

截断光束的二阶矩矩阵

李晓庆^{1,2} 季小玲^{1*}

(¹ 四川师范大学物理学院, 四川 成都 610068
² 四川大学物理科学与技术学院, 四川 成都 610064)

摘要 采用复高斯展开法和维格纳分布函数(WDF), 推导出了截断光束的二阶矩矩阵通过大气湍流的传输公式。研究表明, 将硬边光阑的复高斯展开函数引入 $z=0$ 平面处的 WDF 中, 能够避免截断光束二阶矩的积分发散问题, 得到 $z=0$ 平面处二阶矩的解析结果, 并且保证了精度, 从而方便地得到截断光束在大气湍流中传输的二阶矩矩阵。实验所得到的结果具有一般性, 即无截断光束的二阶矩矩阵通过大气湍流传输和截断光束的二阶矩矩阵在自由空间的传输都可以分别作为特例给出。

关键词 激光光学; 截断光束; 大气湍流; 二阶矩矩阵; 复高斯展开法; 维格纳分布函数

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0701003

Beam Matrix in Terms of Second-Order Moments of Truncated Beams

Li Xiaoqing^{1,2} Ji Xiaoling¹

(¹ Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610068, China
² College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract By using the complex Gaussian function expansion method and the Wigner distribution function (WDF), the propagation formula of the beam matrix in terms of second-order moments of truncated beams through atmospheric turbulence is derived. It is shown that the divergence problem of second-order moments of truncated beams can be avoided when the complex Gaussian function is applied to the WDF in the $z=0$ plane. The analytical expressions for second-order moments in the $z=0$ plane can be obtained and the accuracy can be guaranteed. And then, the beam matrix in terms of second-order moments of truncated beams in turbulence can be obtained. The results are general, i. e. the beam matrix in terms of second-order moments of non-truncated beams in turbulence and that of truncated beams in free space can be treated as two special cases of our results.

Key words laser optics; truncated beam; atmospheric turbulence; beam matrix in terms of second-order moments; complex Gaussian function expansion method; Wigner distribution function

OCIS codes 010.1290; 140.3295

1 引 言

强度矩方法是研究激光束传输特性的重要方法, 这种方法的主要优点是从入射面上光束的特征参数出发容易得到出射面上光束的特征参数。从光束强度二阶矩表示的 4×4 矩阵可以得到许多重要的光束特性参数, 如束宽、发散角、光束传输因子(M^2

因子)、等相面曲率半径和瑞利区间等^[1,2]。1988年, Simon等^[3]研究了部分相干光的二阶矩矩阵通过 ABCD 光学系统的传输, 并得到了其传输公式。

激光束的大气传输特性对遥感、跟踪和远距离光通信以及某些军事等应用都有十分重要的意义^[4]。近年来, 国内外学者就湍流对激光传输特性

收稿日期: 2011-11-29; **收到修改稿日期**: 2012-03-15

基金项目: 国家自然科学基金(61178070)、中国科学院大气成分与光学重点实验室开放课题基金(JJ-10-08)和四川师范大学科研基金(10DXL01)资助课题。

作者简介: 李晓庆(1984—), 女, 硕士, 助教, 主要从事激光传输方面的研究。E-mail: lixiaoping912@163.com

* **通信联系人**。E-mail: jixl100@163.com

的影响做了大量的研究^[5~14]。2009年, Dan等^[15]研究了部分相干光的二阶矩矩阵通过大气湍流的传输, 推导出了其传输公式。

实际的激光在产生和传输过程中, 都或多或少地要受到光阑的限制。此外, 为满足某些应用需要, 需抑制激光振荡模式、空间畸变或整形等, 也要使用不同形状的光阑。但是, 截断光束的二阶矩存在积分发散困难。迄今为止, 国际上已提出了多种近似方法克服此问题, 如广义截断二阶矩法^[16~20]、渐近分析法^[20~23]、自收敛束宽法^[24]和复高斯展开法^[25]。研究表明, 利用复高斯展开法不仅可以得到 M^2 因子的解析表达式, 而且其结果精度高^[25~27]。

本文拟将二阶矩矩阵通过大气湍流的传输从无截断光束拓展到截断光束。采用复高斯展开法^[28]和维格纳分布函数(WDF)^[29,30], 推导出截断光束的二阶矩矩阵通过大气湍流的传输公式, 并以截断高斯-谢尔模型(GSM)光束为例说明。

2 理论模型及公式

光束在 $z=0$ 平面上的交叉谱密度可以表示为^[31]

$$W_{00}(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0) = \langle E(\boldsymbol{\rho}'_1, 0)E^*(\boldsymbol{\rho}'_2, 0) \rangle, \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}' \equiv (x', y')$, E 是光场分布; $\langle \cdot \rangle$ 和 $*$ 分别表示为系综平均和复共轭。

假设由(1)式表征的光束通过位于 $z=0$ 平面半宽度为 a 的硬边光阑, 其光阑的传递函数可以表示为

$$H(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \text{ and } |y| \leq a \\ 0, & |x| \text{ and } |y| > a \end{cases} \quad (2)$$

因此, 截断光束在 $z=0$ 平面的交叉谱密度可以表示为

$$W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0) = H(x'_1, y'_1)H^*(x'_2, y'_2)W_{00}(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0), \quad (3)$$

根据 Wen等^[28]的研究(1)式可展开为有限项复高斯函数的线性叠加, 即

$$H(x, y) = \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^N A_m A_i \exp\left[-\left(\frac{B_m x^2}{a^2} + \frac{B_i y^2}{a^2}\right)\right], \quad (4)$$

式中 N 是硬边光阑窗口函数表示为复高斯函数的展开式项数, A_s 和 B_s ($s = i, m$) 为复常数, 它们可由计算机优化得到; 当 $N = 10$ 时, A_s 和 B_s 的取值可参考文献^[28]中表 1。

将(4)式代入(3)式, 可以得到

$$W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0) \times W_{00}(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0), \quad (5)$$

式中

$$C(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, 0) = A_m A_n^* A_i A_j^* \times \exp\left[-\left(\frac{B_m x_1'^2 + B_n^* x_2'^2 + B_i y_1'^2 + B_j^* y_2'^2}{a^2}\right)\right]. \quad (6)$$

根据广义惠更斯-菲涅耳原理, 截断光束通过大气湍流传输到 z 平面的交叉谱密度可以表示为^[4]

$$W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_d, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W_0(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'_d, 0) \exp\left\{\frac{ik}{z}[(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \cdot (\boldsymbol{\rho}_d - \boldsymbol{\rho}'_d)] - H(\boldsymbol{\rho}_d, \boldsymbol{\rho}'_d, z)\right\} d^2 \rho' d^2 \rho'_d, \quad (7)$$

式中 k 是波数 ($k = 2\pi/\lambda$, λ 是光束波长), $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)/2$, $\boldsymbol{\rho}_d = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}' = (\boldsymbol{\rho}'_1 + \boldsymbol{\rho}'_2)/2$, $\boldsymbol{\rho}'_d = \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2$ 是引入的新积分变量, $\exp[-H(\boldsymbol{\rho}_d, \boldsymbol{\rho}'_d, z)]$ 代表了湍流的影响, 可以表示为^[4]

$$H(\boldsymbol{\rho}_d, \boldsymbol{\rho}'_d, z) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) [1 - J_0(\kappa |\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\rho}'_d + (1 - \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}_d|)] d\kappa d\xi, \quad (8)$$

$J_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数, $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流大气介质的折射率起伏空间谱密度函数。

在大气湍流中传输的截断光束的 WDF 可以通过交叉谱密度表示为^[29]

$$h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_d, z) \exp(-ik\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}_d) d^2 \rho_d, \quad (9)$$

式中 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$, $k\theta_x$ 和 $k\theta_y$ 分别是波矢量沿着 x 轴和 y 轴的分量。

光束强度的高阶矩用 WDF 可以简单地表示出来, 对光束 $(n_1 + n_2 + m_1 + m_2)$ 阶强度矩定义为^[29]

$$\langle x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \rangle \equiv \frac{1}{P} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) d^2 \rho d^2 \theta = \frac{1}{P} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', z) h(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', 0) d^2 \rho' d^2 \theta', \quad (10)$$

式中 $P = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) d^2 \rho d^2 \theta$ 是光束的总能量, 并且

$$h(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', 0) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_d, 0) \exp(-ik\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}_d) d^2\rho_d, \quad (11)$$

$$G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \times \\ \exp\left\{\frac{ik}{z}[(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \cdot (\boldsymbol{\rho}_d - \boldsymbol{\rho}'_d)] + ik\boldsymbol{\theta}' \cdot \boldsymbol{\rho}'_d - ik\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}_d - H(\boldsymbol{\rho}_d, \boldsymbol{\rho}'_d, z)\right\} d^2\rho_d d^2\theta'_d d^2\theta'_d, \quad (12)$$

式中 $h(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', 0)$ 是 $z=0$ 平面上的 WDF; $G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', z)$ 只与传输有关, 与有无光阑无关。对(12)式中的 ρ, θ 积分后可以得到

$$G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', z) = -\frac{z^{n_1+n_2}}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{ik}{z}\boldsymbol{\rho}' \cdot (\boldsymbol{\rho}_d - \boldsymbol{\rho}'_d) + ik\boldsymbol{\theta}' \cdot \boldsymbol{\rho}'_d - H(\boldsymbol{\rho}_d, \boldsymbol{\rho}'_d, z)\right] \times \\ \delta^{(n_1)}(x'_d - x_d) \delta^{(n_2)}(y'_d - y_d) \delta^{(m_1)}(x_d) \delta^{(m_2)}(y_d) d^2\rho'_d d^2\rho_d, \quad (13)$$

式中 $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数, $\delta^{(n)}$ 表示对 δ 函数的 n 次求导。令 $n_1 = 2, n_2 = m_1 = m_2 = 0$, 利用狄拉克函数以及贝塞尔函数的有关性质, 对(13)式积分得到

$$G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\theta}', z) = x'^2 + 2x'\theta'_x z + \theta_x'^2 z^2 + \frac{2}{3} T z^3, \quad (14)$$

式中

$$T = \pi^2 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (15)$$

将(14)式代入(10)式, 可以得到截断光束在大气湍流中传输的二阶矩束宽 $\langle x^2 \rangle$, 即

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_0 + 2\langle x\theta_x \rangle_0 z + \langle \theta_x^2 \rangle_0 z^2 + \frac{2}{3} T z^3, \quad (16)$$

式中

$$\langle x^p \theta_x^q \rangle_0 = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \theta_x^q h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, 0) d^2\rho d^2\theta, \quad (17)$$

(17)式中, 当 $p=2, q=0$ 和 $p=0, q=2$ 时分别对应 $\langle x^2 \rangle_0, \langle \theta_x^2 \rangle_0$; 当 $p=q=1$ 时对应 $\langle x\theta_x \rangle_0$ 。同理, 可以得到截断光束其他二阶矩在大气湍流中的传输公式为

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_x^2 \rangle_0 + 2Tz, \quad (18)$$

$$\langle x\theta_x \rangle = \langle x\theta_x \rangle_0 + \langle \theta_x^2 \rangle_0 z + Tz^2, \quad (19)$$

$$\langle x\theta_y \rangle = \langle x\theta_y \rangle_0 + \langle \theta_x \theta_y \rangle_0 z, \quad (20)$$

$$\langle \theta_x \theta_y \rangle = \langle \theta_x \theta_y \rangle_0, \quad (21)$$

$$\langle xy \rangle = \langle xy \rangle_0 + (\langle y\theta_x \rangle_0 + \langle x\theta_y \rangle_0) z + \langle \theta_x \theta_y \rangle_0 z^2. \quad (22)$$

另外, 二阶矩 $\langle y^2 \rangle, \langle \theta_y^2 \rangle, \langle y\theta_y \rangle$ 和 $\langle y\theta_x \rangle$ 可由(16)式、(18)~(20)式类比得到。

一般光束的用二阶矩表示的 4×4 的矩阵可写为^[1]

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle & \langle x\theta_x \rangle & \langle x\theta_y \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle y\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_x \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle \theta_x^2 \rangle & \langle \theta_x \theta_y \rangle \\ \langle x\theta_y \rangle & \langle y\theta_y \rangle & \langle \theta_x \theta_y \rangle & \langle \theta_y^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (23)$$

根据(16)式、(18)~(20)式以及类比得到的二阶矩传输公式, 可以得到截断光束在大气湍流传输距离 z 后的光束二阶矩矩阵 \mathbf{V} 为

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}_z \mathbf{V}_0 \mathbf{M}_z^T + \mathbf{M}_T, \quad (24)$$

式中

$$\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_T = T \begin{bmatrix} \frac{2}{3} z^3 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} z^3 & 0 & z^2 \\ z^2 & 0 & 2z & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & 2z \end{bmatrix}, \quad (25)$$

(24)式中, \mathbf{V}_0 是截断光束在 $z=0$ 平面的二阶矩矩阵; \mathbf{M}_z 是自由空间中传输距离 z 后的 ABCD 矩阵, \mathbf{M}_z^T 是其转置矩阵, \mathbf{M}_T 是湍流矩阵。由(24)式可知, 截断光束通过大气湍流在 z 处的二阶矩矩阵可以由不随光束参数变化的传输矩阵 \mathbf{M}_z 和湍流矩阵 \mathbf{M}_T 以及由光束参数和光束截断参数决定的矩阵 \mathbf{V}_0 确定。

值得指出的是: 1) 将硬边光阑的复高斯展开函数引入 $z=0$ 平面处的 WDF 中, 其积分区间就从有限扩展到了无限[见(11)式], 通过(17)式积分可得到 $z=0$ 平面处截断光束的二阶矩的解析公式, 从而得到 $z=0$ 平面处的二阶矩矩阵 \mathbf{V}_0 , 再代入(24)式

即可得到截断光束在大气湍流中的二阶矩矩阵。2) (24)式是实验所得到主要结果,该结果具有一般性,即当截断参数 $\beta \rightarrow \infty$ ($\beta = a/\omega_0$, ω_0 为光束的束腰半径)时,(24)式简化为无截断光束通过大气湍流的二阶矩矩阵,其结果与文献[15]一致;当 $T=0$ 时,(24)式简化为截断光束在自由空间传输的二阶矩矩阵。3)假设 $z=0$ 平面上的一阶矩均为零(可通过坐标变换得到),若光束的交叉谱密度函数 x 与 y 方向是独立的,则(24)式中有

$$\langle xy \rangle = \langle x\theta_y \rangle = \langle y\theta_x \rangle = \langle \theta_y \theta_x \rangle = 0. \quad (26)$$

下面以截断 GSM 光束通过大气湍流传输为例来说明实验中所得到的一般性结果。GSM 光束的在 $z=0$ 平面的交叉谱密度可以表示为

$$W_{00}(\rho'_1, \rho'_2, 0) |_{\text{GSM}} = \exp\left[-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\omega_0^2} - \frac{(\rho'_1 - \rho'_2)^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (27)$$

式中 σ_0 为光束的相干长度,将(27)式代入(5)式,并由(11)和(17)式,经过积分运算得到

$$\langle x^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \langle y^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \frac{\beta^2 \omega_0^2}{2D} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_m A_n^* Q^3, \quad (28)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \langle \theta_y^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \frac{1}{k^2 \omega_0^2 D} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_m A_n^* \frac{S^2}{P} \left[1 + \frac{(B_m - B_n^*)^2}{2S^2 P^2 \beta^2}\right]^{-3/2}, \quad (29)$$

$$\langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \langle y\theta_y \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \frac{i}{2kD} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_m A_n^* (B_m - B_n^*) Q^3, \quad (30)$$

式中

$$D = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_m A_n^* Q, \quad S = \sqrt{\frac{1}{2\beta^2 Q^2} + \frac{\omega_0^2}{\sigma_0^2}}, \quad (31)$$

$$P = \sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{(B_m - B_n^*)^2}{2S^2 \beta^2}}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{B_m + B_n^* + 2\beta^2}}. \quad (32)$$

由于(27)式表征的 GSM 光束在 x 和 y 方向是可分离的,则(26)式在此也成立。因此,截断 GSM 光束在 $z=0$ 平面处的二阶矩矩阵为

$$V_0 |_{\text{GSM}} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} & 0 & \langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}} & 0 \\ 0 & \langle x^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} & 0 & \langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}} \\ \langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}} & 0 & \langle \theta_x^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} & 0 \\ 0 & \langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}} & 0 & \langle \theta_x^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

图 1 为截断 GSM 光束的在 $z=0$ 平面处的交叉矩 $\langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}}$ 的实部和虚部分别随截断参数 β 的变化曲线,波长 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ 。由图 1 可知,其实部和虚部分别约为 10^{-9} 和 10^{-22} 数量级,其值非常小,可以忽略。并且随着 β 趋于无穷大, $\langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}}$ 的实部与虚部都逐渐趋于零,这与文献[31]结果是一致的。因此,复高斯展开法不但克服了二阶矩的发散问题,而且还保证了精度。

将(33)式代入(24)式即得到截断 GSM 光束的二阶矩矩阵 $V |_{\text{GSM}}$,由此可得到截断 GSM 光束在大气湍流中的传输的若干重要参数。实验中仅以光束的瑞利区间 z_R 和光束传输因子 M^2 为例说明。采用 Von Karman 谱^[4]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033C_n^2 \left(\kappa^2 + \frac{1}{L_0^2}\right)^{-11/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (34)$$

式中 C_n^2 是折射率结构常数,它表征湍流的强弱。

$\kappa_m = 5.92/l_0$, l_0 和 L_0 分别是湍流的内、外尺度。本文数值计算中 $l_0 = 0.01 \text{ m}$ 和 $L_0 = 10 \text{ m}$ 。将(34)式代入(15)式得

$$T = 7.06725C_n^2. \quad (35)$$

2.1 瑞利区间

在考虑 $\langle x\theta_x \rangle_0 |_{\text{GSM}} = \langle y\theta_y \rangle_0 |_{\text{GSM}} \approx 0$ 的情况下,其二阶矩 $\langle \rho^2 \rangle |_{\text{GSM}} = \langle x^2 \rangle |_{\text{GSM}} + \langle y^2 \rangle |_{\text{GSM}}$ 的传输公式为

$$\langle \rho^2 \rangle |_{\text{GSM}} = \langle \rho^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} + \langle \theta^2 \rangle_0 |_{\text{GSM}} z^2 + \frac{4}{3} T z^3. \quad (36)$$

激光理论中,瑞利区间用来描述激光束无明显扩展的传输距离,即准直范围。光束的瑞利区间 z_R 定义为光束横截面积扩展到源场处的 2 倍时光束所传输的距离^[32]。由(36)式可知,湍流大气中的 z_R 由三次方程确定,即

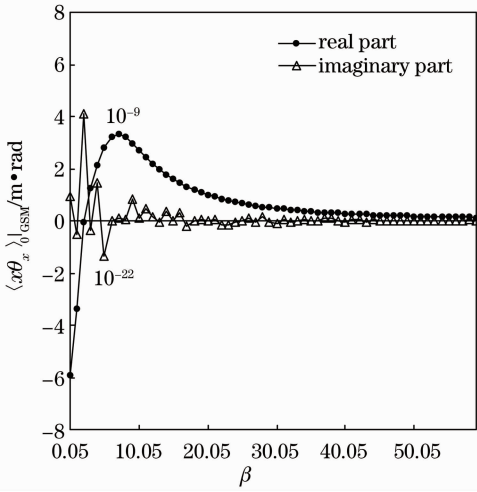


图1 截断 GSM 光束的 $\langle x\theta_x \rangle_0|_{\text{GSM}}$ 随截断参数 β 的变化曲线

Fig. 1 $\langle x\theta_x \rangle_0|_{\text{GSM}}$ of truncated GSM beam versus truncation parameter β

$$\frac{4}{3}Tz_R^3 + \langle \theta^2 \rangle_0|_{\text{GSM}}z_R^2 - \langle \rho^2 \rangle_0|_{\text{GSM}} = 0. \quad (37)$$

图2为截断 GSM 光束的瑞利区间 z_R 随截断参数 β 的变化曲线, 计算参数为 $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$, $\omega_0 = \sigma_0 = 5 \text{ cm}$ 。图2表明, 随着 β 的增大 z_R 增大; 湍流导致 z_R 减小。另外, 当 $\beta > 2$ 时, 无论在自由空间还是在大气湍流中 z_R 几乎不随 β 增大而变化, 说明此时光束的光阑效应可以忽略。

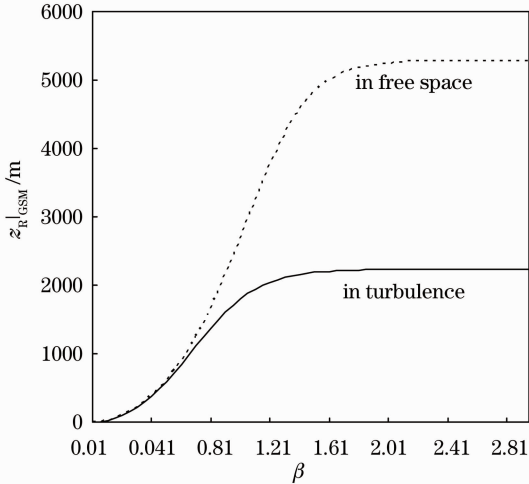


图2 截断 GSM 光束的瑞利区间 z_R 随截断参数 β 的变化曲线

Fig. 2 Rayleigh range z_R of truncated GSM beam versus truncation parameter β

2.2 M^2 因子

实验中以 x 方向的 M_x^2 因子为例说明。光束的 M_x^2 因子定义为^[33]

$$M_x^2 = 2k(\langle x^2 \rangle \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x \rangle^2)^{1/2}. \quad (38)$$

M^2 因子表征实际光束相对于衍射极限的倍数。 M^2 因子同时包含了光束远场和近场特性, 其值越小, 表明光束质量越好。在考虑 $\langle x\theta_x \rangle_0|_{\text{GSM}} = \langle y\theta_y \rangle_0|_{\text{GSM}} \approx 0$ 的情况下, 截断 GSM 在大气湍流中的 M_x^2 因子可表示为

$$M_x^2|_{\text{GSM}} = 2k(\langle x^2 \rangle_0|_{\text{GSM}} \langle \theta_x^2 \rangle_0|_{\text{GSM}} + 2\langle x^2 \rangle_0|_{\text{GSM}} Tz + 2/3 \langle \theta_x^2 \rangle_0|_{\text{GSM}} Tz^3 + 1/3 T^2 z^4)^{1/2}. \quad (39)$$

图3为截断 GSM 光束的光束传输因子 M_x^2 随截断参数 β 的变化曲线, 计算参数为 $C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$, $\omega_0 = \sigma_0 = 2 \text{ cm}$ 和 $z = 3 \text{ km}$ 。图3表明, 光束截断以及大气湍流均会使光束质量下降, 并且在湍流中 M_x^2 因子随 β 的变化速度比自由空间中的要快得多。

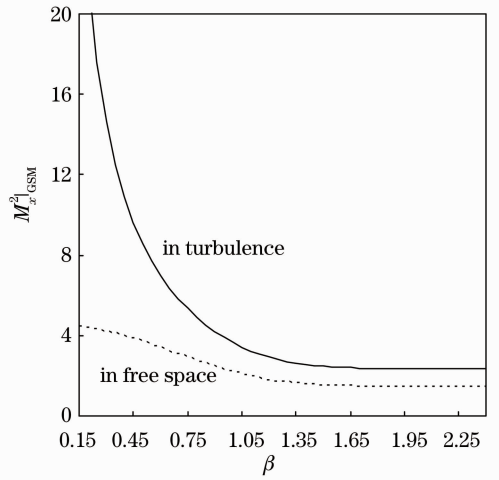


图3 截断 GSM 光束的光束传输因子 M_x^2 随截断参数 β 的变化曲线

Fig. 3 Beam propagation factor M_x^2 of truncated GSM beam versus truncation parameter β

3 结 论

采用复高斯展开法和维格纳分布函数(WDF), 推导出了截断光束的二阶矩矩阵通过大气湍流的传输公式。研究表明, 将硬边光阑的复高斯展开函数引入 $z=0$ 平面处的 WDF 中就能够避免截断光束二阶矩的积分发散问题, 并得到 $z=0$ 平面处二阶矩的解析结果, 从而方便地得到截断光束在大气湍流中传输的二阶矩矩阵。由于采用了复高斯展开法而导致光束的交叉矩 $\langle \rho \cdot \theta \rangle_0$ 在束腰位置处不为零, 但数值计算表明其值是非常小的, 可以忽略。这说明采用复高斯展开近似方法研究截断光束的二阶矩矩阵传输是可靠的, 所得结果具有一般性, 即: 当光束

截断参数趋于无穷大时,可以将结果简化为无截断光束的二阶矩阵通过大气湍流的传输公式;当湍流强度为零时,可以将结果简化为截断光束的二阶矩阵在自由空间中的传输公式。

参 考 文 献

- 1 J. Serna, R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías. Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical systems[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1991, **8**(7): 1094~1098
- 2 H. Weber. Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media[J]. *Opt. & Quantum Electron.*, 1992, **24**(9): 1027~1049
- 3 R. Simon, N. Mukunda, E. C. G. Sudarshan. Partially coherent beams and a generalized ABCD-law [J]. *Opt. Commun.*, 1988, **65**(5): 322~328
- 4 L. C. Andrews, R. L. Phillips. Laser Beam Propagation Through Random Media[M]. Washington: SPIE Press, 1998
- 5 G. Gbur, E. Wolf. Spreading of partially coherent beams in random media [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(8): 1592~1598
- 6 A. Dogariu, S. Amarande. Propagation of partially coherent beams: turbulence-induced degradation [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(1): 10~12
- 7 Y. J. Cai, S. L. He. Propagation of a partially coherent twisted anisotropic Gaussian Schell-model beam in a turbulent atmosphere [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, **89**(4): 041117
- 8 Y. B. Zhu, D. M. Zhao, X. Y. Du. Propagation of stochastic Gaussian-Schell model array beams in turbulent atmosphere [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(22): 18437~18442
- 9 J. X. Pu, O. Korotkova. Propagation of the degree of cross-polarization of a stochastic electromagnetic beam through the turbulent atmosphere [J]. *Opt. Commun.*, 2009, **282**(9): 1691~1698
- 10 X. L. Ji, H. T. Eyyuboglu, Y. Baykal. Influence of turbulence on the effective radius of curvature of radial Gaussian array beams [J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(7): 6922~6928
- 11 G. H. Wu, H. Guo, S. Yu *et al.*. Spreading and direction of Gaussian-Schell model beam through a non-Kolmogorov turbulence [J]. *Opt. Lett.*, 2010, **35**(5): 715~717
- 12 G. Q. Zhou. Propagation of a higher-order cosh-Gaussian beam in turbulent atmosphere [J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(5): 3945~3951
- 13 X. X. Chu. Evolution of an Airy beam in turbulence [J]. *Opt. Lett.*, 2011, **36**(14): 2701~2703
- 14 X. X. Chu, C. H. Qiao, X. X. Feng *et al.*. Propagation of Gaussian-Schell beam in turbulent atmosphere of three-layer altitude model[J]. *Appl. Opt.*, 2011, **50**(21): 3871~3878
- 15 Y. Dan, B. Zhang. Beam propagation factor of partially coherent flat-topped beams in a turbulent atmosphere [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(20): 15563~15575
- 16 R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías. Second-order spatial characterization of hard-edge diffracted beams[J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(19): 1669~1671
- 17 G. Q. Zhou. Generalized M^2 factors of truncated partially coherent Lorentz and Lorentz-Gauss beams [J]. *J. Opt.*, 2010, **12**(1): 015701
- 18 Z. D. Lu, H. L. Jiang, X. Y. Du *et al.*. Generalized M^2 factor of truncated partially coherent controllable dark-hollow beams [J]. *J. Mod. Opt.*, 2008, **55**(13): 2381~2390
- 19 X. L. Chu, B. Zhang, Q. Wen. Generalized M^2 factor of a partially coherent beam propagating through a circular hardedged aperture[J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(21): 4280~4284
- 20 Li Xiaoqing, Ji Xiaoling. Generalized M^2 factor of truncated partially coherent Hermite-Gaussian beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(9): 094206
李晓庆, 季小玲. 截断部分相干厄米-高斯光束的广义 M^2 因子 [J]. *物理学报*, 2011, **60**(9): 094206
- 21 P. A. Belanger, Y. Champagne, C. Pare. Beam propagation factor of diffracted laser beams [J]. *Opt. Commun.*, 1994, **105**(3-4): 233~242
- 22 C. Pare, P. A. Belanger. Propagation law and quasi-invariance properties of the truncated second-order moment of a diffracted laser beam[J]. *Opt. Commun.*, 1996, **123**(4-6): 679~693
- 23 B. D. Lü, S. R. Luo. Asymptotic approach to the truncated cosh-Gaussian beams [J]. *Opt. & Quantum Electron.*, 2001, **33**(1): 107~113
- 24 S. Amarande, A. Giesen, H. Hügel. Propagation analysis of self-convergent beam width and characterization of hard-edged diffracted beams[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(22): 3914~3924
- 25 X. Q. Li, X. L. Ji. Complex Gaussian functions expansion method applied to truncated Gaussian beams[J]. *J. Mod. Opt.*, 2011, **58**(12): 1060~1064
- 26 Li Xiaoqing, Zhao Qi, Ji Xiaoling. Confirmation of the quadratic approximation of Rytov phase structure function and the approximation of complex Gaussian-function expansion of hard-edge apertures[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(12): 1201002
李晓庆, 赵琦, 季小玲. Rytov 相位结构函数二次近似和硬边光阑复高斯函数展开近似的验证 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(12): 1201002
- 27 Zhao Yanzhong, Sun Huayan, Zhang Laixian *et al.*. Backwards propagation characteristics of distorted reflected beams with cat-eye effect[J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(7): 0702015
赵延伸, 孙华燕, 张来线 等. 畸变猫眼效应反射光束的回程传输特性 [J]. *中国激光*, 2011, **38**(7): 0702015
- 28 J. J. Wen, M. A. Breazeal. Diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83**(5): 1752~1756
- 29 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
- 30 Ji Xiaoling. Propagation equation of the effective radius of curvature of general beams [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(10): 2845~2848
季小玲. 一般光束等效曲率半径的传输方程 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(10): 2845~2848
- 31 L. Mandel, E. Wolf. Optical Coherence and Quantum Optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 32 A. E. Siegman. Lasers [M]. California: University Science Books, 1986
- 33 A. E. Siegman. New developments in laser resonators [C]. *SPIE*, 1990, **1224**: 2~14

栏目编辑: 谢 婧