, 彩图请见网络电子版)、中频区(绿色圆和红色圆之间的区域)、高频区(蓝色圆和绿色圆之间的区域)和超高频区(蓝色圆之外的区域), 各个频谱分区仅仅是为了方便说明问题, 没有确切的划分标准。现在以图中绿色圆上的一点  $P$  (用黄色星标识) 为例说明傅里叶频谱空间的分布特征与原图像信息之间的对应关系。点  $P$  的坐标为  $(f_x, f_y)$ , 其到原点的距离为  $f$ , 表示该点对应于原图像上空间频率(图像细节分辨率)为  $1/f$  的频谱信息, 绿色圆上的所有点全都对应于原图像上空间频率为  $1/f$  的频谱信息; 点  $P$  的两个坐标值  $(f_x, f_y)$  则表示该点对应于原图像上方向为  $(\tan \theta = f_y/f_x)$  的空间频率的频谱信息,  $\theta$  表示图像的细节纹理与轴的夹角, 所有与点  $P$  在同一直径上的点全

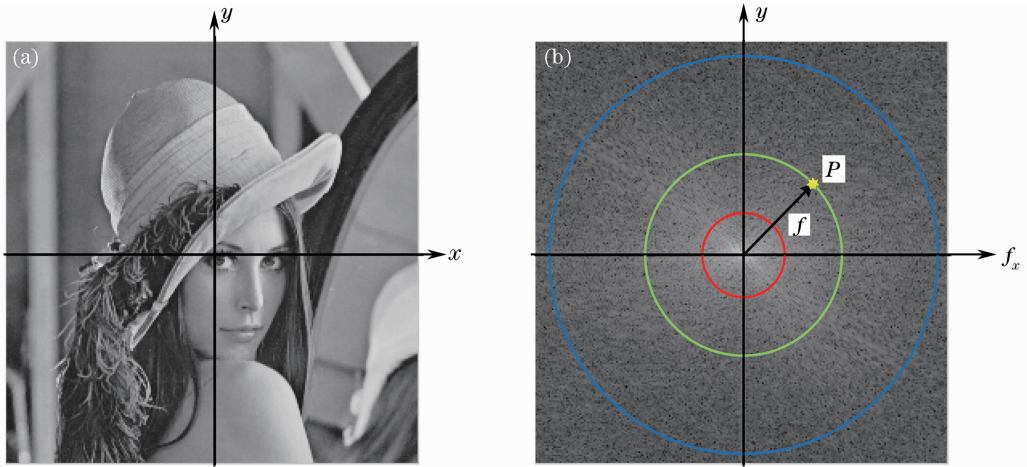


图 3 (a) Lena 图像和(b)其傅里叶变换的结果

Fig. 3 (a) Lena image and (b) its Fourier transform result

都表示对应于原图像上方向为 $(\pm\theta = \arctan f_y/f_x)$ 的空间频率的频谱信息。

通过分析图像傅里叶空间频谱分布特征,可发现图 1(b)所示的 22 条极坐标线以角度间隔  $\pi/22$  覆盖了傅里叶频谱的角度信息,同时这些极坐标线贯穿原点,覆盖了几乎所有幅度范围内的频谱值,相比较而言,图 1(d)所示的随机抽样模型则杂乱无章,容易遗漏某些频谱幅值,从而导致稀疏重构的效果。这就解释了图 1 所示现象,同时也为压缩传感的应用找到了一个新的视角——稀疏基底和抽样模型的匹配情况会影响重构效果,因此实际应用中应该针对不同类型的稀疏基底,根据基底的信息分布特征设计合适的采样模型,以降低抽样率。例如,在傅里叶变换空间,频率的幅度比辐角包含更多的信息量,因此图 1(b)的采样模型比图 1(d)的采样模型具有更好的还原效果,当针对傅里叶变换设计采样模型时,应该采集较多的频率幅度信息,适量采集辐角信息,这样在同样的抽样率下,符合傅里叶频谱信息分布特征的采样模型可以保留更多的信息,得到更好的还原效果。对于其他类型的变换空间,频谱的分布特征可能会有所不同,但是可以依此类推,设计更为“经济”的采样模型,降低抽样率,提高还原效率。

### 3 小波基底的抽样模型实验及分析

小波变换作为稀疏基底进行相关的实验。实验结果如图 4 所示,分别用随机抽样和均匀抽样模型对信号的小波变换进行采样,如图 4(f)所示,均匀抽样模型是将索引值为 3 倍数的行和列全部去掉,

留下的点就是最终的采样点,总采样点数为 29241,抽样率为 44.6%;随机抽样则是以相同的抽样率在小波空间随机选取 29241 个点作为采样点,如图 4(e)所示,图 4(f)和图 4(e)中白色点为采样点。随机抽样稀疏重构还原误差率为 1.85%,均匀抽样稀疏重构还原误差率为 16.37%,可见随机抽样比均匀抽样的重构效果要好。

导致该现象的原因是两种抽样模型与小波“频谱”的分布特征的关联程度(或者说“匹配程度”)不同。一个图像作小波分解后,可以得到一系列不同分辨率的子图像<sup>[14]</sup>,其分解过程如图 5 所示。分解后子图的排列如图 6 所示,可以发现这种排列方式具有明显的空间规律性,特别是在水平方向和垂直方向上。而均匀抽样模型本身的分布也具有很强的规律性(也是水平方向和垂直方向),由于均匀抽样模型与小波子图的分布特征相吻合,因而可能会导致均匀抽样恰好“漏采样”小波空间中某个“频段”的信息,使得抽样后该“频段”的信息被全部从小波空间中“抹去”,这种信息的缺失最终会导致如图 4(c)所示的重构结果中的缺陷。相比较而言,随机抽样模型与小波子图的分布特征差异很大,反而能够采集更为全面的信息,获得较好的还原结果。该实验结果从反面证明抽样模型与稀疏基底不匹配(在小波实验中就是指抽样模型和小波子图的特征分布相吻合)会降低信息采集能力,这说明根据基底的信息分布特征设计合适的采样模型,还可以避免信息的“漏采样”,保证还原结果的质量。



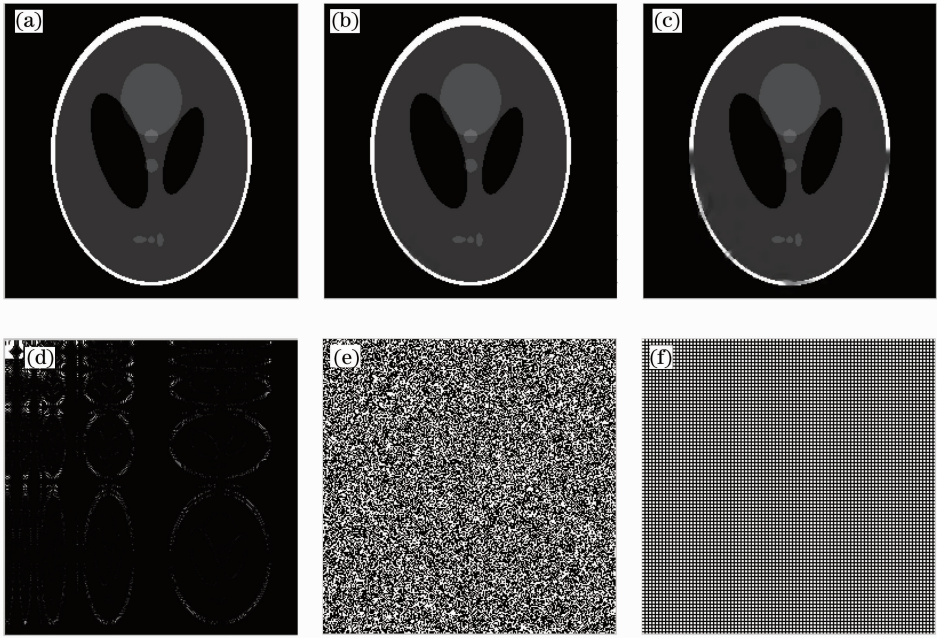


图 4 (a)原图像; (b)随机抽样稀疏重构的结果; (c)均匀抽样稀疏重构的结果; (d)原图像转换到小波空间的图像; (e)是随机抽样模板; (f)均匀抽样模板

Fig. 4 (a) Original image; (b) sparse reconstructed result of random sampling; (c) sparse reconstructed result of uniform sampling; (d) wavelet transform of original image; (e) random sample model; (f) uniform sampling model

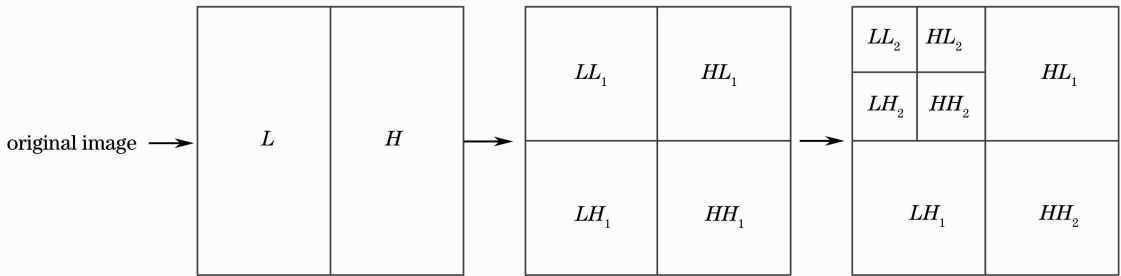


图 5 图像小波分解

Fig. 5 Image's wavelet decomposition

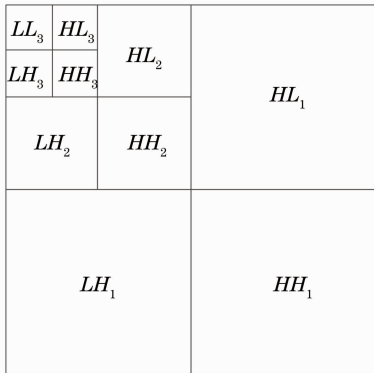


图 6 图像小波子图的排列

Fig. 6 Arrangement of the image's wavelet subgraphs

果的影响,验证了稀疏空间分布特征与抽样模型的匹配度会影响重构结果。在某个特定的稀疏空间中,不同的抽样模型会产生非常不同的重构结果。通过研究傅里叶和小波空间中的分布特征,提出了根据稀疏基底设计抽样模型的抽样原则,实验证明了该原则能够降低抽样率,避免不必要的抽样冗余。

### 参 考 文 献

- 1 E. J. Candes, J. K. Romberg, T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 2006, **59**(8): 1207~1223
- 2 G. Chen, J. Tang, S. Leng. Prior image constrained compressed sensing (PICCS): a method to accurately reconstruct dynamic CT images from highly undersampled projection data sets[J]. *Med. Phys.*, 2008, **35**(2): 660~663
- 3 E. Y. Sidky, X. Pan. Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2008,

## 4 结 论

讨论了傅里叶和小波空间中抽样模型对重构结

- 53(17): 4777~4807
- 4 M. Lustig, D. Donoho, J. M. Pauly. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. *Magn. Reson. Med.*, 2007, **58**(6): 1182~1195
- 5 J. Trzasko, A. Manduca, E. Borisch. Robust kernel methods for sparse MR image reconstruction; medical image computing and computer-assisted intervention—MICCAI 2007[C]. Brisbane: Springer, 2007, **4791**: 809~816
- 6 D. Takhar, J. N. Laska, M. B. Wakin *et al.*. A new compressive Imaging camera architecture using optical-domain compression[C]. *SPIE*, 2006, **6509**: 43~52
- 7 Gao Rui, Zhao Ruizhen, Hu Shaohai. Variable step size adaptive matching pursuit algorithm for image reconstruction based on compressive sensing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1639~1644  
高睿, 赵瑞珍, 胡绍海. 基于压缩感知的变步长自适应匹配追踪重建算法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(6): 1639~1644
- 8 Pan Rong, Liu Yu, Hou Zhengxin *et al.*. Image coding and reconstruction via compressed sensing based on partial DCT coefficients[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(6): 674~681  
潘榕, 刘昱, 侯正信等. 基于局部DCT系数的图像压缩感知编码与重构[J]. *自动化学报*, 2011, **37**(6): 674~681
- 9 Lu Minghai, Shen Xia, Han Shensheng. Ghost imaging via compressive sampling based on digital micromirror device [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(7): 0711002  
陆明海, 沈夏, 韩申生. 基于数字微镜器件的压缩感知关联成像研究[J]. *光学学报*, 2011, **31**(7): 0711002
- 10 Zhao Yaqin, Zhang Liangliang, Zhu Dechong *et al.*. Single-pixel terahertz Imaging based on compressed sensing [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(s1): s111003  
赵亚芹, 张亮亮, 祝德充等. 基于压缩传感的单点太赫兹成像[J]. *中国激光*, 2011, **38**(s1): s111003
- 11 E. J. Candes, T. Tao. Decoding by linear programming [J]. *IEEE Trans. Information Theory*, 2005, **51**(12): 4203~4215
- 12 E. J. Candes, J. Romberg, T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Trans. Information Theory*, 2006, **52**(2): 489~509
- 13 Emmanuel Candes, Justin Romberg.  $\ell$ -magic [J/OL]. <http://users.ece.gatech.edu/~justin/l1magic/>
- 14 Cheng Zhengxing. Wavelet Analysis and Application [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998. 182~186  
程正兴. 小波分析算法与应用 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998. 182~186

栏目编辑: 韩峰