

简易高斯灰度扩散模型的误差分析及适用性研究

王海涌 周文睿 赵彦武

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191)

摘要 为了验证简易高斯灰度扩散模型的适用性,与传统高斯灰度扩散模型进行了对比分析。将两种高斯模型做归一化处理,设定检验像素,分析检验像元灰度的归一化值的相对误差;进行星图模拟,得到 4 个不同高斯半径(σ)下灰度赋值相对误差与像点映射位置偏离值的关系曲线,整体上误差随 σ 的增大而减小;对星图模拟得到的系列星像点采用灰度重心法提取质心,质心误差随 σ 增大而减小,传统模型模拟像点的质心提取精度比简易模型高约 2 个数量级。无噪声条件下 $\sigma=0.671$ 时,简易模型模拟像点最大质心误差仅为 0.033 pixel。仿真结果表明:单就像点外形仿真而言,当 σ 较小时,简易模型不再适用;但针对像点的质心定位及后续算法,简易模型带来质心误差量级可以忽略,运算量更小,适于应用。

关键词 图像处理;星图模拟;高斯分布;归一化;灰度重心法

中图分类号 V448.22 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0711002

Error Analysis and Applicability Study on Simplified Gaussian Gray Diffusion Model

Wang Haiyong Zhou Wenrui Zhao Yanwu

(School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract The applicability of the simplified Gaussian gray diffusion model needs to be further verified theoretically, whose error analysis method relies on the analytical comparison with the typical traditional one. The two models are normalized respectively, a test pixel is chosen, and the evaluating criterion for the simplified model is established by analyzing the relative error of the normalized gray value regarding the test pixel. Star image simulation is conducted, and four relative error curves to the mapping position deviation from the pixel central coordinate are plotted, each of which represents a different case of Gaussian radius σ , manifesting that error decreases as σ increases as a whole. Gray-weighted centroiding method is carried out to the two series of simulated star images generated respectively by the two models. Centroiding absolute error decreases as σ increases, absolute error resulted from simplified model is about 2 orders of magnitude higher than that of the traditional one. Under the conditions of no noise and $\sigma = 0.671$, the maximum absolute error from the simplified model is only 0.033 pixel. Simulated results show that the simplified model is no longer applicable when Gaussian radius σ is rather small in terms of shape simulation of image point. Considering that latter algorithms of a star sensor, such as star matching and attitude determination, whose focus is just centroid, the simplified model still possesses applicability due to its advantage of small calculating amount, also because its error magnitude is small enough to be neglected anyway.

Key words image processing; star map simulation; Gaussian distribution; normalization; gray weighted centroid method

OCIS codes 100.2000; 100.2960; 200.1130

1 引言

静态星图模拟过程中有两个要点,1)完成赤道第二坐标系下有关恒星坐标向星敏器成像面阵上

的坐标映射;2)围绕这些映射位置点进行灰度弥散进而给周围像素赋灰度值^[1]。实际星敏器成像,由于像差和离焦处理,像点能量分布近似符合二维

收稿日期: 2011-12-06; 收到修改稿日期: 2012-03-01

基金项目: 航空科学基金(2007ZC51027)资助课题。

作者简介: 王海涌(1969—),男,博士,讲师,主要从事天文导航及复合导航技术等方面的研究。

E-mail: why@buaa.edu.cn

高斯分布^[2~9]。因此要精确模拟星像点,也需要做灰度扩散,并按照高斯规律来生成。文献[2,3]提出高斯点扩展函数(PSF)灰度扩散模型,每个像素的灰度大小均通过像点二维能量分布函数在该像素范围的面积分来表示,该方法尽管在理论上比较完备,但计算复杂。针对被积公式不存在原函数的问题,只能进行计算机数值计算,实时性变差。文献[4~9]采用不带积分计算的简易高斯灰度扩散模型,每个像素的灰度值都用像素中心点的高斯函数值来近似表示。文献[8]基于简易高斯灰度扩散模型建立了质心存在偏离条件下的灰度扩散公式,计算量明显小于前者。两种模型数学方法不同,会产生误差,本文定量分析了这个误差的影响因素和误差量值进一步验证了简易高斯灰度扩散模型的适用性。

2 两种高斯灰度扩散模型

光学系统成像时,物空间一点发出的光在像空间总是分散在一定的区域内,如图 1 所示,其分布模型称为 PSF,很多情形下成像点能量分布近似符合

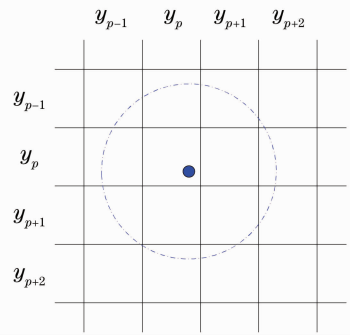


图 1 偏置散焦像点的 4 pixel×4 pixel 覆盖范围
Fig. 1 4 pixel×4 pixel scope of a defocus offset image spot

二维高斯分布。

为了精确模拟光学系统成像,模拟星像点时也需要做灰度扩散,目前常见的高斯灰度扩散方法有两种:1)积分形式的传统高斯灰度扩散法^[2,3];2)不含积分运算的简易高斯灰度扩散法^[4~9]。

设像点的映射坐标为 (x_0, y_0) ,为浮点数值,采用传统高斯扩散法,对应像点范围内任一像素 (x_i, y_j) 的灰度值计算公式为

$$h(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} \int_{y_j-\frac{1}{2}}^{y_j+\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx dy, & (x_i, y_j) \in C \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$g_1(x_i, y_j) = Ah(x_i, y_j), \quad (2)$$

式中 $h(x_i, y_j)$ 为成像阵列面的冲击响应, $g(x_i, y_j)$ 为 (x_i, y_j) 点的灰度, C 是 $h(x, y)$ 以 (x_0, y_0) 为圆心的圆形支持域, σ 为高斯半径,表示 PSF 的散焦程度,也表示像点的大小。 A 为能量灰度系数,与光敏面成像点总的光照度有关。

传统模型的优点是理论非常完善,对于二维高斯分布的光照度进行像素面积分,严格符合光生电荷的半导体物理过程,基于该积分值赋灰度是严谨的,因此在下述理论分析中作为理想值。缺点是含有大量的积分运算,运算量大。

采用简易高斯扩散法,模拟像点内像素 (x_i, y_j) 的灰度计算公式为

$$g_2(x_i, y_j) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x_i-x_0)^2 + (y_j-y_0)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (3)$$

这里,直接根据二维高斯函数取近似灰度值,优点是免去积分,运算量减小;缺点是因近似处理导致误

差,误差大小与散焦程度和映射位置的偏离值有关。需要进一步阐明,考虑到星图模拟的最终目的在于质心提取用于星图匹配及星光定姿,模拟星像的形似是精确质心提取的充分而非必要条件,模拟星像点外形不严格相同并不妨碍质心提取。

3 两种模型分析

图 2 为传统高斯模型的二维能量分布;成像点内某一像素对应的能量分布及中心值如图 3 所示情形,传统模型像素赋值灰度是以图中曲面为顶面、单位像素为底面的柱体的体积与能量灰度系数的乘积,而简易模型像素赋值灰度是像素面积为底面、高为像素中心函数值的长方体的体积,再乘以其能量灰度系数。这两个值通常不等,存在误差。实际处理直接用像素中心函数值乘以能量灰度系数,像素面积参数包含在系数值里。

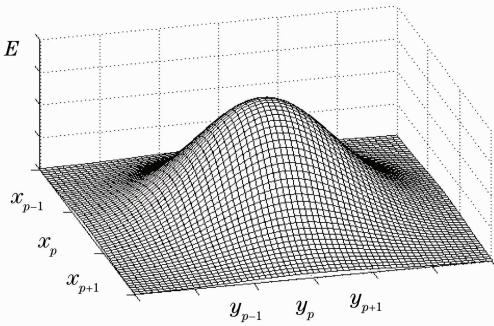


图2 传统高斯模型的二维能量分布

Fig.2 Two-dimensional energy distribution of traditional Gauss model

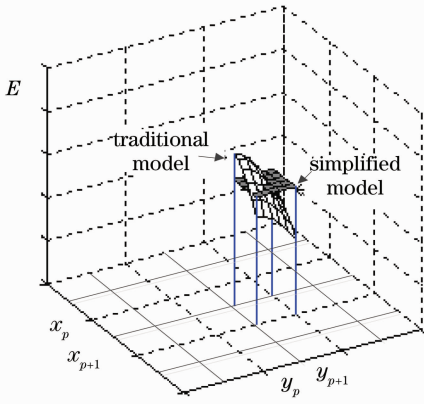


图3 两种模型对像素的不同灰度赋值方式

Fig.3 Style of gray assignment of the two models

首先建立仿真方法,分析存在映射点偏离的情况下简易高斯灰度扩散模型产生的误差。图4中,选取 $S_0 \sim S_{20}$ 表示 21 个等距分布的成像映射点,位

于像素 (x_p, y_p) 的半个对角线上,对角线方向特定像元 (x_{p+1}, y_{p+1}) 作为检验像素,通过误差计算观察映射点偏离值的变化对于检验像素灰度值的影响,作为简易灰度扩散模型误差的评判指标。 g_c 表示像点内中心最亮像素的灰度,两种模型下该像素的灰度值 g_c 应为同一个值,周围像素灰度值的差异则是由模型不同造成。 g_t 表示传统高斯灰度扩散模型在检验像素 (x_{p+1}, y_{p+1}) 的灰度, g_s 表示简易模型在检验像素 (x_{p+1}, y_{p+1}) 的灰度,误差量值 $(g_s - g_t)$ 体现了模型误差,如图4所示。

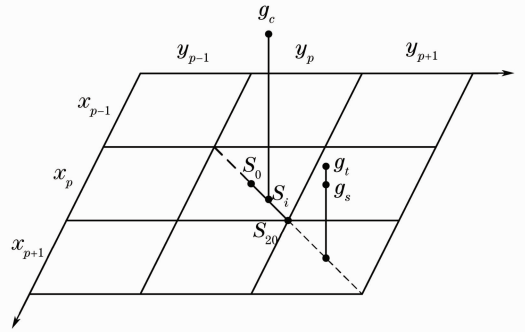


图4 两种模型下采样像素的灰度误差

Fig.4 Gray error about the sampling pixel between the two models

当导航星映射坐标 (x_0, y_0) 与像素中心位置整型坐标有偏离时,对导航星的浮点型映射坐标四舍五入取整,就得到高斯像点的中心像素坐标 (x_p, y_p) ,偏离值 $\Delta x = x_0 - x_p, \Delta y = y_0 - y_p, (1) \sim (3)$ 式变形为

$$g_t(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} \int_{y_j-\frac{1}{2}}^{y_j+\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-x_p-\Delta x)^2 + (y-y_p-\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right] dx dy, & (x_i, y_j) \in C \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

$$g_s(x_i, y_j) = \frac{A_s}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x_i-x_p-\Delta x)^2 + (y_i-y_p-\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5)$$

为了使两种模型灰度误差具有可比性,采用归一化数学方法^[10,11]。基于不同的模型,中心最亮像素的灰度值都赋同样的值,实质上就是一种归一化处理。具体处理方法是,建立关于像素中心点对称分布的二维高斯分布,定义该像素灰度值为单位 1,星像点范围内的某像素与该单位 1 量化值的灰度比值称为其归一化值。确立采样点为周围像素位置,即

$$\begin{cases} x_{p+m} (m = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots) \\ y_{p+n} (n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots) \end{cases}, \quad (6)$$

下标 m, n 表示与中心像素间的像素坐标差,即 $x_{p+m} = x_p + m, y_{p+n} = y_p + n$ 。

首先对传统高斯模型进行归一化处理。不考虑系数 A_t , 关于像素中心位置对称的二维标准高斯分布的概率为归一化基准值,记为

$$U_i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_p}^{y_{p+1}} \exp\left[-\frac{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}{2\sigma^2}\right] dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy. \quad (7)$$

对于有偏离值 $(\Delta x, \Delta y)$ 的高斯分布,各像素仍然按照其中心位置处概率值进行赋值,记 $g_i(0,0)$ 为中心最亮像素 $P(x_p, y_p)$ 的归一化值, $g_i(m, n)$ 为采样点 (x_{p+m}, y_{p+n}) 的归一化值,

$$g_i(0,0) = \frac{\int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_p}^{y_{p+1}} \exp\left[-\frac{(x-x_p-\Delta x)^2 + (y-y_p-\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right] dx dy}{2\pi\sigma^2 U_i} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{(x-\Delta x)^2 + (y-\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right] dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy}, \quad (8)$$

$$g_i(m, n) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{(m+x-\Delta x)^2 + (n+y-\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right] dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy}. \quad (9)$$

简易模型也做归一化处理。方法类似,不考虑系数 A_s ,关于像素中心位置对称的二维标准高斯分布的中心概率密度作为归一化基准量值,可表示为

$$U_s = \frac{1}{2\pi\sigma^2}. \quad (10)$$

那么根据简易高斯灰度扩散法,对于有偏离值 $(\Delta x, \Delta y)$ 的能量高斯分布,各像素都按照各自中心位置处概率密度值进行赋灰度值,那么其最亮像素 (x_p, y_p) 的归一化值为

$$g_s(0,0) = \frac{\exp\left[-\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right]}{2\pi\sigma^2 U_s} = \exp\left[-\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (11)$$

周围任一像素 (x_{p+m}, y_{p+n}) 的归一化值

$$g_s(m, n) = \exp\left[-\frac{(m-\Delta x)^2 + (n-\Delta y)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (12)$$

对两种灰度扩散模型完成了归一化处理。某一星像点如果不存在偏离值,且需保障最亮像素的灰度一致,则对两个模型取相同的能量灰度系数 A 。不同恒星参数 A 可以在标定试验中确定。

由(9)、(12)式得两模型任意像素 (x_{p+m}, y_{p+n}) 灰度值的相对误差关系为

$$\gamma_g(m, n) = \frac{g_s(m, n) - g_i(m, n)}{g_i(m, n)}. \quad (13)$$

可知基于两个模型的像素赋值灰度相对误差 γ_g 为高斯半径 σ 和映射偏离值 $(\Delta x, \Delta y)$ 的函数。

4 对比仿真验证

4.1 针对高斯半径与偏离值的灰度误差仿真

依照图4所示方法,选定像素坐标为(200, 200),在其半段对角线上等距排列21个测试点,也作为成像阵列平面上的映射点,即 x_0 和 y_0 都以间距0.025 pixel分布在区间[200, 200.5] pixel内。仿真条件: $A=600$, σ 分别取0.5、0.7、0.9和1.1,依次按照(13)式求出两个模型针对检验像素(201, 201)灰度赋值的相对误差 γ_g ,如图5所示,

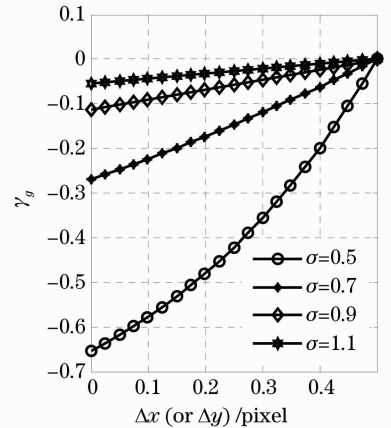


图5 简易模型相对传统模型针对检验像素的灰度相对误差

Fig.5 Relative gray error about the test pixel of the traditional model by the simplified model

仿真结果表明,各曲线在偏离值为0时出现最大相对误差,当 $\sigma = 0.5$ 时, $\gamma_g = -67\%$,当 $\sigma = 0.7$

时, $\gamma_g = -28\%$, 当 $\sigma = 0.9$ 时, $\gamma_g = -11\%$, 当 $\sigma = 1.1$ 时, $\gamma_g = -5\%$, 随 σ 增加最大相对误差显著减小。各条曲线随着偏离值的增大, 灰度值相对误差指标呈递减趋势。值得注意的是, 当 $(\Delta x, \Delta y) = (0.5, 0.5)$ 时, 对于任意的 σ 值, $\gamma_g = 0$, 是由于此时两种模型在检验像素 $P_1(201, 201)$ 与 $P_2(200, 200)$ 的灰度值对称相等。

4.2 模拟像点的质心提取误差的比较

仿真条件: $A = 600$, σ 分别取 0.5、0.7、0.9, 同样取等间距 0.025 pixel 分布的 21 个测试点, 分布在起点为 $(200, 200)$ 终点为 $(200.5, 200.5)$ 的半对角线上, 作为映射坐标, 利用两种扩散法星图模拟分别得到 21 个静态星点, 示例其中误差最大的第 11 个模拟像点, 基于简易模型的模拟星像点如图 6 所示, 其灰度数据如图 7 所示。

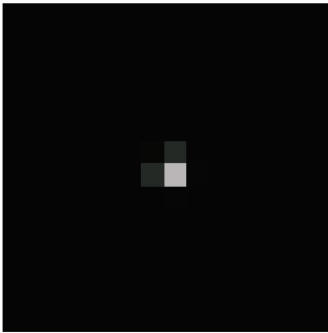


图 6 简易模型得到的第 11 个模拟星像点
Fig. 6 No. 11 simulated star image spot from the simplified model

	198	199	200	201	202
197	0	0	0	0	0
198	0	0	0	0	0
199	0	20	61	2	0
200	0	61	185	7	0
201	0	2	7	0	0
202	0	0	0	0	0

图 7 简易模型第 11 个星像点的灰度数据

Fig. 7 Gray values of No. 11 star image spot in Fig. 6

基于传统模型的模拟星像点如图 8 所示, 其灰度数据如图 9 所示。

图 6、8 中的较暗像素视觉上无法分辨, 可以考察对应的图 7、8 的灰度数据, 灰度值分布的差异会导致质心定位的不同。不加噪声, 采用灰度重心法分别进行质心提取, 结果如图 10、11 所示。

从图 10、11 纵坐标量值看, 同样的给定仿真条件下, 传统模型得到的模拟像点质心提取精度, 高于简易模型质心提取精度约 2 个数量级。尽管如此,

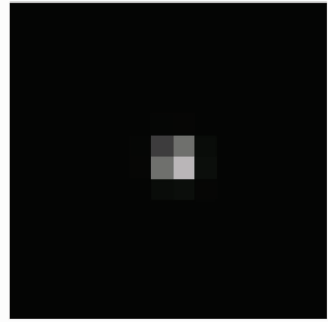


图 8 传统模型得到的第 11 个模拟星像点
Fig. 8 No. 11 simulated star image spot from the traditional model

	198	199	200	201	202
197	0	0	0	0	0
198	1	7	11	3	0
199	7	73	116	29	1
200	11	116	185	46	2
201	3	29	46	11	0
202	0	1	2	0	0
203	0	0	0	0	0

图 9 传统模型第 11 个星像点的灰度数据

Fig. 9 Gray values of No. 11 star image spot in Fig. 8

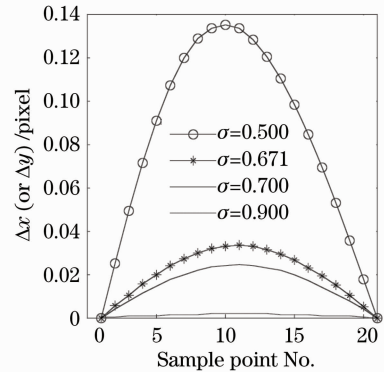


图 10 简易模型模拟像点的质心提取误差

Fig. 10 Centroid error of the simulated image spot obtained from the simplified model

简易模型模拟像点质心提取算法误差量级依然很小, 图 10、11 整体上看, σ 越小质心误差越大, 当 $\sigma = 0.5$ 时最大质心误差为 0.135 pixel, 当 $\sigma = 0.671$ 时最大质心误差为 0.033 pixel。随着偏离值的增大, 质心误差曲线均呈现先增大后减小的特点。运算量小的简易模型生成模拟像点, 在 $\sigma \geq 0.671$ 的通常情形下, 产生的质心提取误差可以接受。

5 结 论

针对传统高斯灰度扩散法和简易高斯灰度扩散法两种模型的像点模拟建立了归一化分析方法。带

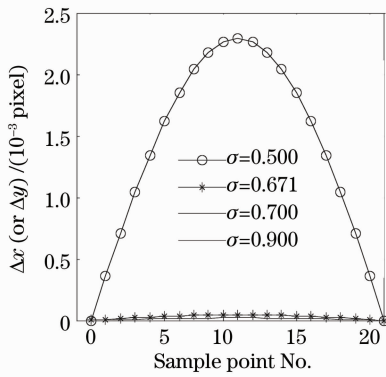


图 11 传统模型模拟像点的质心提取误差

Fig. 11 Centroid error of the simulated image spot obtained from the traditional model

有积分运算的传统高斯模型符合光电成像物理过程,数学建模严谨,像素赋值灰度可以作为理想值。为了对简易模型进行误差分析,设定检验像素,其灰度赋值误差作为简易模型的适用性判据指标。

仿真图表整体上看,简易模型误差随着模拟像点高斯半径 σ 的增大而减小, $\sigma=0.9$ 时检验像素赋值灰度最大相对误差为 11%, $\sigma=0.5$ 时最大相对误差为 67%,像点的模拟外形有所差异;每条误差曲线在偏离值为 0 时出现最大相对误差,随偏离值加大而递减。基于两个模型进行星图模拟,采用灰度重心法质心提取,误差结果表明,两者质心提取绝对误差相差约 2 个数量级。

从模拟外形及质心提取精度两方面考察,尽管简易高斯模型的性能表现均有不足,但针对 $\sigma \geq 0.671$ 的通常情形,简易模型的质心提取误差量值仍然很小,当 $\sigma=0.671$ 时,最大质心误差仅为 0.033 pixel,对于实际应用的影响可以忽略。特别是简易模型具有形式简单运算量小的特点,而星光姿态模拟系统的星光匹配和姿态解算,所关注的最大影响因素是质心提取精度以及仿真系统的实时性,因此,简易模型仍具有适用性。

参 考 文 献

- 1 C. C. Liebe. Accuracy performance of star trackers-a tutorial [J]. *IEEE Trans. Aerospace & Electron Syst.*, 2002, **38**(2): 587~599
- 2 Gao Yuan, Lin Zaiping, Li Jun *et al.*. Imaging simulation algorithm for star field based on CCD PSF and space target's striation characteristic [J]. *Electronic Information Warfare Technology*, 2008, **23**(2): 58~62
高源,林再平,李骏等.基于 CCD 点扩散和拖尾特性的星空模拟方法研究[J]. *电子信息对抗技术*, 2008, **23**(2): 58~62
- 3 Guo He, Deng Nianmao, Luo Changzhou. Effect of dynamic factor on measuring star by star sensor [J]. *Aerospace Control*, 2008, **26**(6): 38~41
郭贺,邓年茂,罗长洲.动态因素对星敏传感器测量影响分析[J]. *航天控制*, 2008, **26**(6): 38~41
- 4 Deepa Kundur, Dimitrios Hatzinak. Blind image deconvolution [J]. *IEEE Signal Proc. Mag.*, 1996, **13**(3): 43~64
- 5 B. R. Hancock, R. C. Stirbl, T. J. Cunningham *et al.*. CMOS active pixel sensor specific performance effects on star tracker/imager position accuracy [C]. *SPIE*, 2001, **4284**: 43~53
- 6 Dong Ying, Xing Fei, You Zheng. Determination of the optical system parameters for a CMOS APS based star sensor [J]. *J. Astronautics*, 2004, **25**(6): 663~668
董瑛,邢飞,尤政.基于 CMOS APS 的星敏传感器光学系统参数确定[J]. *宇航学报*, 2004, **25**(6): 663~668
- 7 Xie Lunzhi, Bian Hongling, Wang Zhenhua. Study of the subpixel interpolation of image spots with matrix detectors [J]. *Optics & Optoelectronic Technology*, 2003, **2**(1): 51~56
谢伦治,卞洪林,王振华.面阵探测器的像点亚像素定位研究[J]. *光学与光电技术*, 2003, **2**(1): 51~56
- 8 Wang Haiyong, Fei Zhengong, Wang Xinlong. Precise simulation of star spots and centroid calculation based on Gaussian distribution [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2009, **17**(7): 1672~1677
王海涌,费峥红,王新龙.基于高斯分布的星象点精确模拟及质心计算[J]. *光学精密工程*, 2009, **17**(7): 1672~1677
- 9 Zhang Hui, Zhong Jianyong, Yuan Jiahua *et al.*. Circuit noise effects on star sensor position accuracy [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2006, **14**(6): 1052~1056
张辉,钟建勇,袁家虎等.电路噪声对星敏传感器星点定位精度的影响[J]. *光学精密工程*, 2006, **14**(6): 1052~1056
- 10 Wang Shun, Xu Jingzhu, Zhang Yixin *et al.*. Reliability evaluation method and application for light-stripe-center extraction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(11): 1115001
王顺,徐静珠,张益昕等.结构光光条中心点信度评价方法与应用[J]. *光学学报*, 2011, **31**(11): 1115001
- 11 Wen Yumei, Zhao Xuemei, Li Ping *et al.*. Modification of light emitting diode's normalized spectrum model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(1): 0130001
文玉梅,赵学梅,李平等.发光二极管归一化光谱模型的修正[J]. *光学学报*, 2012, **32**(1): 0130001

栏目编辑:何卓铭