

# 空气中紫外波长局域涡旋光孤子的解及其稳定性

徐 寅<sup>1</sup> 张 华<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 南通大学电子信息学院, 江苏 南通 226019)  
<sup>2</sup> 南通大学理学院, 江苏 南通 226019)

**摘要** 根据紫外波长光束在空气中传输时的非线性效应得到包含氧分子三光子电离等非线性效应的薛定谔方程。由该非线性薛定谔方程出发,研究了紫外波长光束在空气中传输时局域涡旋光孤子的形成。将涡旋孤子的形成和粒子在势阱中的运动联系起来,讨论了光束在空气中形成局域涡旋光孤子的初始条件。数值求解了柱坐标下的涡旋孤子解,随着初始幅值的变化,方程出现单环、双环等孤子解;分析了孤子解光强分布随着传播常数的变化情况,并得出光束尺度和脉冲能量对应初始幅值的变化关系。同时分析了孤子解的扰动稳定性,验证了 Skarka 所推导的一般性判据。

**关键词** 非线性光学; 涡旋光孤子; 紫外光束; 空气中传输; 稳定性

**中图分类号** O437 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0619003

## Solutions and Stability of Ultraviolet Localized Optical Vortex Solitons in Air

Xu Yin<sup>1</sup> Zhang Hua<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Department of Electronics and Information, Nantong University, Nantong, Jiangsu 226019, China)  
<sup>2</sup> School of Science, Nantong University, Nantong, Jiangsu 226019, China)

**Abstract** From the nonlinear effects of ultraviolet beam in air, the beam propagation equation which includes several nonlinear effects, such as the three-photon ionization of oxygen, is obtained. From this nonlinear Schrödinger equation, the generation of localized optical vortex soliton (LOVS) for ultraviolet light in air is investigated. The LOVS dynamics is homologous to the movement of particles in a potential well. The initial conditions for the generation of LOVS in air are analyzed. Numerical simulations show the LOVS solutions in polar coordinates, and in the solutions of equation many rings appear with the increase of initial amplitude. Finally, the light-intensity distribution's variation as propagation constant is confirmed numerically. Numerical simulations also show the relation of beam size, power and initial amplitude. The stability of solution is checked by the stability criterion of Skarka.

**Key words** nonlinear optics; vortex solitons; ultraviolet beam; propagation in air; stability

**OCIS codes** 190.3270; 190.6135; 010.1290; 260.7190

## 1 引 言

强激光束在介质中传输时,会产生一系列的非线性效应,其中克尔非线性作用使光束聚焦,从而增加了聚焦区域的光强。当强度达到一定的阈值时便引起中性分子的多光子电离,形成等离子体,而等离子体对光束有散焦作用,进而反向抑制光束的聚

焦。当非线性自聚焦和等离子体散焦之间平衡时,即可形成一个自导引的激光束。这便是激光脉冲在介质中的自导引传输机理。我国近年来关于非线性光学的研究亦有一定的进展,如文献[1]中利用变分法求解具有初始波前曲率的光束的传输特性等;对液晶等非线性材料中光控空间孤子亦有重要的理论

**收稿日期**: 2011-12-05; **收到修改稿日期**: 2012-01-06

**基金项目**: 江苏省自然科学基金(BK2008183)资助课题。

**作者简介**: 徐 寅(1986—),男,硕士研究生,主要从事空气中涡旋光孤子方面的研究。E-mail: braveshine@qq.com

**导师简介**: 张 华(1964—),男,博士,教授,主要从事光学孤子及光丝传输理论等方面的研究。E-mail: zh@ntu.edu.cn

(通信联系人,中国光学学会会员号: S040130173S)

成果<sup>[2,3]</sup>,此外在实验上也有一些重要的发展,如刘楚等<sup>[4]</sup>对光线中超连续谱的实验研究。

局域涡旋光孤子可以通过一束外加涡旋结构的入射光束(即奇异光束)产生。这种涡旋结构在奇点处的相位是不确定的,相应的强度为零,即光束中心呈暗斑,沿此暗斑旋转一圈,相位改变为 $2m\pi$ , $m$ 为整数,称为拓扑荷。人们发现了一种奇特的非线性,即:对于光束的低强度部分,介质是自聚焦的( $d\delta n/dI > 0$ ,这里 $\delta n$ 是非线性折射系数、 $I$ 是光束强度);对于光束的高强度部分,介质是自散焦的( $d\delta n/dI < 0$ ),这样对于同一光束,其同时存在散焦和聚焦的区域。介于这一现象,Bergé等<sup>[5]</sup>研究了空气中飞秒激光脉冲的自导引传输现象,依据多光子电离引发的散焦作用发现了一种新型孤子结构。Skarka等<sup>[6]</sup>继而研究了红外光束在空气中的传输机理,分析了入射光束的成丝、耦合及产生涡旋孤子的条件等。

随着紫外激光器的发展及应用<sup>[7]</sup>,基于紫外波长的非线性光学的研究亦有了一定的实验基础及技术途径。紫外光脉冲在空气中传输时,使空气产生电离的峰值功率要比红外光小很多(约 $1 \text{ TW/cm}^2$ ),并且可以使用脉宽比较长的激光脉冲。由Schwarz等<sup>[8]</sup>的研究结果可知近红外光在空气中传输时的一些非线性效应对紫外光而言可以忽略,从而主要考虑克尔效应和氧分子三光子电离效应。本文研究了紫外光束(248 nm)在空气中的传输及涡旋孤子的形成,考虑了氧分子的多光子电离效应,推导出光束传输的非线性薛定谔方程,分析了紫外光束产生涡旋孤子的条件。

## 2 非线性薛定谔方程及其孤子解

对于简单偏振光和适度自散焦程度,可以由麦克斯韦方程组出发,得出描述慢变场振幅包络 $E(x, y, z)$ 的非线性薛定谔方程<sup>[6]</sup>:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E + 2k^2 \frac{\delta n}{n_0} E = 0, \quad (1)$$

式中 $k$ 为波数, $n_0$ 、 $\delta n$ 分别是线性和非线性折射率, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 是描述光束衍射的二维拉普拉斯算子,(1)式第三项表明非线性折射率对光束传输的影响。激光场强度为 $I = E^2/(2\epsilon_0 c n_0)$ 。空气中的非线性折射率 $\delta n = n_2 I - N_e/(2n_0 N_c)$ ,第一项为克尔自聚焦效应,第二项为等离子体散焦, $N_e$ 为等离子体密度, $N_c$ 为临界等离子体密度,对于频率 $\omega$ , $N_c = \epsilon_0 m_e \omega^2/e^2$ 。在(1)式中,忽略了群速度色散

对于脉冲整形的效应,因为在适度密度的等离子体( $N_e \ll N_c$ )中对于脉宽大于100 fs的脉冲,群速度色散的影响是非常小的,而本文中采用的正是紫外波长光长脉冲(几十皮秒到几百皮秒量级)。

### 2.1 空气中饱和非线性薛定谔方程

空气中分子、原子通过逆韧致辐射吸收能量,需吸收的光子数 $n = W_1/(h\nu)$ ,其中 $W_1$ 为分子的电离能,氧分子的电离能为 $W_1 = 12.2 \text{ eV}$ 。假设多光子电离为等离子体生成的主要机制,对于波长 $\lambda = 248 \text{ nm}$ 、脉宽 $\tau = 10 \text{ ps}$ 的光脉冲,光子能量 $h\nu = 5.01 \text{ eV}$ ,因此被吸收的光子数 $n \approx 2.44$ ,即电离一个氧分子需要三个光子, $n=3$ 。发生多光子电离时,电子的产生速率遵循如下方程<sup>[8]</sup>

$$\frac{dN_e}{dt} = \sigma^{(n)} I^n N_0, \quad (2)$$

$\sigma^{(n)}$ 是多光子电离系数。对时域脉冲用分步函数来近似,(2)式可以进一步简化,即把右边的看成是一个常数,则 $N_e = \sigma^{(3)} I^3 N_0 \tau_0$ ,这里 $\tau_0$ 是脉冲的时域宽度。

因此,非线性薛定谔方程可以简化为

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E + k(n_2 I - n_3 I^3) E = 0, \quad (3)$$

式中 $n_3$ 为等离子体非线性系数, $n_3 = \sigma^{(3)} N_0 \tau_0 / (2N_c)$ ,至此得到了描述紫外光束在空气中传输的饱和非线性薛定谔方程。这种饱和和非线性的特点是光束在低强度时聚焦,在高强度时光束散焦,其临界状态为

$$\frac{d\delta n}{dI} = 0. \quad (4)$$

由(4)式可得临界强度 $I_c = [n_2/(3n_3)]^{1/2}$ ,这种非线性介质在中心部位自散焦,而在其侧翼保持聚焦。(3)式可利用如下的尺度变换来处理, $z/Z, r_{\perp}/R, I/I_c, E/E_0$ 这里 $Z = \lambda/(2\pi n_2 I_c), R = \lambda/(8\pi^2 n_2 I_c)^{1/2}$ 和 $E_0 = (c/4\pi I_c)^{-1/2}$ ,得

$$i\partial E/\partial z + \Delta_{\perp} E + f(|E|^2)E = 0, \quad (5)$$

其中非线性项为 $f(|E|^2) = |E|^2 - |E|^6/3$ 。

### 2.2 紫外波长光束的涡旋孤子解

考虑在柱坐标下求解涡旋孤子解,研究其径向分布,涡旋光的最典型表达为

$$E(x, y, z) = U(r) \exp(im\theta) \exp(i\beta z), \quad (6)$$

此处 $U(r)$ 是跟 $r$ 有关的振幅; $\beta$ 为传输常数; $m$ 为光学涡旋的拓扑数亦即角向模式,这里考虑它的第一角向模式, $m = 1$ 。

将(6)式代入(5)式

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \beta U - \frac{U}{r^2} + U^3 - \frac{U^7}{3} = 0. \quad (7)$$

求解该方程的“势阱”得

$$V(U) = 2 \int \left( -\beta U + U^3 - \frac{U^7}{3} \right) dU = -\beta U^2 + \frac{U^4}{2} - \frac{U^8}{12}. \quad (8)$$

这里把光束传输和粒子在势阱中的非守恒运动联系起来,有利于更直观地理解光束在空气中的传输过程。

若  $V(U) = 0$ , 且  $dV/dU = 0$  时, 分析势阱的一个临界状态, 结合(8)式可得符合临界状态的  $\beta = 0.47$ , 图1给出了四种不同  $\beta$  值时的  $V(U)$ 。

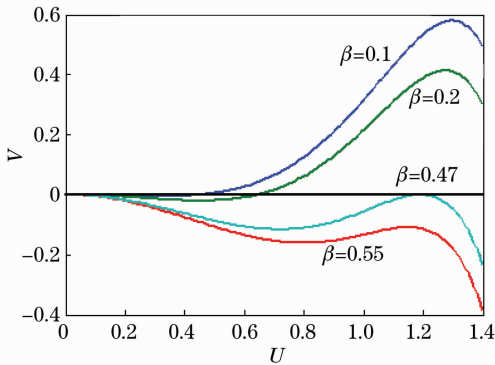


图1 四种不同传播常数时的势阱

Fig. 1 Potential as a function of the amplitude for different propagation constant  $\beta$

若  $\beta > 0.47$ , 如图1中  $\beta = 0.55$  的曲线, 势阱有一个极大值, 但是该值比初始的势阱值要小, 这样势阱中有效质点不能回到其初始状态, 即方程不能求得稳定解; 而当  $0 < \beta < 0.47$ , 则势阱的值可以回到初始大小, 可以产生局域涡旋光孤子; 若  $\beta \leq 0$ , 这样势阱有效质点无法通过, 这种情况对应着非局域涡旋光孤子<sup>[9]</sup>。

利用龙格-库塔法可以求出(7)式的解。对于  $\beta = 0.1$ , 若有效质点携带的“初始速率”  $U_0 \approx 0.124$  时, 无法越过势阱最大值从而产生单环解。随着“初始速率”增加, 势阱中的“有效质点”在到达其初始位置前将在势阱中震荡, 从而形成了多环孤子解, 如图2中的双环和三环解, 其“初始速率”分别是  $U_0 \approx 0.235$  和  $U_0 \approx 0.335$ 。这里也可以看出所产生孤子随着入射光束强度的变化关系, 若产生孤子的平衡被打破, 即  $U_0$  取值的改变, 则无法得到收敛的孤子解。

随着传播常数  $\beta$  的增加, 光强分布的中心区域变得越来越平, 且向外扩展<sup>[10]</sup>, 如图3所示。这是由于其位于自散焦的区域, 这种趋势最终可形成非局域的

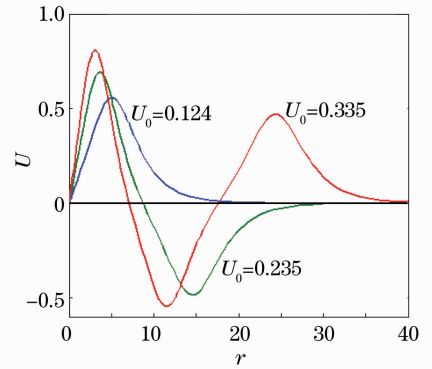


图2 (7)式在  $\beta = 0.1$  时的单环及多环孤子解  
Fig. 2 Stationary LOVS solutions for one and several rings with  $\beta = 0.1$

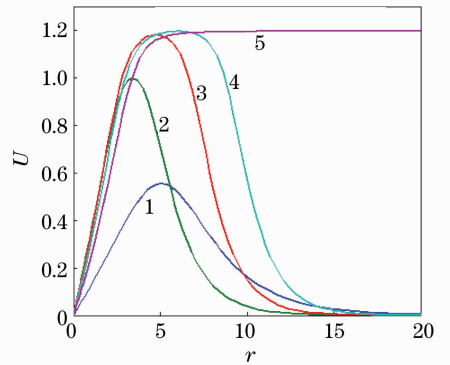


图3 (7)式对应不同传播常数的孤子解, 1:  $\beta = 0.1$ ; 2:  $\beta = 0.3$ ; 3:  $\beta = 0.4$ ; 4:  $\beta = 0.42$ ; 5:  $\beta = 0.45$

孤子解。图4是二维光强分布, 其中图4(a)对应  $\beta$  为 0.1; 图4(b)对应  $\beta$  为 0.3; 图4(c)对应  $\beta$  为 0.4; 图4(d)对应  $\beta$  为 0.42; 由此图可更直观得看出光强分布的中心区域随着传播常数的变大而变宽。

这里求解的三次方七次方竞争非线性下的结论和文献[10]中带有三次方五次方竞争非线性项的波方程的解相似。这种局域解和非局域解的相互转换将来可用于光信息的处理。

利用上述的求解方法, 求解了一组不同传播常数的孤子解, 通过数值模拟得出初始幅值  $U_0$  和最大幅值  $U_{\max}$  随传播常数  $\beta$  的变化曲线, 如图5所示。

如图5所示, 在  $\beta < 0.34$  时,  $U_0$  是关于  $\beta$  的增函数, 但当  $\beta > 0.34$  时, 则为减函数;  $U_{\max}$  是随着  $\beta$  递增的, 且当  $\beta > 0.34$  时,  $U_{\max} > 1$ , 这说明在光束最大值处介质开始散焦, 同时在脉冲侧翼仍保持散焦。在图3中我们给出了几类孤子解, 可以看出  $U_{\max}$  随  $\beta$  的变化趋势是符合上述分析的。

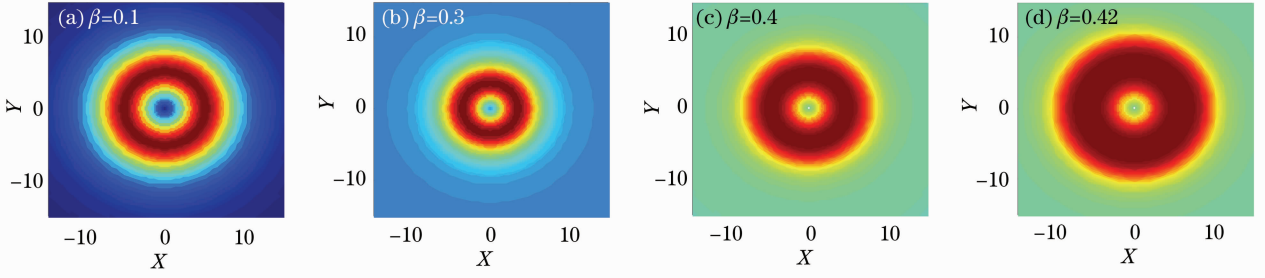


图4 (7)式对应不同传播常数的孤子解

Fig. 4 Stationary LOVS solutions for different propagation constant  $\beta$

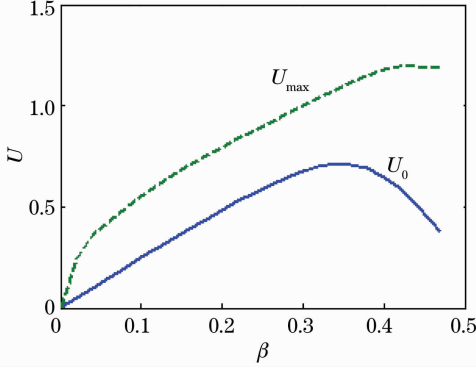


图5 原点处的幅值  $U_0$ 、最大幅值  $U_{\max}$  对应传播常数  $\beta$  的曲线

Fig. 5 Spatial derivative of the field  $U_0$  at the origin and the maximum amplitude  $U_{\max}$  versus the propagation constant  $\beta$

### 3 利用变分法分析产生稳定孤子解的条件

根据零边界条件容易得出脉冲能量和哈密顿量<sup>[11]</sup>的积分表示形式

$$P = \int dr_{\perp} |E|^2, \quad (9)$$

$$H = \int dr_{\perp} [|\Delta_{\perp} E|^2 - F(|E|^2)], \quad (10)$$

式中  $F(|E|^2) = \int_0^{|E|^2} f(x)dx, f(x) = x - \frac{x^3}{3}$ 。

使用高斯整形脉冲作为试探函数

$$E = A(z) \exp\left[-\frac{r^2}{2R^2(z)} + iC(z)r^2 + i\varphi(z)\right], \quad (11)$$

式中  $A(z)$  为振幅,  $R(z)$  为光束尺寸,  $C(z)$  为波前曲率,  $\varphi(z)$  为相位。

将(11)式代入(9)、(10)式计算得

$$P = A^2 R^2, \quad (12)$$

$$H = 1/2A^2 - 1/8A^4 R^2 + 1/96A^8 R^2. \quad (13)$$

利用变分法处理,可得到有效势阱<sup>[11]</sup>,其表征光束尺寸  $R(z)$  的演化

$$V(R) = \frac{2}{R^2} - \frac{R^2}{R_0^2 A_0^2} K\left(\frac{R_0^2 A_0^2}{R^2}\right), \quad (14)$$

(14)式中,  $A_0, R_0$  为光束在  $z = 0$  处的初始幅度和初始尺寸,其中  $K(x)$  由

$$K(x) = 4 \int_0^{\infty} \omega F[x \exp(-\omega^2)] d\omega,$$

积分求得。假定初始光束是零曲率的,即

$$dR/dz|_{z=0} = 0 = C(0).$$

若光束的初始尺寸选择为平衡时的尺寸,即  $R_0 = R_e$  时,(14)式的导数为零,即平衡状态,可求出光束的平衡尺寸

$$R_e^2 = \frac{2}{K'(A_0^2) - K(A_0^2)/A_0^2} = \frac{4}{A_0^2 - A_0^6/4}. \quad (15)$$

可利用振幅微扰模型来确定平衡解  $R_0 = R_e$  的稳定性<sup>[11]</sup>。以微扰  $R = R_e + \delta R$ ,其中  $R_e \gg \delta R$ :

$$\frac{d^2 \delta R}{dz^2} + \Omega^2 \delta R = 0, \quad (16)$$

$$\Omega^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right|_{R=R_0} = \frac{A_0^6}{2R_0^2}. \quad (17)$$

由(17)式可知  $\Omega^2$  恒大于0,即  $dP_e/dA_0 > 0$ ,则上述解对于光束尺寸的扰动是稳定的,即对横向扰动是稳定的,这种判定条件和 Vakhitov 稳定性判据是等价的<sup>[12]</sup>。这里采用的非线性条件所得的结论同时验证了 Skarka 所推导的一般性判据。

若哈密顿量为负时,则光束形成一个往复振动的波导,类似于求解光束平衡尺寸方法可以求出零哈密顿量时的光束尺寸:

$$R_h^2 = \frac{4}{A_0^2 - A_0^6/12}. \quad (18)$$

根据(15)、(18)式分别画出图6中  $e, h$  曲线。在曲线的上方区域,光束尺寸因为初始的聚焦而往复振动,由图也可看出若  $R_0^2 > R_h^2$  时,即位于曲线  $h$

上方时,对于给定的  $A_0^2$ ,其哈密顿量为负,即光束形成一个往复振动的波导;若  $R_0^2 < R_0^2$  时,即位于曲线  $h$  下方时,光束单调衍射。

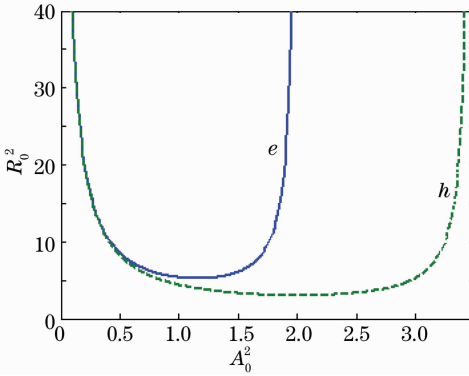


图 6 平衡曲线  $e$  和零哈密顿量曲线  $h$

Fig. 6 Equilibrium curve  $e$  and zero Hamiltonian curve  $h$

结合上述的结果,可以得出平衡光束能量和零哈密顿量光束能量分别为

$$P_e = \frac{4}{1 - A_0^4/4}, \quad P_h = \frac{4}{1 - A_0^4/12}. \quad (19)$$

在图 7 中  $h$  曲线的上方,哈密顿量为负,这和上述结果一致,此时不能衍射,因此能量大于临界能量 4 的光束将在平衡状态振荡,此即等离子散焦的饱和和引起的。

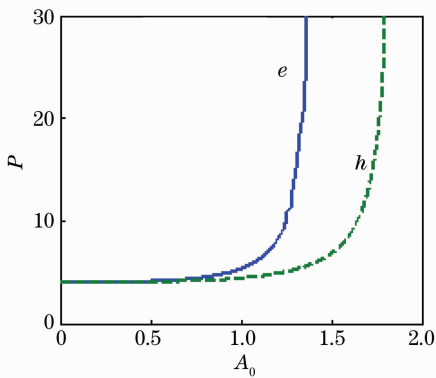


图 7 脉冲能量  $P$  对于  $A_0$  的变化关系

Fig. 7 Laser pulse energy  $P$  as a growing function of the amplitude  $A_0$

## 4 结 论

从非线性薛定谔方程出发,研究了空气中紫外光束形成局域涡旋光孤子的机理,引入二维空间中粒子的势阱,分析形成孤子解的  $\beta$  值范围及产生孤子解的条件等。数值求解了在  $f(|E|^2) = |E|^2 - |E|^6/3$  这样的非线性条件下的局域涡旋孤子解,得

出随着初始幅值的变化,方程的解呈单环,双环等孤子解;且随着  $\beta$  的增加孤子解的光强分布向外扩展,最终可形成局域解向非局域解的转化。并验证 V. Skarka 等推导的在饱和非线性介质中关于光束尺寸的一般性结论,分析了孤子解在横向扰动上的稳定性,并研究了光束能量和初始幅值的关系。

## 参 考 文 献

- 1 Wang Yuqing, Zhong Dongzhou, Huang Dong. Influence of phase-front curvature for an optical beam in strongly nonlocal media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(8): 2377~2382  
王玉青,钟东洲,黄东.初始波前曲率对强非局域介质中光束演化的影响[J]. *光学学报*, 2010, **30**(8): 2377~2382
- 2 Pu Shaozhi, Zhan Kaiyun, Hou Chunfeng. Light-controlled spatial solitons in homeotropically aligned nematic liquid crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(10): 3010~3015  
浦绍质,展凯云,侯春风.垂直排列相列液晶中的光控空间孤子[J]. *光学学报*, 2010, **30**(10): 3010~3015
- 3 Zhang Xiaping. Propagation of elegant Hermite-Gaussian beams in strongly nonlocal nonlinear media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(11): 1119002  
张霞萍.强非局域非线性介质中复宗量厄米-高斯光束的传输[J]. *光学学报*, 2011, **31**(11): 1119002
- 4 Liu Chu, Eric Rees, Toni Laurila *et al.*. Experimental research on supercontinuum generation from nanosecond pulse and conventional single mode fiber[J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(7): 0705003  
刘楚, Eric Rees, Toni Laurila 等.纳秒脉冲在普通单模光纤中产生超连续谱的实验研究[J]. *中国激光*, 2011, **38**(7): 0705003
- 5 L. Bergé, A. Couairon. Gas-induced solitons[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**(6): 1003~1006
- 6 V. Skarka, N. B. Aleksić, V. I. Berezhiani *et al.*. Propagation, filamentation, and coalescence of singular optical pulses in air [C]. *Microwave and Optoelectronics Conference*, 2007, 902~908
- 7 Liu Qiang, Yan Xingpeng, Chen Hailong *et al.*. New progress in high-power all-solid-state ultraviolet laser[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(9): 2289~2298  
柳强,闫兴鹏,陈海龙等.高功率全固态紫外激光器研究新进展[J]. *中国激光*, 2010, **37**(9): 2289~2298
- 8 J. Schwarz, J. Diels. Analytical solution for UV filaments[J]. *Phys. Lett. A*, 2001, **65**(1): 013806
- 9 V. Skarka, N. B. Aleksić, V. I. Berezhiani *et al.*. Dynamics of electromagnetic beam with phase dislocation in saturable nonlinear media[J]. *Phys. Lett. A*, 2001, **291**(2-3): 124~132
- 10 M. Quiroga-Teixeiro, H. Michinel. Stable azimuthal stationary state in quintic nonlinear optical media[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1997, **14**(8): 2004~2009
- 11 V. Skarka, V. I. Berezhiani, R. Miklaszewski. Spatiotemporal soliton propagation in saturating nonlinear optical media [J]. *Phys. Rev. E*, 1997, **56**(1): 1080~1087
- 12 N. G. Vakhitov, A. A. Kolokolov. Stationary solution of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation [J]. *Radiophys. Quantum Electron.*, 1973, **16**(7): 783~789

栏目编辑:李文喆