

# 一种结合几何相容性分析的谱匹配算法

唐 俊 黄 煌 梁 栋 王 年

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

**摘要** 为了可靠地实现点模式匹配,提出了一种基于谱图理论与几何相容性分析的点模式匹配算法。利用拉普拉斯矩阵的特征向量获得待匹配点集间谱匹配代价的表示;结合以邻近关系表示的几何相容性,定义了一种混合形式的匹配目标函数;给出了基于松弛迭代的求解算法。仿真数据和真实图像上的比较实验表明所给出的方法具有较好的精度与时间性能。

**关键词** 机器视觉;匹配;谱图理论;几何相容性

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201232.0715001

## Spectral Correspondence for Point Pattern Matching Combined with Analysis of Geometric Consistency

Tang Jun Huang Huang Liang Dong Wang Nian

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract** To match point-sets reliably, an algorithm for point pattern matching based on spectral graph theory and the analysis of geometric consistency is presented. The cost of spectral correspondences between the matched point-sets is obtained by means of eigenvectors of Laplacian matrix. An object function with hybrid form is defined by incorporating geometric consistency represented by neighborhood relationship. The given object function is solved by utilizing iterative relaxation method. Comparative experiments applied to synthetic data and real-world images demonstrate the proposed method possesses better precision and time performance.

**Key words** machine vision; matching; spectral graph theory; geometric consistency

**OCIS codes** 150.1135; 330.5000; 100.5010

## 1 引 言

图像匹配是机器视觉、模式识别等研究领域的一个重要基础性课题<sup>[1~5]</sup>,点模式匹配是研究图像匹配的重要方法和途径,其中基于谱图理论的匹配算法<sup>[6~13]</sup>一直是众多研究者关注的热点。Scott 等<sup>[6]</sup>将谱方法应用于点模式匹配中,即先构造点集间的邻近矩阵,再对该矩阵进行奇异值分解(SVD),以获得对应关系。但是该算法对较大角度的旋转效果不好。针对该算法的不足之处,Shapiro 等<sup>[7]</sup>构造点集内部的邻近矩阵,再分别计算其对应的特征值和特征向量,通过比较邻近矩阵的有序特征向量获

取匹配关系。Carcassoni 等<sup>[8]</sup>给出了若干种邻近矩阵的构造方式,并将 Shapiro 算法置入最大期望(EM)算法的框架下。Leordeanu 等<sup>[9]</sup>提出了一种结合成对约束的谱方法(以下简称 LH 算法),构造待匹配点集间的分配图及其相应的邻近矩阵,然后根据邻近矩阵最大特征值所对应的特征向量求解点集间的对应关系。王年等<sup>[10]</sup>提出了一种基于图的拉普拉斯谱的匹配算法(以下简称 Wang 算法),该算法对待匹配点集分别构造拉普拉斯矩阵,通过分析该矩阵的特征向量获得匹配关系。Wang 等<sup>[11]</sup>用核主成分分析(Kernelized PCA)理论对 Shapiro 算

**收稿日期:** 2012-01-09; **收到修改稿日期:** 2012-02-13

**基金项目:** 国家自然科学基金(11071002,61172127)、安徽省教育厅自然科学基金项目(KJ2011A008)和安徽大学 211 工程学术创新团队资助课题。

**作者简介:** 唐 俊(1977—),男,博士,副教授,主要从事模式识别与计算机视觉等方面的研究。

E-mail: tangjun@ahu.edu.cn

法进行了诠释,并给出了一种核主成分分析版本的 Shapiro 算法。宣善立等<sup>[12]</sup>证实了最小生成树的邻接矩阵的特征向量也能用于求解匹配关系,其算法的形式与 Shapiro 算法类似(以下简称 Xuan 算法)。Silletti 等<sup>[13]</sup>在多核学习理论的基础上,给出了 Scott 和 Longuet-Higgins 算法的一种改进形式。

值得注意的是,当前已有的工作多侧重于讨论利用特征值和特征向量来表示点的特征(即属性域的刻画),在求解匹配关系时鲜有考虑点集内部点间结构关系(即几何相容性)对最终结果的影响。虽然文献[9]对此有所涉及,但给出的算法时间性能较差,并不适用于特征点数量较多的情况。针对以上问题,在文献[10]基础上,给出了一种具有较好时间

性能的结合几何相容性分析的谱匹配算法:首先定义了包含谱相似性和几何相容性的匹配目标函数,然后给出了基于松弛迭代的求解方法,并在仿真数据和真实图像上验证其有效性。

## 2 谱匹配代价

设模板点集为  $\mathbf{G}$ ,待匹配的目标点集为  $\mathbf{H}$ ,点集间的匹配关系为  $f:\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H}$ 。

在文献[10]算法基础上,给出待匹配点集属性域匹配代价的定义。对含有  $m$  个点  $\mathbf{G}_i(i=1,2,\dots,m)$  的特征点集  $\mathbf{G}$ ,其拉普拉斯矩阵定义如下:

$$\mathbf{L}_G = [l_{pq}] = \begin{cases} -\|\mathbf{G}_p - \mathbf{G}_q\|^2 & p \neq q \\ -\sum_{p \neq q} l_{pq} & p = q \end{cases} \quad (p, q = 1, \dots, m), \quad (1)$$

类似可得点集  $\mathbf{H}$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_H$ 。分别对  $\mathbf{L}_G$ 、 $\mathbf{L}_H$  进行 SVD,可得

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mathbf{U}^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{L}_H = \mathbf{V} \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \mathbf{V}^T, \quad (3)$$

称  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  的第  $i$  个行向量分别为点集  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$  的第  $i$  个点的特征表示,记为  $\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}$ 。然后,对  $\mathbf{v}^{(i)}$  符号校正,使其满足  $\mathbf{u}^{(i)}$  与  $\mathbf{v}^{(i)}$  之间的距离最小<sup>[10]</sup>,记校正后的向量为  $\mathbf{v}^{(i)}$ ,则可定义特征点间的相似性度量为

$$\omega_{ij} = \exp(-\alpha \|\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{v}^{(j)}\|), \quad (4)$$

式中  $\alpha$  为平滑系数。那么,点集间的谱匹配代价可表示为

$$C_s(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^m \omega_{i, f(i)}. \quad (5)$$

## 3 与几何相容性的结合

在得到了谱匹配代价之后,令  $C_t(\mathbf{G}, \mathbf{H})$  为利用几何相容性得到的匹配代价,则匹配目标函数可定义为

$$C(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = C_s(\mathbf{G}, \mathbf{H}) + \beta C_t(\mathbf{G}, \mathbf{H}), \quad (6)$$

式中  $\beta$  为权重系数。几何相容性表示的方法很多,如几何变换关系、方向性等<sup>[14~17]</sup>。借鉴文献[17]的思想,以点间的邻近关系表示,即:点对  $(\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_{i'}) \in \mathbf{G}$ ,相应的匹配点对  $(\mathbf{H}_j, \mathbf{H}_{j'}) \in \mathbf{H}$ ,其中若  $\mathbf{G}_i$  和  $\mathbf{G}_{i'}$  是邻近点对关系,则  $\mathbf{H}_j$  和  $\mathbf{H}_{j'}$  也是邻近点对;反之亦然。用  $\mathbf{K}_i$  来表示  $\mathbf{G}_i$  的  $k$  邻域,  $\mathbf{K}_j$  表示  $\mathbf{H}_j$  的  $k$  邻域,在点集  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$  上分别定义如下关系

$$d(i, i') = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{G}_{i'} \in \mathbf{K}_i \text{ and } \mathbf{G}_i, \mathbf{G}_{i'} \in \mathbf{G} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d(j, j') = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{H}_{j'} \in \mathbf{K}_j \text{ and } \mathbf{H}_j, \mathbf{H}_{j'} \in \mathbf{H} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

则点集间的邻近相似性度量可以表示为

$$C_t(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^m \sum_{i' \in \mathbf{K}_i} d[f(i), f(i')] + \sum_{j=1}^m \sum_{j' \in \mathbf{K}_j} d[f^{-1}(j), f^{-1}(j')], \quad (8)$$

其中  $f$  可以写成如下矩阵形式

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

若  $\mathbf{G}_i$  和  $\mathbf{H}_j$  匹配,则  $p_{ij}=1$ ,否则  $p_{ij}=0$ ;其中,矩阵  $\mathbf{P}$  满足以下条件:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \sum_{i=1}^m p_{ji} = 1. \quad (10)$$

结合矩阵  $\mathbf{P}$ , (6)式可写成

$$C(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_{ij} p_{ij} + 2\beta \sum_{i=1}^m \sum_{i' \in \mathbf{K}_i} \sum_{j=1}^m \sum_{j' \in \mathbf{K}_j} p_{ij} p_{i'j'}. \quad (11)$$

至此,匹配关系的求解转化为  $C(\mathbf{G}, \mathbf{H})$  的最大化问题。由于  $p_{ij} \in \{0, 1\}$ ,这实际上是一个非确定性多项式(NP)完全的二次整数规划问题。但是,如果将  $p_{ij}$  松弛至  $p_{ij} \in [0, 1]$ ,使用概率松弛法迭代地求解

一个局部最优解并不困难。而且,很多实践也表明,如果能给出较好的初始值估计,通过概率松弛法求得的局部最优解也能获得较满意的匹配结果<sup>[14,17]</sup>。根据(11)式所定义的目标函数,可得梯度  $q_{ij}$  为

$$q_{ij} = \omega_{ij} + 4\beta \sum_{i' \in \mathbf{K}_i} \sum_{j' \in \mathbf{K}_j} p_{i'j'}, \quad (12)$$

根据概率松弛算法,可得概率更新公式为

$$p_{ij} = \frac{p_{ij} q_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij} q_{ij}}. \quad (13)$$

更新(13)式对于矩阵  $\mathbf{P}$  来说只是进行了行方向的归一化。为了满足(10)式的条件,在每轮迭代结束后,采用文献[18]的方法,通过交替行列归一化的方式将其转化为双随机矩阵:

$$p_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{l=1}^m p_{lj}}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

$$p_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{l=1}^m p_{il}}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

对于初始概率,采用(4)式进行估计,同时,为满足(10)式也将其转化为双随机矩阵形式。松弛迭代的次数经大量的实验验证取 100 已足够。在松弛迭代结束后,为了获得更多的匹配对,当  $p_{ij} > 0.65$  时就认为点对存在匹配关系。

综上所述,本文算法的具体步骤为:

1) 对待匹配点集  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$  分别构造拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_G$  和  $\mathbf{L}_H$ ;

2) 分别对  $\mathbf{L}_G$  和  $\mathbf{L}_H$  进行 SVD 分解,得到点集  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$  的特征向量组  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$ ,在对  $\mathbf{V}$  进行向量校正后,按(4)式计算  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$  的谱相似性,并将其转化为双随机矩阵,作为矩阵  $\mathbf{P}$  的初始值;

3) 设置迭代次数为 1;

4) 使用(13)式对概率矩阵进行更新,在更新后,将其转化为双随机矩阵;

5) 迭代次数加 1,如果迭代次数小于  $I_{\max}$  ( $I_{\max} = 100$ ),跳转至 4);

6) 根据概率矩阵  $\mathbf{P}$  获取点集间的匹配关系。

## 4 实验及分析

### 4.1 算法性能分析

点的随机位置噪声对谱匹配算法有着重要影响,考察不同噪声水平下本文算法的性能,对比算法取 LH 算法<sup>[9]</sup>、Wang 算法<sup>[10]</sup>和 Xuan 算法<sup>[12]</sup>。

模板点集为在单位平面内生成 100 个点的随机

点集。对于噪声,假设其服从期望为 0,已知均方差的高斯分布,使用在模板点集的每个点上叠加高斯噪声的方法生成目标点集,均方差采用模板点集内点间最近距离的平均值作为指标。图 1 给出了不同方法正确率随着噪声增大而变化的折线图,其中横坐标表示模板点集内点间最近距离的平均值的比率表示,纵坐标为进行 100 次蒙特卡罗实验的平均正确率。总体而言,Wang 算法的正确率最低。在噪声水平小于 0.2 的情况下,本文算法、LH 算法和 Xuan 算法给出了相仿的结果;但随着噪声水平的进一步提高,本文算法得出的正确率远高于这两种算法。究其原因,由于随机位置,噪声对邻近关系不会产生重大影响,所以融入了邻近关系度量的本文算法要比仅使用距离度量的 LH 算法和 Xuan 算法抗噪声能力要强。而相比 Wang 算法性能的大幅度提高说明几何相容性的结合是提高谱匹配算法抗噪声能力的有效途径。

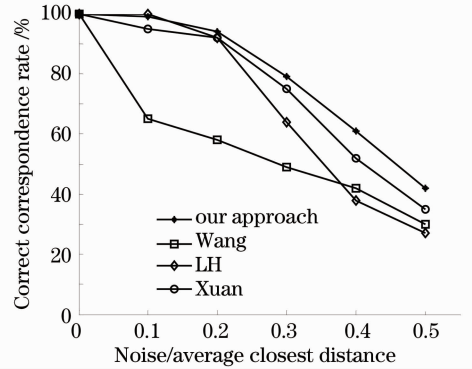


图 1 4 种算法正确率随噪声增大的变化曲线

Fig. 1 Correct-rate variation curves of four compared algorithms with noise increasing

接下来,对本文方法及比对算法的复杂度进行分析。假设待匹配点集均含有  $m$  个点。步骤 1 的复杂度为  $O(m^2)$ ;步骤 2 中的 SVD 复杂度为  $O(m^3)$ ,计算谱相似性复杂度为  $O(m^2)$ ,转化为双随机矩阵复杂度为  $O(m^2)$ ;步骤 3、4 和 5 为一循环,其中循环体的复杂度为  $O(m^2)$ ,则整个循环复杂度为  $O(100m^2)$ ;步骤 6 的复杂度为  $O(m^2)$ 。由此可得本文算法综合复杂度为

$$O(m^2 + m^3 + m^2 + m^2 + 100m^2 + m^2),$$

即  $O(m^3)$ 。根据上述分析类似可得 Wang 算法的复杂度为  $O(m^3)$ 。LH 算法的耗时操作也主要与 SVD 有关,但是,该算法利用分配图构造的亲近矩阵规模为  $m^2 \times m^2$ ,所以其复杂度为  $O(m^6)$ 。Xuan 算法中最小生成树的生成采用了 Prim 算法,其复杂度为

$O(m^2)$ ;SVD 复杂度为  $O(m^3)$ , 则总体复杂度为  $O(m^3)$ 。

#### 4.2 真实图像实验

在真实图像实验中,采用 CMU/VASC 数据库的 model house 序列作为测试数据。选取其中的 8

frame(依次为第 0、5、10、15、20、25、30、35 frame), 并在每帧图像上选择 60 个特征点。以第 0 帧为基准,分别与其余各帧图像进行匹配,并且与 LH 算法、Wang 算法和 Xuan 算法的结果进行比较。本文算法所涉及参数设置如下: $\alpha=10, \beta=0.25$ ,

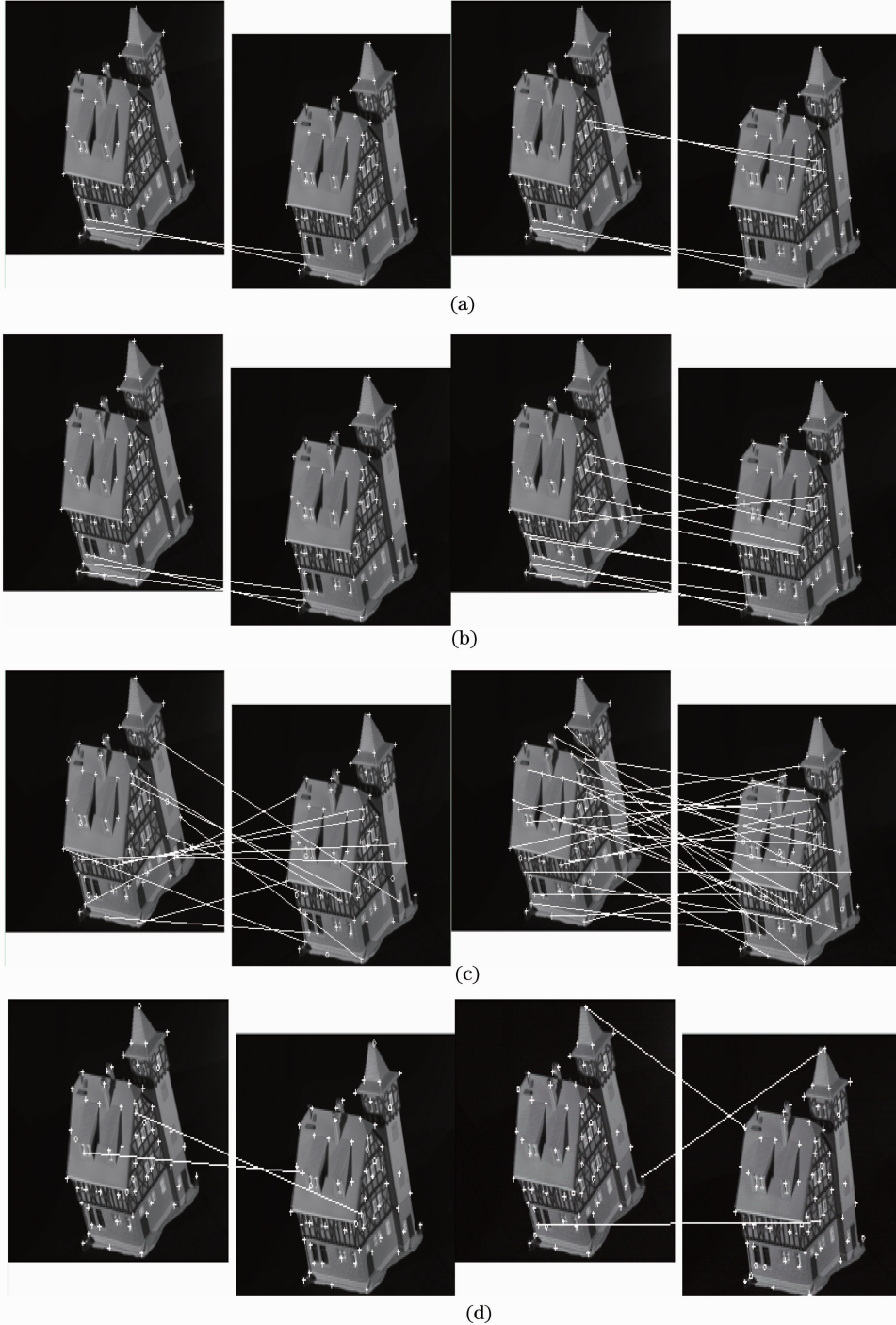


图 2 4 种算法在 model-house 上的匹配结果。(a)本课题方法;(b) LH 算法;(c) Wang 算法;(d) Xuan 算法  
Fig. 2 Matching results on model house from four compared algorithms. (a) Our approach; (b) LH algorithm;  
(c) Wang algorithm; (d) Xuan algorithm

$k=4$ 。在计算谱相似性时使用了高斯函数,可以在一定程度上减小位置噪声对计算特征点相似性的影响, $\alpha$ 越大,噪声平滑作用越明显,但同时也会降低判别性。 $\beta$ 作为由几何相容性得到的匹配代价的权重,其取值越大,越强调几何相容性在求解最终匹配结果中的作用。 $k$ 的取值表明所关注的邻域的范围,

取值较小时,强调点集局部的影响,较大时,则强调点集的全局结构对匹配结果的影响。

图2给出了第0帧与第20帧(左),第0帧与35帧(右)的匹配结果,为了获得直观的显示效果,图示中仅标注错误匹配对和未匹配的特征点(用‘o’表示)。表1给出了整组实验的详细数据。

表1 四种算法的匹配数据统计

Table 1 Summary of matching results from four compared algorithms

Images		0	5	10	15	20	25	30	35
Our approach	Correct number	—	60	60	58	58	57	60	56
	Correct rate /%	—	100	100	97	97	95	100	93
LH	Correct number	—	60	60	57	57	56	56	50
	Correct rate /%	—	100	100	95	95	93	93	83
Wang	Correct number	—	56	49	40	42	31	26	27
	Correct rate /%	—	93	82	67	70	52	43	45
Xuan	Correct number	—	60	60	54	57	53	52	50
	Correct rate /%	—	100	100	90	95	88	87	83

表2给出了以上实验的平均运行时间,所有算法均在Windows XP下,用Matlab7.8编程实现,硬件环境为Intel E5300 2.6 GHz CPU、2 G内存的计算机。

表2 4种算法的平均运行时间

Table 2 Average running time of four compared algorithms

Algorithm	Running time /s
Our approach	3.2
Wang	0.1
LH	396.4
Xuan	0.2

从匹配结果看,Wang算法的效果最差,随着视差的增大,匹配的精度会有较大幅度的下降。虽然视差的变化会使LH算法的精度略有下降,但总体上看仍获得了较高的匹配精度。在视差较小时,Xuan算法能获得很好的结果,但当视差逐步增大时,Xuan算法的准确率有明显降低。本文算法给出了最好的结果,视差的变化对匹配正确率影响很小,充分说明了本文算法具有更好的精度。从算法的执行时间上看,LH算法由于其复杂度很高,所花费时间最长。本文算法由于存在一个迭代的过程,时间稍长于Wang算法和Xuan算法。结合以上的算法性能分析,综合考虑运行时间、算法精度与抗噪声能力等方面,可以看出本文算法具有明显的比较优势。

图3给出了对第0帧与第35帧图像进行匹配时,本文算法的正确率随着迭代次数变化的曲线。从该图可以看出,匹配的正确率随着迭代过程的进行逐步提高,当迭代次数超过40次时,正确率不再

有变化,说明本文的算法是收敛的。由于概率松弛的求解算法是一个局部寻优的过程,也说明了使用谱相似性作为初始解的估计是可行的。

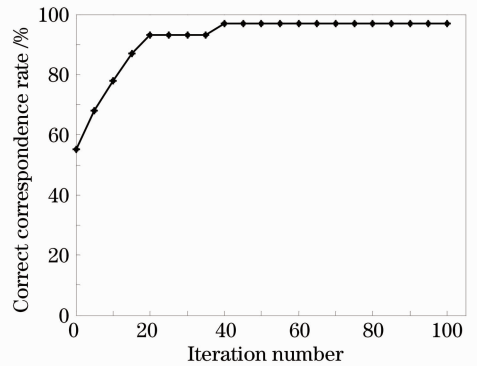


图3 本课题算法正确率随迭代次数变化曲线

Fig. 3 Correct-rate variation curves of our approach with iteration number increasing

## 5 结 论

提出了一种结合几何相容性分析的谱匹配算法。利用点集的拉普拉斯谱特征定义了点集的谱匹配代价;结合以邻近关系表示的几何相容性给出了一种混合形式的匹配目标函数;给出了松弛迭代的求解算法。与已有方法相比,在算法运行时间、精确度与抗噪声能力方面,本文算法均表现出了相对较好的性能。在后续的研究中,将继续探讨其他形式的几何相容性与谱匹配算法的结合问题。

## 参 考 文 献

1 Hao Zhicheng, Zhu Ming. Serial image registration based on

- multiple restriction matching algorithm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 702~707
- 郝志成, 朱 明. 基于多约束准则匹配算法的序列图像配准[J]. *光学学报*, 2010, **30**(3): 702~707
- 2 Bao Wenxia, Liang Dong, Tang Jun. Matching algorithm based on probabilistic relaxation of spectral correlation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 708~712
- 鲍文霞, 梁 栋, 唐 俊. 一种基于谱相关性的概率松弛匹配算法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(3): 708~712
- 3 Zhang Chao, Wang Qionghua, Li Dahai *et al.*. Acquisition of parallax images for multi-view auto-stereoscopic display based on SIFT matching algorithm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(7): 1989~1993
- 张 超, 王琼华, 李大海 等. 基于 SIFT 匹配算法的多视点自由立体显示视差图像的生成 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(7): 1989~1993
- 4 Chen Bing, Zhao Yigong, Li Xin. A new approach to scene matching during electro-optical imaging terminal guidance [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(1): 163~168
- 陈 冰, 赵亦工, 李 欣. 一种新的光电成像末制导景象匹配方法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(1): 163~168
- 5 He Jianwei, Yang Jianfeng, Xue Bin *et al.*. Research on the automatic stitching of panorama camera image based on system similarity matching principle [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(4): 989~993
- 何建伟, 杨建峰, 薛 彬 等. 基于系统论匹配准则的尺度不变特征变换的图像自动拼接研究 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(4): 989~993
- 6 G. L. Scott, H. C. Longuet-Higgins. An algorithm for associating the features of two images [C]. *Biological Sciences*, 1991, **244**: 21~26
- 7 L. S. Shapiro, J. Brady. Feature-based correspondence: an eigenvector approach [J]. *Image and Vision Computing*, 1992, **10**(5): 283~288
- 8 M. Carcassoni, E. R. Hancock. Spectral correspondence for point pattern matching [J]. *Pattern Recognition*, 2003, **36**(1): 193~204
- 9 M. Leordeanu, M. Hebert. A spectral technique for correspondence problems using pairwise constraints [C]. *IEEE International Conference on Computer Vision*, 2005, **2**: 1482~1489
- 10 Wang Nian, Fan Yizheng, Wei Sui *et al.*. Feature matching based on Laplacian spectra of graphs [J]. *Chinese J. Image and Graphics*, 2006, **11**(3): 332~336
- 王 年, 范益政, 韦 穗 等. 基于图的 Laplace 谱的特征匹配 [J]. *中国图像图形学报*, 2006, **11**(3): 332~336
- 11 H. F. Wang, E. R. Hancock. Correspondence matching using kernel principal components analysis and label consistency constraints [J]. *Pattern Recognition*, 2006, **39**(6): 1012~1025
- 12 Xuan Shanli, Liang Dong, Zhu Ming *et al.*. A feature matching algorithm based on adjacent spectrum of modified minimize spanning tree [J]. *Chinese J. Electronics*, 2010, **38**(2): 269~274
- 宣善立, 梁 栋, 朱 明 等. 一种基于修正的最小生成树及其邻接谱的特征匹配算法 [J]. *电子学报*, 2010, **38**(2): 269~274
- 13 A. Silletti, A. Abate, J. D. Axelrod *et al.*. Versatile spectral methods for point set matching [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2011, **32**(5): 731~739
- 14 O. Choi, I. S. Kweon. Robust feature point matching by preserving local geometric consistency [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2009, **113**(6): 726~742
- 15 A. C. Berg, T. L. Berg, J. Malik. Shape matching and object recognition using low distortion correspondences [C]. *IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2005, **1**: 26~33
- 16 O. Duchenne, F. Bach, I. Kweon *et al.*. A tensor-based algorithm for high-order graph matching [J]. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(12): 2383~2395
- 17 Y. F. Zheng, D. Doermann. Robust point matching for nonrigid shapes by preserving local neighborhood structures [J]. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, **28**(4): 643~649
- 18 R. Sinkhorn. A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices [J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1964, **35**(2): 876~879

栏目编辑: 李文喆