

# 激光二极管自混合干涉信号随外腔长度衰减

胡险峰

(四川大学物理科学与技术学院, 四川 成都 610064)

**摘要** 理论分析了激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增大的变化特点及规律。从复合谐振腔干涉函数出发, 推导出激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增加指数衰减, 衰减系数与光频虚部成正比, 并给出光频虚部和实部满足的超越方程组。求解该超越方程组得到, 当外腔长度超过一个临界值时, 光频虚部随外腔长度近似反比衰减, 则激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增加衰减很缓慢; 当外腔长度小于该临界值时, 外腔反馈会使光频虚部增大, 而且光频虚部随外腔长度变化而振荡, 激光二极管自混合干涉信号出现复杂的状态。外腔反馈强度越大, 或激光单模线宽越大, 这一外腔长度的临界值则越小。分析激光二极管自混合干涉还需要考虑外腔反馈对光频虚部的影响。

**关键词** 测量; 激光二极管; 自混合干涉; 激光频率; 线型函数; 模式线宽

**中图分类号** TN248.4 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0514002

## Attenuation of Self-Mixing Interference Signal of Laser Diode with External-Cavity Length

Hu Xianfeng

(College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

**Abstract** Characteristics and laws of the variation of self-mixing interference signal of laser diode along with the increase of external-cavity length are analyzed theoretically. The self-mixing interference signal attenuating exponentially along with increase of external-cavity length is deduced from the composite cavity interference function. The attenuation coefficient is direct ratio to imaginary part of light frequency. A group of transcendental equations for imaginary part and real part of light frequency are also presented. By solving the equations, at external-cavity length more than a critical value, along with the increase of external-cavity length, the imaginary part is inversely proportional to attenuation, so the self-mixing interference signal attenuates very slowly. When external-cavity length is less than the critical value, feedback light increases the imaginary part, moreover, the imaginary part oscillates along with external-cavity length. The self-mixing interference signal appears as a complicated state. The greater the intensity of the external cavity feedback or the single-mode line-width of laser is, the smaller the critical value is. Analysis of the laser diode self-mixing interference also needs to consider the effect of feedback light on the imaginary part.

**Key words** measurement; laser diode; self-mixing interference; laser frequency; line-shape function; mode line-width

**OCIS codes** 140.2020; 190.4410; 120.3180; 280.3400; 030.1670; 260.3160

## 1 引 言

外腔反馈会引起激光二极管出光强度和光频随外腔长度变化, 形成类似传统双光束干涉的干涉信号, 由此发展出自混合干涉速率、位移和振动等测量方法<sup>[1~7]</sup>。而且, 实验上会观察到当外腔长度远大于激光相干长度时仍然有激光二极管自混合干涉现

象<sup>[8~10]</sup>, 这一特点优于传统双光束干涉。文献[11]认为激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增加而衰减的规律类似于传统的双光束干涉随光程差增大而衰减, 只不过线宽改为外腔反馈引起的光频变化。仅仅考虑外腔反馈引起的光频变化, 而不讨论激光线宽的影响, 文献[11]做出的解释不够充分。而且,

收稿日期: 2011-10-09; 收到修改稿日期: 2012-01-09

作者简介: 胡险峰(1962—), 硕士, 副教授, 主要从事基础物理实验教学方面的研究。E-mail: ruihui@vip.sina.com

从激光介质的折射率被外腔反馈而改变的模型<sup>[12,13]</sup>,或复合谐振腔干涉函数模型<sup>[14~16]</sup>,外腔反馈引起的光频变化随外腔长度变化出现类似正弦函数变化,变化周期为半个激光波长。按文献[11]的解释激光二极管自混合干涉信号的幅度就应该以半个激光波长为周期在振荡,则形成信号的幅度与信号同频振荡。实际观察到的类似传统双光束干涉的激光二极管自混合干涉信号并非如此。

讨论传统的双光束干涉条纹衬度随光程差的变化需要考虑干涉光的线宽,对于激光二极管自混合干涉信号的幅度随外腔长度衰减是否也要考虑激光的单模线宽,先前的文章没有做相应的研究讨论。本文从复合谐振腔干涉函数出发,给出复合谐振腔的模式线型函数,考虑多个波长干涉叠加对复合谐振腔线型函数积分,推导出激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增加而衰减的规律以及外腔反馈下光频变化满足的超越方程组,并对激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增大衰减缓慢这一现象进行解释说明。

## 2 线型函数

复合谐振腔模型如图 1 所示, $L_i$  为内腔长度, $L_r$  为外腔长度, $r_i$  为内腔前后端面的反射比, $t_b$  为内腔后端面透射比, $t_f$  为内腔前端面透射比, $r_r$  为外腔反射镜的反射比。设  $n$  为内腔介质的折射率, $\lambda$  为辐射光的波长, $G_{sr}$  为有外腔反馈时内腔的单程增益, $m$  为光在内腔中反射的次数。由复合谐振腔模型<sup>[14]</sup>,可得干涉函数为

$$\Phi(\delta_i + \varphi) = \frac{[1 - (r_i r_{\text{eff}} G_{sr})^m]^2 + 4(r_i r_{\text{eff}} G_{sr})^m \sin^2 \frac{m(\delta_i + \varphi)}{2}}{(1 - r_i r_{\text{eff}} G_{sr})^2 + 4r_i r_{\text{eff}} G_{sr} \sin^2 \frac{(\delta_i + \varphi)}{2}}, \quad (1)$$

表 1 增益系数中的各参数

Table 1 Parameters in gain coefficient

$A_g / (\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$	$\tau / \text{s}$	$\Gamma_m$	$L_i / \text{m}$	$V / \text{m}^3$	$v / (\text{m}/\text{s})$	$s_{\text{th}} / \text{m}^{-3}$	$e/C$
$5.9 \times 10^{-16}$	$4.0 \times 10^{-9}$	0.3	$3.0 \times 10^{-4}$	$2.7 \times 10^{-16}$	$8.6 \times 10^7$	$1.0 \times 10^{24}$	$1.6 \times 10^{-19}$

考虑内腔波导对腔内光衍射有很好的约束作用,因而认为  $m \rightarrow \infty$ ,则干涉函数不出现发散,就要求  $(r_i^2 \beta G_{sr})^m = 0$ 。将  $\sin(\delta_i + \varphi)$  改写为  $\sin[4\pi n L_i (\nu - \nu_0)/c + \varphi]$ , $C$  为光速,在模式谐振频率  $\nu_0$  附近, $\sin^2[(\delta_i + \varphi)/2] \approx [2\pi n L_i (\nu - \nu_0)/c + \varphi/2]^2$ ,令

式中  $\delta_i = 4\pi n L_i / \lambda$  为内腔相邻反射的相位差, $r_{\text{eff}} = r_{\text{eff}} \exp(j\varphi)$ ,为内腔前端面等效反射比,仅考虑外腔反射面单次反射, $\varphi = -\arctan[C \sin \delta_r / (1 - C \cos \delta_r)]$  为内腔前端面等效反射比的辐角, $r_{\text{eff}} = r_i \beta = r_i (1 + C^2 - 2C \cos \delta_r)^{1/2}$  为内腔前端面等效反射比的模, $\delta_r = 4\pi L_r / \lambda$  为外腔反射镜上相邻反射的相位差, $C = r_r \gamma (1 - r_i^2) / r_i$  为外腔反馈系数, $\gamma$  为外腔耦合系数。

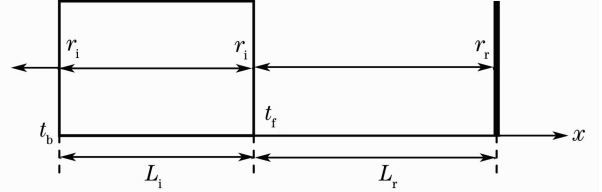


图 1 自混合干涉的复合谐振腔模型

Fig. 1 Model of composite cavity of self-mixing interference

在一级近似下,有外腔反馈时内腔的单程增益写为<sup>[10,15]</sup> $G_{sr} \approx (G_{sr0} + G_{sr1} \cos \delta_r) G_s$ ,其中  $G_s$  为无外腔反馈时内腔的单程增益,在忽略包含外腔反馈系数  $C^2$  以上各项后, $G_{sr0} \approx 1, G_{sr1} \approx 2CA_{irg\epsilon}$ , $A_{irg\epsilon} = [\epsilon_i (1 + 2r_i) / (1 + r_i) - g_i] / (1 + \epsilon_i)$  为一个与无外腔反馈时内腔端面反射比  $r_i$ 、介质单程增益系数  $g_i$  和出光强度与饱和光强之比  $\epsilon_i$  有关的参数,而  $g_i = \eta_i (J - J_{\text{th}})$ , $J$  为注入电流强度,单位电流强度光增益系数  $\eta_i = A_g \tau \Gamma_m L_i / eVv$ ,阈值电流强度  $J_{\text{th}} = eVs_{\text{th}} / \tau$ , $A_g$  为辐射复合系数, $\tau$  为载流子寿命, $\Gamma_m$  为内腔光限制因子, $e$  为电子电荷量, $V$  为内腔体积, $v$  为介质中光速, $s_{\text{th}}$  为阈值载流子浓度,参考文献[17]分析给出  $r_i \approx 0.32, \epsilon_i \approx 0.2$ ,以及上述各参数的取值如表 1 所示,则  $\eta_i = 9.5 \times 10^{-2} \text{A}^{-1}, J_{\text{th}} = 1.1 \times 10^{-2} \text{A}, A_{irg\epsilon} = 0.21 - 7.9 \times 10^{-2} J$ ,其中  $J$  的单位为安培,随注入电流增加,参数  $A_{irg\epsilon}$  减小。令  $\beta_{irg\epsilon} = (1 + 2CA_{irg\epsilon} \cos \delta_r)$ ,则  $G_{sr} = \beta_{irg\epsilon} G_s$ 。

$$\Delta\nu_{\text{Mr}} = 2 \frac{(1 - r_i^2 \beta_{irg\epsilon} G_s)}{(4\pi n L_i r_i / c) (\beta_{irg\epsilon} G_s)^{1/2}} = \frac{(1 - r_i^2 \beta_{irg\epsilon} G_s)}{\pi r_i (\beta_{irg\epsilon} G_s)^{1/2}} \Delta\nu_{\text{FSR}}, \quad (2)$$

式中  $\Delta\nu_{\text{FSR}}$  为自由光谱区。(1)式改写为

$$\Phi(\nu - \nu_0) \approx \frac{\pi}{2} L (\nu - \nu_0) \left[ \frac{1}{1 - r_i^2 \beta_{irg\epsilon} G_s} \right]^2 \Delta\nu_{\text{Mr}}, \quad (3)$$

式中

$$L(\nu - \nu_0) \approx \frac{(\Delta\nu_{Mr}/2\pi)}{[(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi nL_i)]^2 + (\Delta\nu_{Mr}/2)^2}. \quad (4)$$

(4)式为有外腔反馈时有源复合谐振腔的线型函数， $\Delta\nu_{Mr}$ 为复合谐振腔的模式线宽。(2)式和(4)式会随相位角  $\delta_r = 4\pi L_r/\lambda$  振荡。

无外腔反馈时， $C = 0, \varphi = 0, \beta = 1, \beta_{irge} = 1$ 。

(2)式和(4)式分别改写为

$$\Delta\nu_M = \frac{(1 - r_i^2 G_s)}{\pi r_i G_s^{1/2}} \Delta\nu_{FSR} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{F}, \quad (5)$$

$$L(\nu - \nu_0) \approx \frac{\Delta\nu_M/2\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu_M/2)^2}. \quad (6)$$

(5)式和(6)式分别为有源法布里-珀罗腔的模式线宽和线型函数， $F = \pi r_i G_s^{1/2}/(1 - r_i^2 G_s)$  为有源法布里-珀罗腔的精细度。无损耗的理想情况是增益抵消光出射损耗，即  $r_i^2 G_s = 1$ ，模式线宽为零，线型函数在模式频率处为无穷大。

### 3 复合腔出光强度

由文献[16]中(3)式，在  $(r_i^2 \beta G_{sr})^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  的情况下，在模式谐振频率  $\nu_0$  附近，可以得到内腔后端面出射光电场强度

$$E_{bt}(\nu) = \sqrt{\Phi(\nu - \nu_0)} \exp[j\phi_1(\nu)] \{1 + r_i \beta G_{sr}^{1/2} \exp[j\phi_2(\nu)]\} t_b E_i N_s G_{sr}^{1/4}, \quad (7)$$

式中  $E_i$  为自发辐射电场强度， $N_s$  为辐射复合载流子浓度，

$$\phi_1(\nu) = \arctan\{r_i^2 \beta G_{sr} \sin \phi_2(\nu) / [1 - r_i^2 \beta G_{sr} \cos \phi_2(\nu)]\},$$

$$\phi_2(\nu) = 4\pi n L_i [(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi n L_i)]/c.$$

忽略交叉项后，内腔后端面外光电探测器接收到的光强为

$$I_{bt} = \sum_{\nu} E_{bt}(\nu) E_{bt}^*(\nu) \approx \frac{1}{r_i^2 G_s^{1/2}} \left( \frac{t_b N_s |E_i| \Delta\nu_{FSR}}{2\pi} \right)^2 (I_0 + I'_0 + I_1 + I_2), \quad (8)$$

式中

$$I_0 = \frac{\Delta\nu_{Mr}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + r_i^2 G_s + (1 - r_i^2 G_s) C^2 A_{irge}/2}{[(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi n L_i)]^2 + (\Delta\nu_{Mr}/2)^2} d\nu,$$

$$I'_0 = \frac{\Delta\nu_{Mr}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2r_i G_s^{1/2} \cos \phi_2(\nu)}{[(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi n L_i)]^2 + (\Delta\nu_{Mr}/2)^2} d\nu,$$

$$I_1 = \frac{\Delta\nu_{Mr}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - r_i^2 G_s)(1 - A_{irge}) C \cos \delta_r}{[(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi n L_i)]^2 + (\Delta\nu_{Mr}/2)^2} d\nu,$$

$$I_2 = \frac{\Delta\nu_{Mr}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - r_i^2 G_s) C^2 A_{irge} \cos 2\delta_r}{[(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi n L_i)]^2 + (\Delta\nu_{Mr}/2)^2} d\nu.$$

上述4个积分的被积函数奇点可表示为

$$[(\nu - \nu_0) + c\varphi/(4\pi n L_i)]^2 + \left(\frac{\Delta\nu_{Mr}}{2}\right)^2 = 0, \quad (9)$$

的解。考虑到  $\nu_0 \gg c\varphi/(4\pi n L_i)$ ，且  $\nu_0 \approx 4.6 \times 10^{14} \gg \Delta\nu_{Mr}$ ，在积分的上下限上认为  $\pm\nu_0 \mp c\varphi/(4\pi n L_i) \rightarrow \pm\infty$ ，用留数定理计算上述4个积分，(8)式改写为

$$I_{bt} \approx A_0 + A'_0 \exp\left(-\frac{2\pi n L_i \Delta\nu_{Mr}}{c}\right) + A_1 \exp\left(-\frac{2\pi L_r \Delta\nu_{Mr}}{c}\right) \cos \frac{4\pi L_r}{c} \left(\nu_0 - \frac{c\varphi}{4\pi n L_i}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{4\pi L_r \Delta\nu_{Mr}}{c}\right) \cos \frac{8\pi L_r}{c} \left(\nu_0 - \frac{c\varphi}{4\pi n L_i}\right), \quad (10)$$

式中

$$A_0 = \frac{1}{r_i^2 G_s^{1/2}} \left( \frac{t_b N_s |E_i| \Delta\nu_{FSR}}{2\pi} \right)^2 [1 + r_i^2 G_s + (1 - r_i^2 G_s) C^2 A_{irge}/2],$$

$$A'_0 = \frac{2}{r_i} \left( \frac{t_b N_s |E_i| \Delta\nu_{FSR}}{2\pi} \right)^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{r_i^2 G_s^{1/2}} \left( \frac{t_b N_s |E_i| \Delta\nu_{\text{FSR}}}{2\pi} \right)^2 (1 - r_i^2 G_s)(1 - A_{i_{\text{rge}}})C,$$

$$A_2 = \frac{1}{2r_i^2 G_s^{1/2}} \left( \frac{t_b N_s |E_i| \Delta\nu_{\text{FSR}}}{2\pi} \right)^2 (1 - r_i^2 G_s)C^2 A_{i_{\text{rge}}}.$$

对于无损耗的理想情况,增益抵消光出射损耗,即  $r_i^2 G_s = 1$ ,则  $A_0$  与外腔反馈无关,且  $A_1 = A_2 = 0$ ,外腔反馈对理想激光器的光强没有影响.无外腔反馈时单模线宽越小,即  $r_i^2 G_s$  越接近 1,  $A_1$  和  $A_2$  则越小,自混合干涉现象就越弱,则不利于实验上观察到自混合干涉现象.

由于  $\varphi$  和  $\Delta\nu_{\text{Mr}}$  均与光频有关,从(9)式知道光频为复数,则  $\varphi$  和  $\Delta\nu_{\text{Mr}}$  均为复函数,即  $\varphi = \text{Re } \varphi + j\text{Im } \varphi$ ,  $\Delta\nu_{\text{Mr}} = \text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}} + j\text{Im } \Delta\nu_{\text{Mr}}$ ,则上半复平面上的奇点改写为

$$\nu = \nu_0 - \left( \frac{c\text{Re } \varphi}{4\pi n L_i} + \frac{\text{Im } \Delta\nu_{\text{Mr}}}{2} \right) + j \left( \frac{\text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}}}{2} - \frac{c\text{Im } \varphi}{4\pi n L_i} \right) \equiv \nu' + j\nu'', \quad (11)$$

式中  $\nu'$  为光频的实部,  $\nu''$  光频的虚部,对比(9)式在上半复平面上的解,做变换

$$\frac{c\varphi}{4\pi n L_i} \rightarrow \nu_0 - \nu' \equiv \frac{c\text{Re } \varphi}{4\pi n L_i} + \frac{\text{Im } \Delta\nu_{\text{Mr}}}{2}, \quad (12)$$

$$\Delta\nu_{\text{Mr}} \rightarrow \nu'' \equiv \frac{\text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}}}{2} - \frac{c\text{Im } \varphi}{4\pi n L_i}. \quad (13)$$

(10)式改写为

$$I_{\text{bt}} \approx A_0 + A'_0 \exp\left(-\frac{2\pi n L_i \nu''}{c}\right) + A_1 \exp\left(-\frac{2\pi L_r \nu''}{c}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \cos\left(\frac{8\pi L_r \nu'}{c}\right). \quad (14)$$

由于(14)式中指数衰减因子的衰减长度  $L_c \propto 1/|\text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}} - c\text{Im } \varphi/(2\pi n L_i)|$ ,当  $\text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}}$  和  $c\text{Im } \varphi/(2\pi n L_i)$  符号相同,且  $|\text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}} - c\text{Im } \varphi/(2\pi n L_i)| \rightarrow 0$  时,  $L_c \rightarrow \infty$ ,则指数衰减因子趋向 1,自混合干涉信号几乎不随外腔长度增加而衰减.对于传统的双光束干涉,  $L_c \propto 1/\Delta\nu_{\text{M}}$  为一定值,取决于干涉光的线宽,线宽越窄干涉信号随光程差增大的衰减越缓慢.

#### 4 光频满足的超越方程组

在上半复平面求解(9)式,即求解(11)式,将  $\varphi$  和  $\Delta\nu_{\text{Mr}}$  中的三角函数利用欧拉等式写成指数形式,分别写出其实部和虚部.在弱反馈情况下,  $C \ll 1$ ,则  $\varphi \approx -C\sin(4\pi L_r \nu/c)$ ,将  $\sin(4\pi L_r \nu/c)$  写成指数形式,再将(11)式代入,得到  $\varphi$  的实部和虚部分别为

$$\text{Re } \varphi \approx -C \cosh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \sin\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right), \quad (15)$$

$$\text{Im } \varphi \approx -C \sinh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \cos\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right). \quad (16)$$

由  $\beta_{i_{\text{rge}}} = (1 + 2CA_{i_{\text{rge}}} \cos \delta_r)$ ,  $\beta = (1 + C^2 - 2C \times \cos \delta_r)^{1/2}$ ,忽略包含  $C^2$  以上项,得到  $\beta\beta_{i_{\text{rge}}} \approx 1 - (1 - 2A_{i_{\text{rge}}})C \cos(4\pi L_r \nu/c)$ ,将其代入(2)式,把  $\cos(4\pi L_r \nu/c)$  写成指数形式,再将(11)式代入,得到  $\Delta\nu_{\text{Mr}}$  的实部和虚部分别为

$$\text{Re } \Delta\nu_{\text{Mr}} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}}}{\pi r_i^2 G_s^{1/2}} \left[ 1 - r_i^2 G_s + \frac{C}{2} (1 + r_i^2 G_s)(1 - 2A_{i_{\text{rge}}}) \cosh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \cos\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right) \right], \quad (17)$$

$$\text{Im } \Delta\nu_{\text{Mr}} = -\frac{\Delta\nu_{\text{FSR}} C}{2\pi r_i^2 G_s^{1/2}} (1 + r_i^2 G_s)(1 - 2A_{i_{\text{rge}}}) \sinh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \sin\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right). \quad (18)$$

令  $P = (1 + r_i^2 G_s)(1 - 2A_{i_{\text{rge}}})/2r_i^2 G_s^{1/2}$ ,并考虑到(5)式,由(16)式和(17)式,得到(11)式中光频虚部为

$$\nu'' \approx \frac{\Delta\nu_{\text{M}}}{2} + \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}} C}{2\pi} \left[ P \cosh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) + \sinh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \right] \cos\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right), \quad (19)$$

由(15)式和(18)式,得到(11)式中光频实部为

$$\nu' \approx \nu_0 + \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}} C}{2\pi} \left[ \cosh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) + P \sinh\left(\frac{4\pi L_r \nu''}{c}\right) \right] \sin\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right). \quad (20)$$

(19)式和(20)式就是弱反馈下,  $C \ll 1$ ,忽略包含反馈系数  $C^2$  等反馈系的高次项后,光频的实部和虚部满足的超越方程组.

#### 5 计算分析

由(19)式和(20)式,利用  $\nu_0 = l\Delta\nu_{\text{FSR}}$ ,  $l$  为模式指数(整数),  $\Delta\nu_{\text{FSR}} = c/(2nL_i)$  和  $\Delta\nu_{\text{M}} = \Delta\nu_{\text{FSR}}/F$ ,并令  $l_r = \nu'/\Delta\nu_{\text{FSR}}$ ,  $F_r = \Delta\nu_{\text{FSR}}/(2\nu'')$  分别为复合谐振

腔的“模式指数”和“精细度”，均为任意实数，得到光频实部和虚部随外腔长度振荡的振幅满足的无量纲方程

$$\frac{(l_r - l)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{1}{2F_r} - \frac{1}{2F}\right)^2}{b^2} \approx 1, \quad (21)$$

式中

$$a = \frac{C}{2\pi} \left[ P \sinh\left(\frac{\pi L_r}{nL_i F_r}\right) + \cosh\left(\frac{\pi L_r}{nL_i F_r}\right) \right],$$

$$b = \frac{C}{2\pi} \left[ P \cosh\left(\frac{\pi L_r}{nL_i F_r}\right) + \sinh\left(\frac{\pi L_r}{nL_i F_r}\right) \right].$$

(21)式是一个长轴和短轴随光频的虚部及外腔长度和外腔反馈强度变化的椭圆超越方程，由于还跟参数  $P$  和  $F$  有关，则不同的激光器或激光器不同的工作状态，该超越方程的解也不相同，由于参数  $P$  和  $F$  与外腔长度无关，其取值不影响方程的解随外腔长度变化的趋势。将(21)式写为

$$\left(\frac{1}{2F_r} - \frac{1}{2F}\right)^2 \approx b^2 - \frac{b^2}{a^2}(l_r - l)^2, \quad (22)$$

左边和右边分别是  $F_r$  的函数，用作图法求解。

### 5.1 光频虚部随外腔长度变化

取  $F = 3, nL_i = 1.04 \text{ mm}, J = 15.2 \text{ mA}, P \approx 1.25555, C = 9.12 \times 10^{-5}$ ，图解式(22)的结果如图2所示，图中箭头表示外腔长度  $L_r$  增大的方向，数字为外腔长度，单位为  $\text{mm}$ 。在  $L_r$  很小时，随  $l_r$  增大， $1/F_r$  与  $l_r$  之间先是保持两种函数关系，分别是抛物线函数关系(图中上部)和椭圆函数关系，即1个  $l_r$  值对应应有3个  $1/F_r$  值，在抛物线函数关系中， $1/F_r$  随  $l_r$  的变化很缓慢，例如  $L_r = 5.2 \text{ mm}$ ， $l_r - l$  变化  $0.016$ ， $1/F_r$  变化  $6.6 \times 10^{-4}$ ；随  $L_r$  增大，抛物线解减小，抛物线曲线在图中下降(图中上部)，椭圆解对应的椭圆增大。在  $L_r = 6.597604 \text{ mm}$  时，椭圆解和抛物线解交汇。 $L_r$  再增大， $1/F_r$  随  $l_r$  的变化先是出现单值区，然后才出现三值区，在大致  $L_r = 6.76 \text{ mm}$  时三值区消失。超过这一临界值，再进一步增大  $L_r$ ， $1/F_r$  与  $l_r$  之间仅保持抛物线函数关系(图中下部)。  $L_r$  进一步增大的情况见图3和图4。

由计算图2得到的数据给出图3和图4，分别为光频虚部和光频虚部与外腔长度乘积随外腔长度的变化。在  $L_r = 104 \text{ mm}$  时， $l_r - l$  变化  $0.016$ ， $1/F_r$  变化  $1.7 \times 10^{-5}$ ，即  $1/F_r$  随  $l_r$  变化非常小。随  $L_r$  进一步增大， $1/F_r$  随  $l_r$  变化更小，如图3中三种  $l_r - l$  取值的曲线趋于并在一起，且  $1/F_r$  随  $L_r$  几乎呈反比关系衰减，即图4中  $L_r/F_r$  近似为一常数。在  $2 \leq \lg[L_r/(nL_i)] \leq 4$  的范围内， $3.1258 \text{ mm} \leq L_r/F_r \leq$

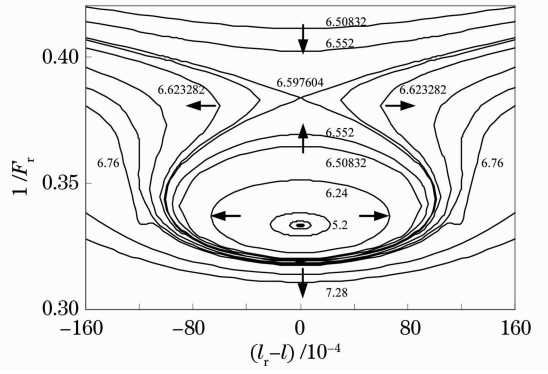


图2 光频实部和虚部随外腔长度变化  
Fig. 2 Variation of real part and imaginary part of light frequency with external-cavity length

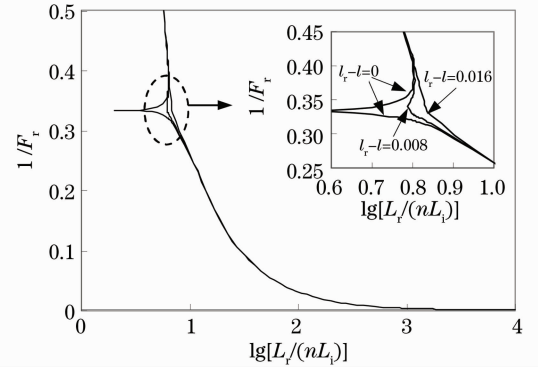


图3 光频虚部随外腔长度变化  
Fig. 3 Variation of light frequency imaginary part with external-cavity length

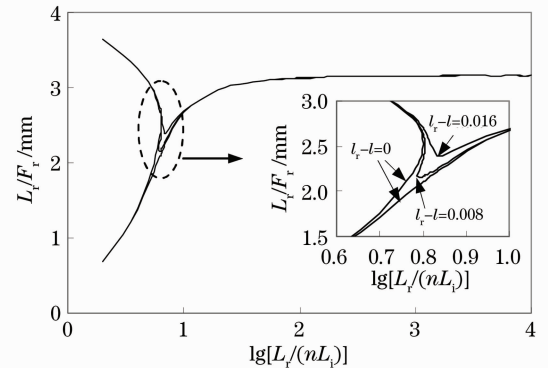


图4 光频虚部与外腔长度乘积随外腔长度变化  
Fig. 4 Variation of product of light frequency imaginary part and external-cavity length with external-cavity length

3.1616 mm。(14)式第三项和第四项中自然指数的幂可以分别写为  $-\pi L_r/(2nL_i F_r)$  和  $-\pi L_r/(nL_i F_r)$ ，则在  $L_r \geq 104 \text{ mm}$  时自混合干涉信号的幅度几乎不随外腔长度增加而衰减。

在  $1 \leq \lg[L_r/(nL_i)] \leq 2$  区间， $L_r/F_r$  随  $L_r$  增加，由图4中  $l_r - l = 0$  曲线的的数据计算(14)式第三项

的衰减长度为

$$L_c = \frac{L_{r2} - L_{r1}}{\frac{\pi}{2nL_i} \left[ \left( \frac{L_r}{F_r} \right)_2 - \left( \frac{L_r}{F_r} \right)_1 \right]} \approx 68 \text{ mm.} \quad (23)$$

比上述激光条件下激光单模的相干长度  $2nL_i F = 6.24 \text{ mm}$  大得多。从文献[8]中图 3 迈克耳孙干涉区内半峰全宽(在此理解为多模相干长度)  $0.22 \text{ mm}$ , 估计多模线宽为  $1362 \text{ GHz}$ , 而内腔光学长度  $1.0 \text{ mm}$ , 相应模式间隔约  $150 \text{ GHz}$ , 则文献[8]用的多模激光器的线宽范围内包含 9 个模式, 以文献[8]图 3 中 19 个迈克耳孙干涉区分布范围的半峰全宽为  $6.15 \text{ mm}$ , 估计单模线宽约  $48.7 \text{ GHz}$ , 所用激光器谐振腔的精细度约为 3, 与计算本文图 4 用的精细度一致。由文献[8]中图 4 自混合干涉信号随外腔长度衰减, 按  $\exp(-L_r/L_c)$  规律拟合得到的衰减长度约  $78 \text{ mm}$ , 两个值比较一致。

在  $L_r$  大致小于  $6.76 \text{ mm}$  这一临界值时, 光频虚部随外腔长度的变化存在分叉, 有多个解存在, 见图 3 和图 4。在  $l_r - l = 0$ , 光频虚部随外腔长度的变化有 3 支, 随外腔长度增加, 其中靠得近的两支, 一支是光频虚部增加, 一支是光频虚部减小; 而分得比较开的另一支, 随外腔长度增加光频虚部减小。将这 3 支的光频虚部分别代入(14)式, 就同时存在 3 支自混合干涉信号, 自混合干涉信号出现复杂的状态。当外腔长度振荡时, 图 2 中椭圆的大小也在振荡, 抛物线也在上下振荡, 这引起椭圆的上半和下半两支自混合干涉信号的幅度振荡, 且两支的振荡趋势相反; 抛物线支的自混合干涉信号因光频虚部相对较大, 信号幅度相对较小, 对复杂状态的贡献较小。

### 5.2 光频虚部随反馈系数和激光线宽变化

求解(22)式还可以得到光频虚部的变化  $1/(2F_r) - 1/(2F)$  与反馈系数和激光单模线宽的关系。分别画出(22)式左边和右边的函数曲线, 可以看到随反馈系数增大和激光单模线宽减小, 图 2 的变化趋势。取  $nL_i = 1.04 \text{ mm}$ ,  $J = 15.2 \text{ mA}$ ,  $P \approx 1.25555$ ,  $l_r - l = 0$ ,  $F = 3$ ,  $C = 9.12 \times 10^{-5}$ , 图 5 为(22)式右边的函数曲线随外腔长度的变化, 图中数字为外腔长度与内腔光学长度之比。随外腔长度增加(22)式右边的函数在图中向左移动, 两个函数曲线先有 3 个交点, 再到临界的 2 个交点, 即图 2 中椭圆解和抛物线解交汇, 再增大外腔长度变为只有 1 个交点。在一定的外腔长度时, 在范围  $(-0.016, 0.016)$  内, 交点随  $l_r - l$  变化的曲线如图 2 所示。

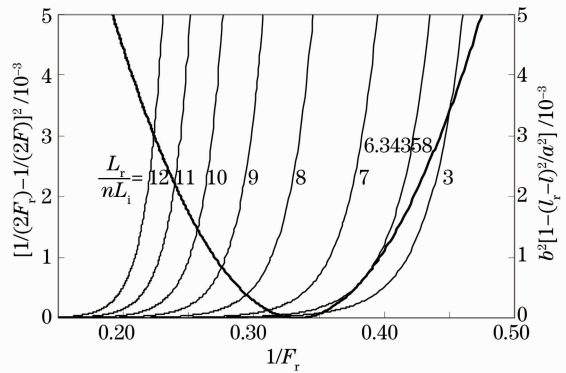


图 5 (22)式的解随外腔长度变化

Fig. 5 Variation of solution of Eq. (22) with external-cavity length

图 6 为  $L_r = 6.597604 \text{ mm}$ , 即  $L_r/(nL_i) = 6.34385$ , (22)式右边的函数曲线随反馈系数的变化, 随反馈系数的增加, (22)式右边的函数在图中向左移动, 图中从右往左反馈系数依次为  $9.12 \times 10^{-5}$ ,  $3 \times 10^{-4}$ ,  $6 \times 10^{-4}$ ,  $9 \times 10^{-4}$ ,  $1.2 \times 10^{-3}$ ,  $1.5 \times 10^{-3}$ ,  $1.8 \times 10^{-3}$ ,  $2.1 \times 10^{-3}$ , 随着反馈系数增加, 交点左移, 即方程的解  $1/F_r$  减小, 且随反馈系数增加, 方程的解  $1/F_r$  衰减变缓, 这与随外腔长度增加的情况相似。对比图 5 和图 6, 反馈系数增大后, 要减小外腔长度, (22)式左边和右边的函数曲线才会出现临界的 2 个交点, 即图 2 中椭圆解和抛物线解交汇的情况, 也就是说图 2 中椭圆解在反馈系数增大后, 出现在外腔长度更小的区域里, 则实验上要观察到光频虚部多解时的自混合干涉现象, 外腔反馈越强, 要求外腔长度越短, 甚至处在激光二极管内腔前端面与聚光镜之间而不易观察到。

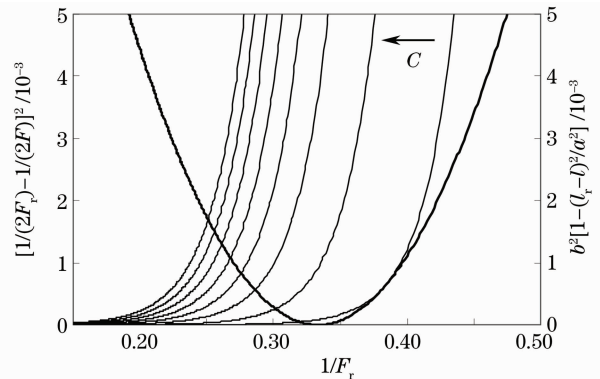


图 6 (22)式的解随外腔反馈系数的变化

Fig. 6 Variation of solution of Eq. (22) with external-cavity feedback coefficient

图 7 为  $C = 9.12 \times 10^{-5}$ , (22)式左边和右边的函数曲线随精细度的变化。图中从右往左 4 组曲线对应的精细度和外腔长度分别是 3、 $6.597604$ 、4、

8.593520, 5.10.50400, 6.12.37600 mm。(22)式左边和右边的函数曲线出现临界的2个交点, 每组曲线左侧交点外侧的大部分曲线图中未画出, 以避免图中出现多组不相关曲线交叉。随精细度的增加, 即激光单模线宽减小, (22)式左边的函数在图中向左移动, (22)式左边和右边的函数曲线要出现临界的2个交点, 即图2中椭圆解和抛物线解交汇的情况, 外腔长度要随之增大, 这与反馈系数增大的情况相反, 这说明激光单模线宽越小, 图2中椭圆解可出现在外腔长度更大的区域, 有可能超出激光二极管内腔前端面与聚光镜之间, 甚至到更大的范围, 这样在实验上会观察到光频的虚部和实部均在随外腔长度变化而振荡的情况, (14)式描述的信号就不再是简单的类似传统双光束干涉的信号。因此, 实际应用中激光的单模线宽不是太小, 更有利于在比较宽的外腔长度范围内, 观察到相对规则的类似传统双光束干涉的信号, 以便于信号的处理分析。反馈系数和精细度对图2中曲线的影响是相反的, 对于单模线宽小的激光, 增大外腔反馈强度有利于减小出现光频的虚部和实部均在随外腔长度变化而振荡的临界外腔长度。

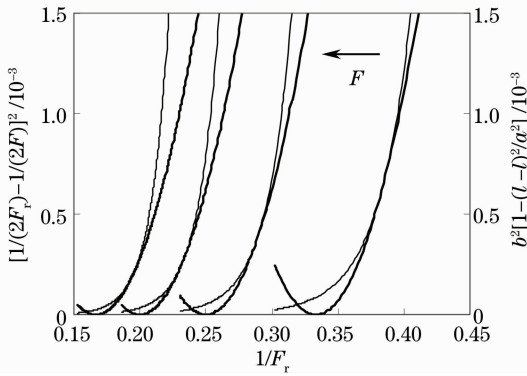


图7 (22)式的解随单模线宽变化

Fig. 7 Variation of solution of Eq. (22) with single-mode line width of laser

### 5.3 光频实部与外腔长度的函数关系

分析图5和图7, 激光单模线宽越小, 图4中  $L_r/F_r$  的值越小, 而且当  $L_r$  足够大时(22)式的抛物线解  $1/F_r$  小于  $1/F$ , 即  $\nu'' \rightarrow 0$  比  $\Delta\nu_M \rightarrow 0$  快, 则在接近理想激光的情况下, 激光线宽  $\Delta\nu_M$  很小,  $\nu''$  已为0, 代入(20)式得到

$$\nu' \approx \nu_0 + \frac{c}{4\pi n L_i} C \sin\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right), \quad (24)$$

该式为  $C \ll 1$  时, 以往文献[8~16]讨论的光频的超越方程, 其只适合于激光单模线宽很小的情况。对于理想激光的情况, 前面分析(10)式中的  $A_0$ 、 $A_1$  和

$A_2$  得到外腔反馈对激光的光强没有影响, 越接近理想激光的情况,  $A_1$  和  $A_2$  则越小, 光强变化形成的自混合干涉现象就越弱。而(24)式则表明接近理想激光的情况下, 光频依然随外腔反馈变化。对于无外腔反馈时单模线宽小的激光, 光频变化形成的自混合干涉信号更容易观察到。实验上也观察到随激光二极管工作电流增加, 光强变化形成的自混合干涉信号减小, 而光频变化形成的自混合干涉信号增大<sup>[16]</sup>。

对于计算图4的激光条件, 当  $2 \leq \lg[L_r/(nL_i)] \leq 4$  时,  $3.1258 \text{ mm} \leq L_r/F_r \leq 3.1616 \text{ mm}$ , 取其平均值  $3.143 \text{ mm}$ , 取  $P \approx 1.26$ , 由(20)式得到

$$\nu' \approx \nu_0 + 1.5 \times 10^4 \frac{c}{4\pi n L_i} C \sin\left(\frac{4\pi L_r \nu'}{c}\right), \quad (25)$$

与(24)式相比, (25)式等效于外腔反馈强度提高约  $1.5 \times 10^4$  倍, 这样在极弱的外腔反馈下都会形成外腔模式, 或光频随外腔长度振荡的幅度增大<sup>[15,16]</sup>。这与以往文献[8~16]按类似(24)式讨论的弱反馈或强反馈条件有很大的区别。

## 6 结 论

本文用复合谐振腔模型理论上分析了激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增加而衰减缓慢于传统的双光束干涉随光程差增加而衰减的原因。由于外腔反馈, 光频的虚部不再仅仅是激光的线宽(内腔相位差), 还与内腔前端面复反射比的辐角(外腔相位差)有关, 两个相位差相互抵消, 减小激光二极管自混合干涉时光频的虚部, 因而激光二极管自混合干涉信号随外腔长度增加而衰减要缓慢得多。外腔反馈并非总是减小光频的虚部, 还跟激光单模线宽、外腔长度和外腔反馈强度有关, 在一定的激光单模线宽下, 外腔反馈强度较小, 外腔长度小到一个临界值时, 外腔反馈会使光频虚部增大, 而且光频虚部随外腔长度微小变化而振荡, 则激光二极管自混合干涉信号的指数衰减因子也在随外腔长度微小变化而振荡, 激光二极管自混合干涉信号变得复杂。外腔反馈强度越大, 这一外腔长度的临界值则越小, 与之相反激光单模线宽越小, 这一外腔长度的临界值则越大。激光单模线宽小, 则会在较大的外腔长度范围出现复杂的激光二极管自混合干涉信号, 而且激光二极管自混合干涉信号小。要观察到类似传统双光束干涉的激光二极管自混合干涉信号, 或者通过外腔反馈减小激光单模线宽, 应当选择较长的外

腔长度和较强的外腔反馈。

## 参 考 文 献

- 1 G. Giuliani, S. Bozzi-Pietra, S. Donati. Self-mixing laser diode vibrometer [J]. *Meas. Sci. & Technol.*, 2003, **14**(1): 24~32
- 2 M. Norgia, G. Giuliani, S. Donati. Absolute distance measurement with improved accuracy using laser diode self-mixing interferometry in a closed loop [J]. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2007, **56**(5): 1894~1900
- 3 J. R. Tucker, A. D. Rakic, C. J. O' Brien *et al.*. Effect of multiple transverse modes in self-mixing sensors based on vertical-cavity surface-emitting lasers [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(4): 611~619
- 4 C. Zakian, M. Dickinson. Self-mixing interferometry with a laser diode: experimental considerations for sensing applications [J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2006, **8**(6): 555~568
- 5 D. M. Guo, M. Wang, S. Q. Tan. Self-mixing interferometer based on sinusoidal phase modulating technique [J]. *Opt. Express*, 2005, **13**(5): 1537~1543
- 6 Shaoqing Wang, Xiangzhao Wang. Resonant characteristics of microcantilever by using self-mixing interferometer based on phase reconstruction method[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2010, **8**(2): 177~180
- 7 Hu Xianfeng. External cavity modulation of laser self-mixing interference by light source vibration[J]. *J. Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2011, **43**(4): 143~148  
胡险峰. 光源振动实现激光自混合干涉外腔调制[J]. *四川大学学报(工程科学版)*, 2011, **43**(4): 143~148
- 8 W. M. Wang, W. J. O. Boyle, K. T. V. Grattan *et al.*. Self-mixing interference in a diode laser: experimental observations and theoretical analysis [J]. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(9): 1551~1558
- 9 L. Liang, H. Q. Gui, J. P. Xie *et al.*. Effect of external cavity length on self-mixing signals in a multi-longitudinal-mode Fabry-Perot laser diode [J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(4): 568~571
- 10 Hu Xianfeng. Analysis and observation on self-mixing interference of multi-longitudinal mode laser diode [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 433~439  
胡险峰. 多纵模激光二极管自混合干涉的观察和分析[J]. *光学学报*, 2010, **30**(2): 433~439
- 11 W. M. Wang, K. T. V. Grattan, A. W. Palmer *et al.*. Self-mixing interference inside a single-mode diode laser for optical sensing applications[J]. *J. Lightwave Technol.*, 1994, **12**(9): 1577~1587
- 12 P. J. Groot, G. M. Gallatin, S. H. Macomber. Ranging and velocimetry signal generation in a backscatter-modulated laser diode[J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(21): 4475~4480
- 13 Yanguang Yu, Huiying Ye, Jianquan Yao. Analysis for the self-mixing interference effects in a laser diode at high optical feedback levels[J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2003, **5**(2): 117~122
- 14 Hu Xianfeng. Calculation analysis and experiment observation on laser diode self-mixing interference [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(6): 1111~1116  
胡险峰. 激光二极管自混合干涉的计算分析和实验观察[J]. *光学学报*, 2008, **28**(6): 1111~1116
- 15 Hu Xianfeng. Effect of external feedback light on state density of photon in internal cavity[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(9): 2684~2689  
胡险峰. 外腔反馈光对内腔中光子态密度的影响[J]. *光学学报*, 2010, **30**(9): 2684~2689
- 16 Hu Xianfeng. Self-mixing interference in laser diode and frequency shift of laser[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(12): 3501~3507  
胡险峰. 激光二极管自混合干涉和激光的频移[J]. *光学学报*, 2010, **30**(12): 3501~3507
- 17 Zhou Bingkun, Gao Yizhi, Chen Tirong *et al.*. *Laser Principle* [M]. 5th ed., Beijing: National Defence Industry Press, 2004. 328~335  
周炳琨, 高以智, 陈倜嵘等. *激光原理*[M]. 第5版, 北京: 国防工业出版社, 2004. 328~335

栏目编辑: 宋梅梅