

# 运动强度相关耦合 J-C 模型中的熵交换和纠缠

胡要花

(洛阳师范学院物理与电子信息学院, 河南 洛阳 471022)

**摘要** 考虑一个运动的二能级原子与单模热光场强度相关耦合, 采用量子约化熵研究原子和场的约化熵变化规律、原子与场的熵交换, 用共生纠缠度研究原子与场的纠缠。并借助于数值计算方法, 详细分析了在强度相关耦合 J-C 模型中, 原子初态、热光场的平均光子数以及场模结构参数对熵交换和纠缠的影响。结果表明原子与光场的熵交换和纠缠均周期性地演化。选择适当的原子初态, 可以使得原子的约化熵和光场的约化熵完全交换, 这意味着原子与光场反相关。此外, 场模结构参数增加导致熵交换的幅度减小, 周期缩短。原子与热光场的纠缠随平均光子数的增加而减弱。

**关键词** 量子光学; 熵交换; 约化熵; 纠缠; 运动原子; 强度相关耦合

**中图分类号** O431 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0527002

## Entropy Exchange and Entanglement in Intensity-Dependent Coupling J-C Model with Atomic Motion

Hu Yaohua

(Physics and Electronic Information College, Luoyang Normal College, Luoyang, Henan 471022, China)

**Abstract** Considering a moving two-level atom coupling with a single-mode thermal light field through intensity-dependence, reduced entropy change and entropy exchange between the atom and the field is studied by using quantum reduced entropy, entanglement is measured by using concurrence, the effect of initial atomic state, the mean photon number of thermal field and the field-mode structural parameter on entropy exchange and entanglement are investigated. The results show that reduced entropy change and entanglement exhibit periodic evolution. When initial parameters are suitable, the complete exchange between the atomic and field reduced entropy occurs, which means there is a form of anti-correlated behavior between field and atom. In addition, the increase of field-mode structural parameter weakens reduced entropy exchange, and shortens period of entropy exchange. Entanglement between atom and field decreases as the transition photon number increases.

**Key words** quantum optics; entropy exchange; reduced entropy; entanglement; moving atom; intensity-dependent coupling

**OCIS codes** 270.5585; 270.2500

## 1 引 言

量子光学中 Jaynes-Cummings (J-C) 模型<sup>[1]</sup> 是描述原子与光场相互作用的经典模型, 但它只考虑原子和光场的耦合程度与光场强度无关的情况。为了反映原子与光场相互作用对光场强度的依赖关系, 1981 年 Buck 等<sup>[2]</sup> 提出了一个强度相关耦合 J-C 模型。该模型中的纠缠转换<sup>[3]</sup>、方差压缩的回复与崩塌现象<sup>[4]</sup> 以及反映光场与原子关联效应的场熵的

演化特性<sup>[5]</sup> 等被广泛研究。特别是文献<sup>[5]</sup> 指出该模型的场熵演化具有严格的周期性, 且原子的相干性并不影响场熵演化的周期性。但这些研究大多数考虑的原子和场均处于纯态, 而未考虑原子和场处于混合态的情形。众所周知, 对于初始处于纯态的双子系量子系统, Phoenix 等<sup>[6]</sup> 已经证明: 两子系统的量子约化熵在随时间演化过程中始终相等。然而, 如果子系统初始处于混合态, 两子系统的约化熵

**收稿日期**: 2011-10-21; **收到修改稿日期**: 2012-01-08

**基金项目**: 国家自然科学基金(10905028)和河南省科技计划(102300410050)资助课题。

**作者简介**: 胡要花(1979—), 女, 博士, 讲师, 主要从事量子光学和量子信息处理等方面的研究。

E-mail: huyaohua1@sina.com

仍然相等吗? 如果不相等, 两者有什么关系呢? 此外, 纠缠是量子信息处理中不可或缺的物理资源<sup>[7~11]</sup>。纯态双子系统的纠缠可以用约化熵度量, 那么混态双子系统的纠缠又该如何计算, 演化规律会如何呢? 近年来, 这些问题吸引了很多研究者的关注<sup>[12~15]</sup>。Boukobza 等<sup>[12]</sup>发现混合态 J-C 模型中, 原子与场的约化熵不再始终相等, 而且在一定的条件下原子的约化熵与光场的约化熵完全交换, 出现反关联现象。其后, 文献<sup>[13, 14]</sup>研究了一个超导电荷量子比特与单模热光场相互作用系统中的熵交换与纠缠。克尔非线性介质对混态 J-C 模型中的熵交换和纠缠的影响也已见报道<sup>[15]</sup>, 其结果表明克尔介质对熵交换与纠缠的强弱程度和周期有很大影响。那么, 在强度相关耦合 J-C 模型中, 初始处于混态的原子和光场约化熵有什么关系呢? 熵与纠缠又有什么联系呢? 许多研究工作表明原子的运动在原子与光场相互作用过程中具有重要作用<sup>[16]</sup>, 那么原子的运动对混合态 J-C 模型中的熵和纠缠有着怎样的影响呢? 带着这些疑问, 研究一个运动二能级原子与单模热光场强度相关耦合过程中的量子熵交换和纠缠, 考察原子初态、热场平均光子数以及场模结构参数对原子和光场的约化熵变、熵交换和纠缠的影响。结果发现选择适当的原子初态, 可以使得原子的约化熵和光场的约化熵完全交换, 即原子与光场反相关。此外, 原子运动的场模结构参数增加导

致熵交换的幅度减小, 周期缩短。

## 2 系统模型与密度矩阵

在旋波近似下, 强度相关耦合 J-C 模型的哈密顿量为(取  $\hbar=0$ )<sup>[2]</sup>

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^+ a + g(\sqrt{a^+} a a^+ S_- + S_+ a \sqrt{a^+} a), \quad (1)$$

式中  $\omega_0$  为原子的跃迁频率,  $S_z, S_{\pm}$  为原子的反转和跃迁算符。 $a^+$  和  $a$  分别表示频率为  $\omega$  的光场的产生和湮没算符,  $g$  为光场与原子相互作用的耦合常数。

考虑原子的运动, (1)式改写为

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^+ a + gf(z)(\sqrt{a^+} a a^+ S_- + S_+ a \sqrt{a^+} a), \quad (2)$$

式中  $f(z)$  为场模的形式函数。假定在原子寿命时间内不发生碰撞, 并取原子与场发生作用的时间和位置为计时起点, 因此原子运动可以具体化为:  $f(z) \rightarrow f(vt)$ , 式中  $v$  为原子运动的速度。为了具体讨论方便, 定义 TEM<sub>mp</sub> 模<sup>[17]</sup>

$$f(vt) = \sin \frac{p\pi vt}{L}, \quad (3)$$

式中  $p$  表示长度为  $L$  的腔中模场的半波数。为了简单起见, 考虑运动二能级原子与场共振作用(即  $\omega_0 = \omega$ )。在相互作用表象中, 由(2)式的哈密顿量产生的时间演化算符可以表示为

$$U_I(t) = \exp(-iH_I t) = \begin{pmatrix} \cos[(a^+ a + 1)g\theta(t)] & -i \frac{\sin[(a^+ a + 1)g\theta(t)]}{a^+ a + 1} a \sqrt{a^+} a \\ -i \frac{\sin[a^+ a g\theta(t)]}{a^+ a} \sqrt{a^+} a a^+ & \cos[a^+ a g\theta(t)] \end{pmatrix}, \quad (4)$$

式中  $\theta(t) = \int_0^t f(vt') dt' = [1 - \cos(\beta t)]/\beta, \beta = p\pi v/L$ 。选择原子的运动速度  $v = gL/\pi, \theta(t)$  可以表示为

$$\theta(t) = \frac{1}{pg} [1 - \cos(pgt)]. \quad (5)$$

假设初始时刻光场处于单模热态

$$\rho_f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n|, \quad P_n = \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}}, \quad (6)$$

式中  $m = [\exp(\omega/\kappa_B T) - 1]^{-1}$  表示热平衡温度为  $T$  的腔场的平均光子数,  $\kappa_B$  为波尔兹曼常数。原子初始处于统计混合态

$$\rho_a(0) = C_g |g\rangle\langle g| + C_e |e\rangle\langle e|, \quad 0 \leq C_g \leq 1 \quad (7)$$

式中  $C_g + C_e = 1, C_g = 1(C_e = 0)$  表示原子初始处于基态(激发态),  $(0 < C_g < 1)$  表示原子初始处于混合态,  $C_g = 0.5$  时原子处于最大混态。由初始条件和演化算符(4)式, 得到任意时刻原子-光场全系统的密度矩阵为

$$\rho_{fa}(t) = U_I(t) [\rho_f(0) \otimes \rho_a(0)] U_I^\dagger(t) = C_g \sum_n P_n \rho_g(t) + C_e \sum_n P_n \rho_e(t), \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned}\rho_g(t) &= \cos^2[ng\theta(t)] |g, n\rangle\langle g, n| + \text{isin}[ng\theta(t)][ng\theta(t)] |g, n\rangle\langle e, n-1| - \\ &\quad \text{isin}[ng\theta(t)][ng\theta(t)] |e, n-1\rangle\langle g, n| + \sin^2[ng\theta(t)] |e, n-1\rangle\langle e, n-1|, \\ \rho_e(t) &= \cos^2[(n+1)g\theta(t)] |e, n\rangle\langle e, n| + \text{isin}[(n+1)g\theta(t)][(n+1)g\theta(t)] |e, n\rangle\langle g, n+1| - \\ &\quad \text{isin}[ng\theta(t)][(n+1)g\theta(t)] |g, n+1\rangle\langle e, n| + \sin^2[(n+1)g\theta(t)] |g, n+1\rangle\langle g, n+1|.\end{aligned}$$

### 3 运动原子与热光场的熵交换和纠缠量度

为了计算子系统的约化熵,先求约化密度矩阵,然后将其对角化,求得本征值。(8)式对原子变量(场变量)求迹,便可得到场(原子)的约化密度矩阵,分别为

$$\begin{aligned}\rho_f(t) &= \text{Tr}_e \rho_{fa}(t) = \lambda_f(t) |n\rangle\langle n|, \\ \rho_a(t) &= \text{Tr}_f \rho_{fa}(t) = \lambda_g(t) |g\rangle\langle g| + \lambda_e(t) |e\rangle\langle e|,\end{aligned}\quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned}\lambda_f(t) &= C_e \sum_n P_{n-1} \sin^2[ng\theta(t)] + C_g \sum_n P_n \cos^2[ng\theta(t)] + \\ &\quad C_e \sum_n P_n \cos^2[(n+1)g\theta(t)] + C_g \sum_n P_{n+1} \sin^2[(n+1)g\theta(t)], \\ \lambda_g(t) &= C_e \sum_n P_{n-1} \sin^2[ng\theta(t)] + C_g \sum_n P_n \cos^2[ng\theta(t)], \\ \lambda_e(t) &= C_e \sum_n P_n \cos^2[(n+1)g\theta(t)] + C_g \sum_n P_{n+1} \sin^2[(n+1)g\theta(t)].\end{aligned}$$

场和二能级原子的量子约化熵可以通过它们各自的约化密度矩阵来定义

$$S_i = -\text{Tr}_i(\rho_i \ln \rho_i), \quad (i = f, a) \quad (10)$$

利用(9)式确定的约化密度矩阵的本征值可以将场与原子的量子约化熵分别表示为

$$\begin{aligned}S_f &= -\lambda_f \ln \lambda_f, \\ S_a &= -(\lambda_g \ln \lambda_g + \lambda_e \ln \lambda_e).\end{aligned}$$

利用数值计算方法,可以直观地展示运动强度相关耦合原子与热光场相互作用过程中,光场的约化熵增加量(简称熵变) $\Delta S_f(t) = S_f(t) - S_f(0)$ 、原子熵变  $\Delta S_a(t) = S_a(t) - S_a(0)$  以及两者之和  $\Delta S(t) = \Delta S_f(t) + \Delta S_a(t)$  随时间的演化规律。

密度矩阵(8)所描述的系统是一个  $2 \times \infty$  混合系统,按照文献[18]介绍的方法求其纠缠下限。将(8)式投影到基矢为  $\{|g, n\rangle, |e, n\rangle, |g, n+1\rangle, |e, n+1\rangle\}$  的  $2 \times 2$  子空间,得到类似于两量子比特的密度算符

$$\rho_n(t) = \frac{1}{T_n} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_n & D_n & 0 \\ 0 & D_n^* & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

式中  $T_n = A_{n-1} + B_n + A_n + B_{n+1}$ , 矩阵元

$$\begin{aligned}A_n &= C_e P_n \sin^2[(n+1)g\theta(t)] + \\ &\quad C_g P_{n+1} \cos^2[(n+1)g\theta(t)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n &= C_e P_n \cos^2[(n+1)g\theta(t)] + \\ &\quad C_g P_{n+1} \sin^2[(n+1)g\theta(t)], \\ D_n &= i(C_e P_n - C_g P_{n+1}) \times \\ &\quad \sin[(n+1)g\theta(t)] \cos[(n+1)g\theta(t)],\end{aligned}$$

$\rho_n(t)$  的共生纠缠度为

$$C_n = \frac{2}{T_n} \max\{0, |D_n| - \sqrt{A_{n-1} B_{n+1}}\},$$

由此得到由密度矩阵(8)式所描述的运动原子与热光场耦合系统的纠缠下限为

$$C = \frac{\sum_n T_n C_n}{\sum_n T_n}, \quad (12)$$

如果纠缠下限的值为正,系统必定处于纠缠状态。

### 4 数值计算与结果讨论

基于3节的解析结果,借助于数值计算的方法,展示并详细分析在强度相关耦合 J-C 模型中,原子初态、光场的平均光子数以及原子运动时场模结构参数对熵交换和纠缠的影响。

原子初态、原子运动与否对熵交换的影响如图1所示,其中实线代表光场熵变  $\Delta S_f(t)$ 、虚线代表原子熵变  $\Delta S_a(t)$ 、点虚线代表两种熵变之和  $\Delta S(t) = \Delta S_f(t) + \Delta S_a(t)$ 。而且此时平均光子数取值为 0.1,光场接近于真空态。从图1(a)可以看出,

当原子初始处于激发态( $C_e = 1$ )时,光场熵变与原子熵变演化规律类似,两者同时增加或者同时减少。而当  $C_e$  值减小,演化规律不再类似,甚至当  $C_e$  减小到 0.1 时,如图 1(b) 所示,  $\Delta S_f(t)$  与  $\Delta S_a(t)$  演化规律完全相反:原子约化熵增加时,光场约化熵减少,熵变之和  $\Delta S_f(t) + \Delta S_a(t)$  为零,即原子的熵和光场的熵完全交换了;称之为熵交换,此时原子与光场反相关。另外,发现图 1 展示的演化规律均是周期

性的,从以前的研究中,原子运动可以导致量子熵和纠缠等很多量子现象周期性地演化。而图 1(c) 展示的是不考虑原子运动时的熵交换现象,可以看出此时虽然没有考虑原子运动,但演化曲线仍然是周期性的,而文献[12]展示的熵交换并不具备周期性,这是因为这里考虑的原子与场强度相关耦合的缘故。

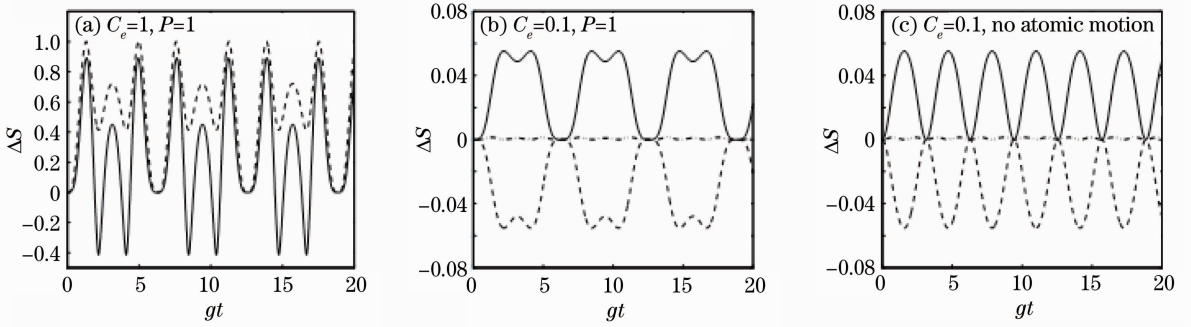


图 1  $m=0.1$  时原子初态对熵变的影响。实线代表光场熵变,虚线代表原子熵变,点划线代表两者之和,下同

Fig. 1 Effect of the initial atomic state on reduced entropy change  $\Delta S$  (solid line denotes entropy change of light field, dashed line denotes entropy change of atoms, dot-and-dash line denotes the sum of atomic and field reduced entropy changes, the same below with  $m=0.1$ )

图 2 展示了平均光子数对熵交换的影响,此时场模结构参数  $p$  取值为 1。由图 2 并结合图 1(b) 可以看出光场的初始平均光子数变化时,要想使得原子与光场处于反关联状态(即熵交换),原子初态也得变化。由图 1(b) 可以看出,在平均光子数  $m$  取值为 0.1、原子初态参数  $C_e = 0.1$  时发生熵交换。而

当平均光子数  $m$  的值增大到 0.4 时,  $C_e = 0.2$  处是最佳熵交换状态,如图 2(a) 所示;又当  $m = 1$  时,原子初态参数  $C_e = 0.3$  处是最佳熵交换状态,如图 2(b) 所示。而当平均光子数继续增大,将很难发生原子的约化熵与光场熵完全交换的现象(这一结果未在文中图示)。

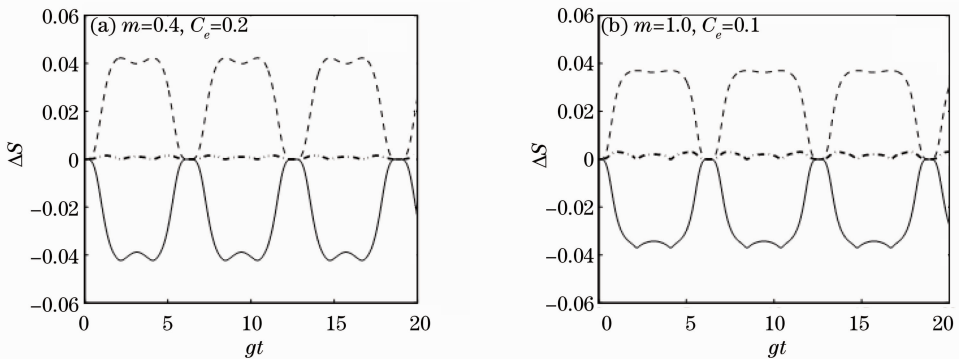


图 2  $p=1$  时光场平均光子数  $m$  对熵变的影响

Fig. 2 Effect of the mean photon number  $m$  on reduced entropy change  $\Delta S$  with  $p=1$

考虑原子运动并设其运动速度  $v = gL/\pi$  时,场模结构参数对熵交换的影响如图 3 所示,此时平均光子数  $m$  取值为 1、原子初态参数  $C_e = 0.3$ 。从图中可以看出场模结构参数对约化熵增加量的幅值和周期都有影响,  $p$  增加,熵变幅度减小,周期缩短。结合

第 3 节的解析结果分析,演化周期为  $\frac{2n\pi}{pg}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )。

根据(12)式,展示出运动二能级原子与单模热光场强度相关耦合时的纠缠演化如图 4 所示。可以

看出,与热光场的相互作用使得初始并不纠缠的原子与光场,发生了纠缠,并且纠缠周期性的演化。对照图 4 和图 1、2、3,可以看出在原子和光场的熵变均为零处( $gt=2n\pi/p$ ),原子与光场的纠缠也为零。

随着平均光子数的增加,运动原子与光场的纠缠减弱。此外,还发现场模结构参数  $p$  仅仅影响纠缠演化的周期,而对原子与场纠缠的强弱程度影响极小。

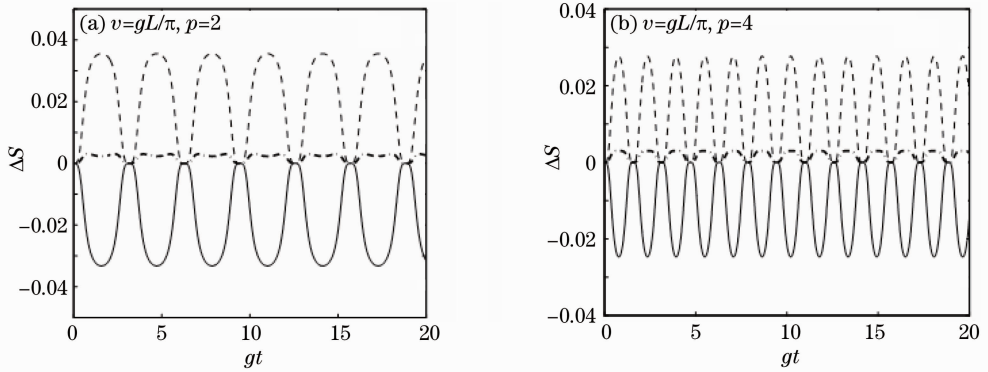


图 3  $\bar{n}=1, C_e=0.3$  时原子运动和场模结构参数对熵变的影响

Fig. 3 Effect of the atomic motion and field-mode structure parameter on reduced entropy change  $\Delta S$  with  $\bar{n}=1$  and  $C_e=0.3$

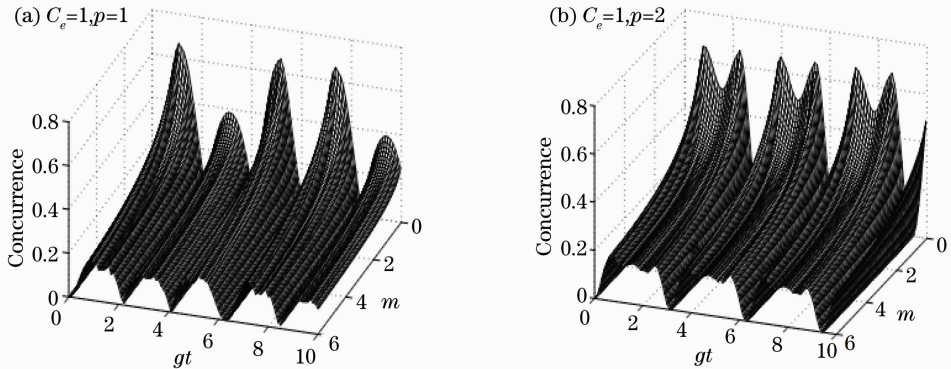


图 4 运动原子与热光场的纠缠演化

Fig. 4 Entanglement evolution between the moving atom and the thermal light field

## 5 结 论

考虑一个运动二能级原子与单模热光场强度相关耦合,采用量子约化熵研究原子和场的约化熵变化规律、原子与场的熵交换,用共生纠缠度研究原子与场的纠缠。并借助于数值计算方法,详细分析了在强度相关耦合 J-C 模型中,原子初态、光场的平均光子数以及场模结构参数对熵交换和纠缠的影响。结果表明原子与光场的熵变和量子纠缠演化具有严格的周期性。当原子初始处于激发态时,光场熵变与原子熵变演化规律类似,两者同时增加或者同时减少。但是选择适当的原子初态,可以使得原子的约化熵和光场的约化熵完全交换,即原子与光场反相关。平均光子数的增大导致原子与光场熵交换和纠缠的幅度均减小,并且当平均光子数较大时,原子的约化熵与光场熵很难完全交换。此外,场模结构参数增加,熵交换的幅度减小,周期缩短。原子与热

光场的纠缠周期性地演化,且随着平均光子数的增加而减弱。

## 参 考 文 献

- 1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. Comparison of quantum and semi-classical radiation theories with application to the beam [J]. *Proc IEEE*, 1963, **51**(3): 89
- 2 B. Buck, C. V. Sukumar. Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival [J]. *Phys. Lett. A*, 1981, **81**(2-3): 132~135
- 3 H. N. Xiong, H. Guo. A theoretical scheme for entanglement transfer under intensity-dependent couplings [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2007, **24**(7): 1805~1808
- 4 A. A. Faisal, El-Orany. Revival-collapse phenomenon in the quadrature squeezing of the multiphoton intensity-dependent Jaynes-Cummings model [J]. *J. Mod. Opt.*, 2006, **53**(12): 1699~1714
- 5 Fang Maofa. Evolution of field entropy in the intensity-dependent coupling J-C model [J]. *Acta Optica Sinica*, 1995, **15**(3): 296~300  
方卯发. 强度相关耦合 J-C 模型场熵的演化 [J]. *光学学报*, 1995, **15**(3): 296~300

- 6 S. J. D. Phoenix, P. L. Knight. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance [J]. *Am. Phys. (N.Y.)*, 1988, **186**(2): 381~407
- 7 M. Nielsen, I. Chuang. Quantum Information and Computation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 8 Chen Jing, Guo Yanqing, Shi Xuguang. Study on preparation and characteristics of quantum entanglement in double wells using a spin-1/2 approximation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(4): 0427001  
陈菁, 郭彦青, 史旭光. 自旋-1/2近似下双势阱中纠缠制备和特性研究[J]. *光学学报*, 2011, **31**(4): 0427001
- 9 Sun Chao, Zhang Yingjie, Meng Xiangshui *et al.*. A Study on the pairwise concurrence entanglement in the multipartite open system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(12): 3604~3609  
孙超, 张英杰, 孟祥水等. 开放多体系统中共生纠缠的研究[J]. *光学学报*, 2010, **30**(12): 3604~3609
- 10 Lu Daoming. Influences of selective atomic measurement on entanglement properties in a system of atoms interacting with coupled cavities [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(7): 0727002  
卢道明. 原子测量对耦合腔系统中纠缠特性的影响[J]. *光学学报*, 2011, **31**(7): 0727002
- 11 Han Mei, Zhang Yingjie, Xia Yunjie. Entanglement characteristics of two entangled atoms in classical driven Tavis-Cummings model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(4): 0427002  
韩美, 张英杰, 夏云杰. 经典驱动 Tavis-Cummings 模型中原子纠缠特性的研究[J]. *光学学报*, 2011, **31**(4): 0427002
- 12 E. Boukobza, D. J. Tannor. Entropy exchange and entanglement in the Jaynes-Cummings model [J]. *Phys. Rev. A*, 2005, **71**(6): 063821
- 13 J. Zhang, B. Shao, J. Zou. Entropy exchange and entanglement in superconducting charge qubit inside a resonant cavity with intrinsic decoherence [J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2008, **49**(6): 1463~1467
- 14 K. Hünkar. Entropy correlations and entanglement of a superconducting charge qubit in a resonant cavity in the presence of noise [J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2011, **56**(1): 139~143
- 15 Y. Q. Zhang, L. Tan, Z. H. Zhu *et al.*. Partial entropy change and entanglement in the mixed state for a Jaynes-Cummings model with Kerr medium [J]. *Chin. Phys. B*, 2010, **19**(2): 024210
- 16 Liao Xiangping, Fang Maofa. Entropy squeezing for a two-level atom in motion interacting with a quantized field [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(7): 983~988  
廖湘萍, 方卯发. 与量子光场相互作用的运动原子的熵压缩[J]. *光学学报*, 2004, **24**(7): 983~988
- 17 R. R. Schlicher. Jaynes-Cummings model with atomic motion [J]. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(2): 97~102
- 18 S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P. L. Knight *et al.*. Subsystem purity as an enforcer of entanglement [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(5): 050401

栏目编辑: 李文喆