

螺旋型波带片聚焦特性研究

易 涛¹ 杨国洪¹ 韦敏习¹ 刘慎业¹ 朱效立² 谢常青²

(¹ 中国工程物理研究院激光聚变研究中心, 四川 绵阳 621900)
(² 中国科学院微电子所, 北京 100029)

摘要 提出了一种计算螺旋型波带片聚焦特性的方法。从衍射积分理论出发对螺旋型波带片的聚集特性进行了理论计算, 推导出了级数形式的解析解, 获得了螺旋型波带片“空心”焦点的场强分布。利用螺旋型波带片的聚焦特性, 对其成像进行了数值模拟和理论分析。理论分析表明螺旋型波带片的空间分辨率与其“空心”焦点的环宽有关。通过验证实验证明理论分析与实验测试一致, 为螺旋型波带片成像理论和模拟计算提供了一种有效手段。

关键词 衍射; 螺旋型波带片; 聚焦特性; 空间分辨率

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0705004

Study on Focusing Properties of Spiral Zone Plate

Yi Tao¹ Yang Guohong¹ Wei Minxi¹ Liu Shenye¹ Zhu Xiaoli² Xie Changqing²

(¹ *Laser Fusion Research Center, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China*)
(² *Institute of Microelectron, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

Abstract The theoretical analysis for the focusing properties of spiral zone plate is presented. Using the diffraction theory, focusing properties of spiral zone plate and the series-form expression for the diffracted field near the hollow focus are calculated. Moreover numerical simulation and theoretical analysis for the imaging are also carried out by a spiral zone plate using our theoretical results. It shows that the spatial resolution of a spiral zone plate is associated with the zone width of its hollow focus. Experimental results indicate our theoretical analyses are consistent with the experimental test, which give out an effective method for the imaging analysis and numerical simulation of spiral zone plate.

Key words diffraction; spiral zone plates; focusing properties; spatial resolution

OCIS codes 050.1940; 050.1960; 110.2960; 110.0180

1 引 言

螺旋型波带片(SZP)是一种具备光学变换功能的衍射光学元件,最早由 Heckenberg 等^[1]作为一种全息图提出,用于在可见光波段产生光学奇点。在光学图像处理中,螺旋型相位板可用于产生光学径向希尔伯特变换,获得目标物体的边缘增强图像^[2~5]。Sakdinawat 等^[6]发现 SZP 也具有螺旋型相位分布的特征,因而也可实现光学径向希尔伯特变换,他们制作了用于 X 射线波段成像的 SZP,并在同步辐射上获得了圆孔的边缘增强图像。SZP 弥

补了 X 射线波段缺少光学变换元件的不足,为 X 射线波段的衬度成像、边缘增强和边界检测提供了新手段。

当 SZP 的阶数为零时其图案与菲涅耳波带片完全相同^[1,6],这表明 SZP 与菲涅耳波带片在几何结构上存在一定关联,但两者之间成像特性却存在很大差异。这种差异来源于两种衍射元件的聚焦特性不同。对于菲涅耳波带片人们已经进行了充分的理论研究,形成比较完备的理论分析方法^[7,8]。对于 SZP 国内外均开展了实验研究^[6,9,10],但理论研

收稿日期: 2012-02-23; **收到修改稿日期**: 2012-03-08

基金项目: 国家自然科学基金(11105129)以及中国工程物理研究院激光聚变研究中心和等离子体物理国家级重点实验室创新基金(CX0620091)资助课题。

作者简介: 易 涛(1980—),男,博士,副研究员,主要从事等离子体诊断方面的研究。E-mail: ylexington@sina.com

究还不多。曾利用快速傅里叶变换的方法对 SZP 成像进行了数值模拟^[11]。聚焦特性是光学元件成像特性的重要表征,从理论上深入研究 SZP 还需要对其聚焦特性进行计算。本文提出了一种 SZP 聚焦特性的理论计算方法。利用衍射理论推导出了 SZP 的聚焦特性公式,给出聚焦特性的级数形解析解。通过聚焦特性对 SZP 空间分辨率进行了分析并进行了实验验证。

2 理论模拟

SZP 的相位函数为^[6]

$$S_{ZP}(r, \theta) = H(r, \theta) Z_p(r, \theta) = \exp(jp\theta - \frac{j\pi r^2}{\lambda f}), \quad (1)$$

式中 p 为拓扑数, λ 为波长, $Z_p(r, \theta)$ 为非涅耳波带片的相位函数, $H(r, \theta)$ 为径向希尔伯特相位函数。Cao 等^[7]利用衍射积分公式计算菲涅耳波带片聚焦特性时,将菲涅耳波带片的相位函数作为积分函数,波带片环带面作为积分区域进行积分,分别计算出每个环带在焦点附近的衍射场,将所有环带产生的衍射场叠加起来得到焦点附近衍射场分布。同样,在平行光垂直照明时 SZP 焦点附近的衍射场表示为

$$U(R, \varphi) = \sum_{n=1}^N U_n(R, \varphi),$$

式中 $U_n(R, \varphi)$ 是第 n 个环带在焦点附近产生的衍射场。对于 SZP, 第 n 个环带在焦点附近产生的衍射场 $U_n(R, \varphi)$ 用瑞利-索末菲衍射积分公式计算:

$$U_n(R, \varphi) = \frac{1}{\lambda} \iint_{A_n} \exp(jp\theta) \frac{f}{\rho^2} \exp(jk\rho) r dr d\theta, \quad (2)$$

式中 $\rho = [f^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)]^{1/2}$ 为场点 (r, θ) 到焦点附近观察点 (R, φ) 之间的距离。 A_n 为第 n 个环带的面积,如图 1 所示。与菲涅耳波带片不同的是积分核中多了 $\exp(jp\theta)$ 的相位项。

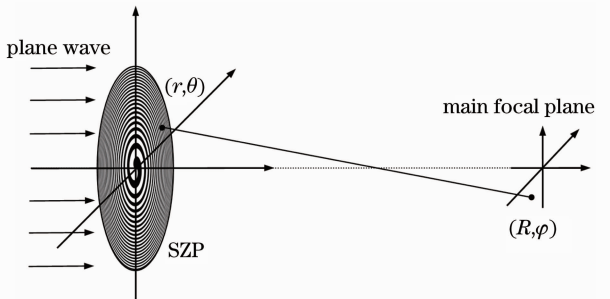


图 1 SZP 聚焦示意图

Fig. 1 Schematic for an SZP focusing

在近轴近似下距离 ρ 可以展开为

$$\rho \approx f_n + \frac{R^2 + (r^2 - r_n^2) - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}{2f_n}. \quad (3)$$

根据^[12]

$$\int_0^{2\pi} d\theta \exp[jp\theta - ju \cos(\theta - \varphi)] = j^p 2\pi \exp(jp\varphi) J_p(u). \quad (4)$$

将(4)式代入到(2)式,可以得到

$$U_n(R) = \frac{j^p \exp(jp\varphi) k f}{f_n^2} \exp\left[jk \left(f_n + \frac{R^2}{2f_n}\right)\right] G(R), \quad (5)$$

$$G(R) = \int_{a_n}^{b_n} \exp\left(jk \frac{r^2 - r_n^2}{2f_n}\right) J_p\left(\frac{kRr}{f_n}\right) r dr, \quad (6)$$

式中 $J_p(\cdot)$ 是 p 阶第一类贝塞尔函数。与文献^[10]中比较可以看到,其基本形式与菲涅耳波带片衍射积分相同,唯一区别是由螺旋型相位项生成的 p 阶一类贝塞尔函数。因此采用文献^[7]中数值处理方法来计算 $G(R)$: 转换到 $s = r^2$ 坐标系下。在新坐标系下 $G(R)$ 表示为

$$G(R) = \frac{1}{2} \int_{s_n - d_n}^{s_n + d_n} \exp\left(jk \frac{s - s_n}{2f_n}\right) J_p\left(\frac{kR}{f_n} s^{1/2}\right) ds, \quad (7)$$

式中各个变量定义为: a_n 和 b_n 分别表示第 n 个环带的内边缘和外边缘; 中点 $s_n = (a_n^2 + b_n^2)/2$, 半宽度 $d_n = (b_n^2 - a_n^2)/2$, 特征坐标 $r_n = s_n^{1/2}$ 。 $J_p(\cdot)$ 贝塞尔函数的泰勒展开为

$$J_p(\epsilon s^{1/2}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m}{ds^m} J_p(\epsilon s^{1/2}) \right] \Big|_{s=s_n} (s - s_n)^m. \quad (8)$$

对于 $J_p(\cdot)$ 贝塞尔函数满足关系^[7]

$$\frac{d^m}{ds^m} J_p(\epsilon s^{1/2}) = \frac{\epsilon^{2m}}{2^m} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^m J_p(\xi), \quad (9)$$

对于零阶贝塞尔函数有^[7]

$$\left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^m J_0(\xi) = \frac{(-1)^m}{\xi^m} J_m(\xi). \quad (10)$$

根据(10)式可以得到

$$J_m(\xi) = \frac{\xi^m}{(-1)^m} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^m J_0(\xi), \quad (11)$$

利用(9)~(11)式对于 p 阶一类贝塞尔函数有

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^m J_p(\xi) &= \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^m \frac{\xi^p}{(-1)^p} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^p J_0(\xi) = \\ &= \frac{(-1)^m}{\xi^m} \frac{\xi^{m+p}}{(-1)^{m+p}} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^{m+p} J_0(\xi) = \frac{(-1)^m}{\xi^m} J_{m+p}(\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

将(9)式和(12)式代入到(8)式得到 p 阶贝塞尔函

数的级数展开

$$J_p(\epsilon s^{1/2}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\alpha R)^m}{m! 2^m s_n^m} J_{m+p}(\alpha R) (s - s_n)^m, \quad (13)$$

式中 $\alpha = kr_n/f_n$ 。将(13)式代入(7)式中,得到^[7]

$$G(R) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(R) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m (\alpha R)^m d_n^{m+1}}{m! 2^m s_n^m \gamma^{m+1}} h_m J_{m+p}(\alpha R), \quad (14)$$

$$h_m = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i m!}{(m-i)!} \text{Im}[(j\gamma)^{m-i} \exp(j\gamma)]. \quad (15)$$

式中 $\gamma = kd_n/(2f_n)$ 。这样得到函数 $G(R)$ 级数形式解后,通过(5)式便得到单个环带的在焦点附近产生的衍射场 $U_n(R, \varphi)$, 最终获得 SZP 焦点附近的衍

射场分布 $U(R, \varphi) = \sum_{n=1}^N U_n(R, \varphi)$ 。当 $p=0$ 时可以得到菲涅耳波带片焦点附近的衍射场分布^[7]。在焦点附近 $R \sim 0$, $G(R)$ 高阶项趋近于 0, 有 $G(R) \sim G_0(R)$, 焦点附近的衍射场可近似表示为

$$U_n(R) \approx \frac{2j^p \exp(jp\varphi) f}{f_n} \exp\left[jk\left(f_n + \frac{R^2}{2f_n}\right)\right] \times \sin\left(\frac{kd_n}{2f_n}\right) J_p\left(\frac{kr_n R}{f_n}\right). \quad (16)$$

在 $p \geq 1$ 情况下 $R=0$ 时, $J_p\left(\frac{kr_n R}{f_n}\right) = 0$, SZP 产生“中空”焦点, 且呈螺旋型相位分布。分别计算了波长 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, 焦距 $f = 100 \text{ mm}$ 的 SZP $p=0, 1$ 和 2 时焦点附近场强分布, 如图 2 所示。

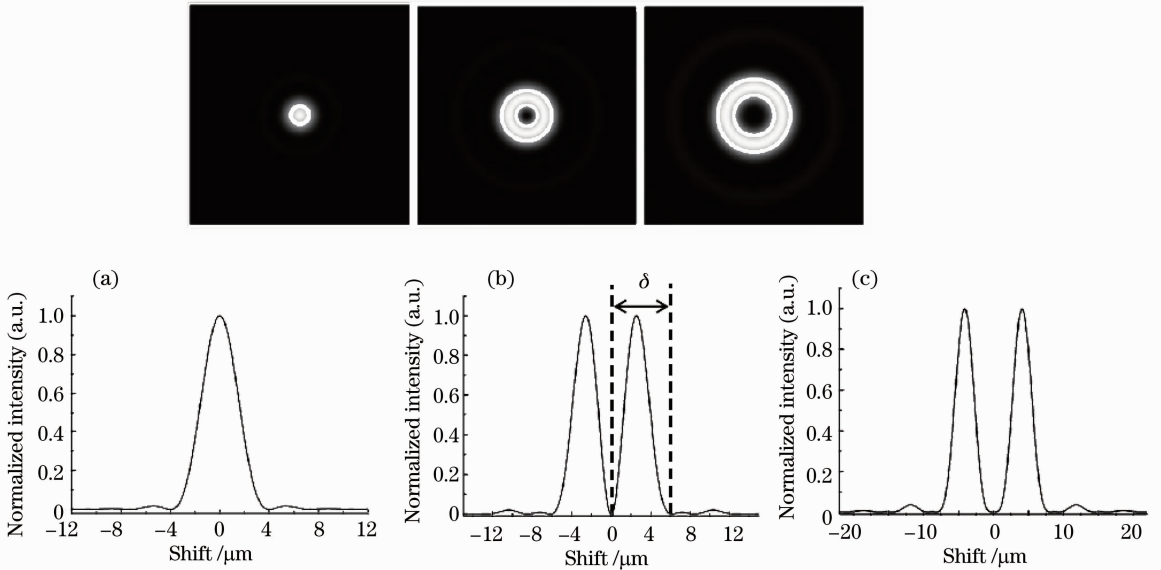


图 2 SZP 焦点附近场强分布及截面分布图。(a) $p=0$; (b) $p=1$; (c) $p=2$

Fig. 2 Intensity distribution near the focus of SZP and cross section profile. (a) $p=0$; (b) $p=1$; (c) $p=2$

下面利用聚焦特性公式对 SZP 在相干照明条件下的空间分辨率进行分析。定义 SZP“空心”焦斑环宽为 δ , 如图 2(b) 所示。以 $p=1$ 情况为例分析, 计算值 $\delta=6 \mu\text{m}$ 。假设有两个距离为 d 的点成像, 当 $d=7.5, 7.3, 7, 6.5, 6, 5.5 \mu\text{m}$ 时候, 产生图像如图 3 所示。当两点距离足够远时, 它们对应的“空心圈”像可清晰分辨。随着点距不断缩小, 两个空心圈的相邻边缘相干相消, 当 $d < \delta$ 时两“空心圈”基本融为一体无法区分。

模拟结果显示焦斑环宽 δ 是衡量 SZP 空间分辨率的重要指标。假设利用 SZP 对于一组周期性条纹成像(便于分析在中间条纹边缘标注了 A, B, C 三点), 如图 4 中(a) 所示。当周期 $d > 2\delta$ 时, A, B, C

三点能够准确分辨, 其所在的边缘清晰可见, 如图 4 中(b) 所示。当 $2\delta > d > \delta$ 由于位于同一个条纹边缘上的 A 点与 B 点已经无法区分, 但 A 点与 C 点还能准确区分, 只能得到一个衍射峰, 此时边缘已经无法分辨, 如图 4 中(c) 所示; 当 $\delta > d$ 时, A, B, C 三点均无法区分开来, 于是只能位于两端的条纹外边缘的两个衍射峰, 如图 4 中(d) 所示。

3 实验验证

验证实验设计如下: 氦氖激光器作为光源, 成像元件 SZP, 工作波长 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, 焦距 $f = 100 \mu\text{m}$, 计算值 $\delta = 6 \mu\text{m}$ 。A6 空间分辨率卡作为目标物体, 光学电荷耦合器件(CCD)作为记录介质。

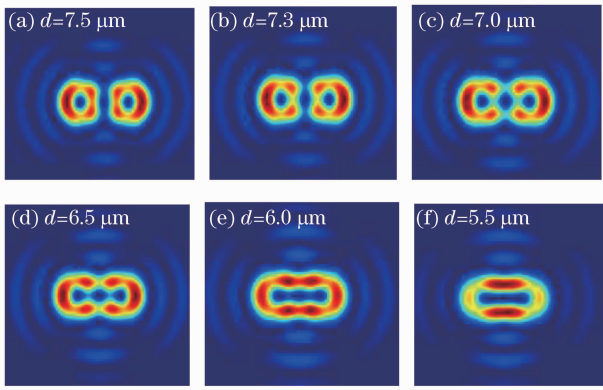


图 3 两个不同距离的点经过 SZP 成像的数值模拟

Fig. 3 Two points with different distances imaging by charge 1 SZP

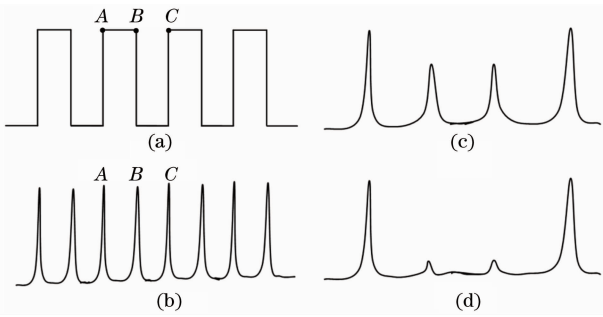


图 4 对周期性条纹成像效果。(a)周期性条纹；(b) $d > 2\delta$ ；(c) $\delta < d < 2\delta$ ；(d) $d < \delta$

Fig. 4 Imaging of periodical lines. (a) Periodical lines; (b) lines imaging with periods $d > 2\delta$; (c) $\delta < d < 2\delta$; (d) $d < \delta$

实验布局如图 5 所示,激光照射物体后经过 SZP 成像到 CCD 上。在空间分辨率前面放置一个直径 $200 \mu\text{m}$ 左右的针孔,用于限制成像区域以满足 SZP 成像的衍射条件。SZP 实现边缘增强成像需要同时满足成像条件与滤波条件^[6]。成像条件要求物像距满足透镜成像公式;而滤波条件要求, SZP 位于成像物体的夫琅禾费衍射区。位于分辨率卡前面的针孔将成像区域限制在光轴附近保证满足滤波条件。针孔限光会带来衍射效应导致照明不够均匀,但对验证实验结果没有影响。图 6 给出了测量得到的第 1,5,12,16,19 组条纹的成像结果,各组条纹的宽度分别为 $7.5, 5.95, 3.97, 3.15, 2.65 \mu\text{m}$, 对应周期为 $15, 11.9, 7.94, 6.34, 5.3 \mu\text{m}$ 。第 1 组与第 5 组条纹对应于 $d \geq 2\delta$ 的情形,可以看到每个条纹的边缘均清晰可见;第 12 组与第 16 组条纹对应于 $2\delta > d > \delta$ 的情形,此时位于内部的条纹边缘成像比较模糊;第 19 组条纹对应于 $d < \delta$ 的情形,内部条纹基本不可见,只余下最外边条纹的边缘图像,呈现“方框”形状。实验测量结果表明通过 SZP 能够观察到空间分辨率卡中最小线对组为第 16 组线对,因此其空间分辨率测量值为 $6.3 \mu\text{m}$,在实验误差范围内与理论计算值一致。

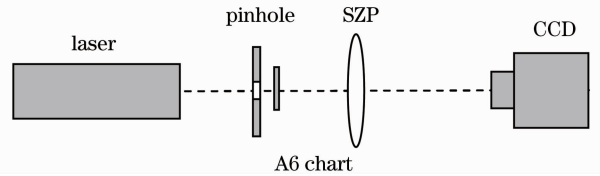


图 5 实验布局

Fig. 5 Experimental setup

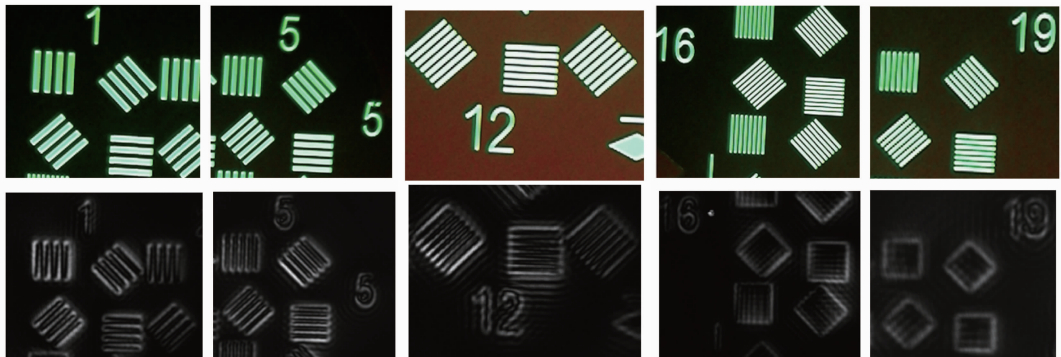


图 6 对空间分辨率卡成像的实验结果

Fig. 6 Experimental result of imaging for spatial resolution target

4 结 论

提出了理论计算 SZP 聚焦特性的方法,推导了级数形式解析解。利用 SZP 聚集特性,对不同物体

间距下螺旋型成像进行了数值模拟和理论分析。结果表明 SZP 焦斑的环境宽是衡量其空间分辨率的重要参数,实验测量结果与理论分析一致。该方法为

SZP 成像定性定量分析提供了理论依据。

参 考 文 献

- 1 N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith *et al.*. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms [J]. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(3): 221~223
- 2 J. A. Davi, D. E. McNamara, D. M. Cottrell *et al.*. Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments [J]. *Opt. Lett.*, 2000, **25**(2): 99~101
- 3 S. Fuhapter, A. Jesacher, S. Bernet *et al.*. Spiral phase contrast imaging in microscopy[J]. *Opt. Express*, 2005, **13**(3): 689~694
- 4 C. Guo, Y. Han, J. Xu. Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filter[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(10): 1394~1396
- 5 G. Situ, G. Pedrini, W. Osten. Spiral phase filtering and orientation-selective edge detection/enhancement [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2009, **26**(8): 1788~1797
- 6 A. Sakdinawat, Y. Liu. Soft-X-ray microscopy using spiral zone plates[J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(18): 2635~2637
- 7 Q. Cao, J. Jahns. Comprehensive focusing analysis of various Fresnel zone plates [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(4): 561~571
- 8 A. N. Kurokhtin, A. V. Popov. Simulation of high-resolution X-ray zone plates [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(2): 315~324
- 9 Yi Tao, Dong Jianjun, Zhu Xiaoli *et al.*. Study on the imaging performance of spiral zone plate [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 753~757
易涛, 董建军, 朱效立等. 螺旋型波带片成像特性研究 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(3): 753~757
- 10 Yi Tao, Cao Leifeng, Yang Guohong *et al.*. Edge enhancement imaging using spiral zone plate [J]. *High Power Laser and Partical Beams*, 2010, **22**(9): 2075~2078
易涛, 曹磊峰, 杨国洪等. 利用螺旋型波带片进行边缘增强成像 [J]. *强激光与粒子束*, 2010, **22**(9): 2075~2078
- 11 Yi Tao, Cao Leifeng, Liu Shenye *et al.*. Study on the spatial resolution of spiral zone plate imaging [J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2010, **21**(7): 1089~1092
易涛, 曹磊峰, 刘慎业等. 螺旋型波带片成像的空间分辨率研究 [J]. *光电子·激光*, 2010, **21**(7): 1089~1092
- 12 H. Garcia-Gracia, J. C. Gutiérrez-Vega. Diffraction of plane waves by finite-radius spiral phase plates of integer and fractional topological charge [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2009, **26**(4): 794~803

栏目编辑：李文喆