

# 影响空间变化偏振矢量光束强聚焦后焦斑移位的因素

冷 梅 杨艳芳 何 英 刘海港 常 强 李春芳

(上海大学理学院物理系, 上海 200444)

**摘要** 利用衍射积分公式数值模拟了不同阶次的空间变化偏振矢量贝塞尔-高斯(BG)光束经过强聚焦系统后在焦点附近的强度分布。数值结果显示空间变化偏振矢量 BG 光束聚焦后在光束传播轴负方向存在焦斑移位现象,其焦斑移位的大小与光束的模阶次、光束宽度、波长以及局部偏振状态密切相关。矢量光束偏振态的变化依靠液晶相位延迟器(LCVR)的相位延迟角度来控制,由于 LCVR 的相位延迟角度可以在  $0\sim\pi$  之间连续变化,从而改变光束的局部偏振状态,间接实现了对矢量光束焦斑移位大小的实时控制,在光学微操纵领域具有潜在的应用价值。

**关键词** 物理光学;焦斑移位;强聚焦;偏振;衍射

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201232.0526001

## Effect Factors of the Focal Shift in Spatial-Variant Polarized Vector Beams

Leng Mei Yang Yanfang He Ying Liu Haigang Chang Qiang Li Chunfang

(Department of Physics, College of Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract** The intensity distribution of focused spatial-variant polarized Bessel-Gauss vector beams is numerically simulated in the vicinity of the focal plane by using Richards-Wolf vectorial diffraction method. The existence of the focal shift in the negative direction of propagation is proved. The magnitude of the focal shift is closely associated with the order number of beam, beam width, wavelength and local polarization. The polarized state can be changed by adjusting the phase delay angle of the liquid crystal variable retarder, which can be continuously varied from 0 to  $\pi$ . The controllability of the focal shift in real time aroused by the phase delay angle will have great potential applications in optical micro-manipulations.

**Key words** physical optics; focal shift; tight focusing; polarization; diffraction

**OCIS codes** 350.4855; 260.5430; 050.1940

## 1 引 言

焦斑移位现象,是指光束通过光学系统聚焦,其光强最大值点位置不与光学系统的几何焦点重合,而是向着衍射平面的方向发生了移位的现象。对于传统意义上的标量偏振光束,有孔径光阑<sup>[1,2]</sup>和无孔径光阑<sup>[3]</sup>系统的焦斑移位现象已经得到了深入的研究,结果表明系统的有效菲涅耳数是影响光束焦斑移位的重要因素<sup>[4,5]</sup>。近年来,因矢量光束新颖

的场分布<sup>[6]</sup>、传播特性<sup>[7~9]</sup>以及强聚焦后表现出来的独特性质<sup>[10~12]</sup>,对于矢量光束的研究工作受到了广泛的重视,矢量光束的焦斑移位现象也成为了研究矢量光束聚焦性质的一部分。1999年,Greene等<sup>[13]</sup>就对不同阶次的矢量贝塞尔-高斯(BG)光束的焦斑移位现象进行了研究,并分析了影响其焦斑移位的因素。国内的一些课题组也相继利用不同的聚焦系统模型及光束形式,开始了对矢量光束焦斑

**收稿日期:** 2011-10-24; **收到修改稿日期:** 2011-11-22

**基金项目:** 国家自然科学基金(61108010, 60877055)、上海市自然科学基金(11ZR1412300)、上海市重点学科建设项目(S30105)和上海大学科技创新基金资助课题。

**作者简介:** 冷梅(1987—),女,硕士研究生,主要从事矢量光束及光信息传输方面的研究。E-mail: coolm@shu.edu.cn

**导师简介:** 杨艳芳(1973—),女,博士,副教授,主要从事光信息传输和导波光学等方面的研究。

E-mail: yfzhaoyb@yahoo.com.cn(通信联系人)

移位的研究<sup>[14,15]</sup>。然而,目前国内外各研究小组只是对焦斑移位的现象做出了分析,对于焦斑移位大小的可控性鲜有提及。

空间变化偏振矢量光束在光束横截面上的偏振状态是随空间位置的不同在线偏振与椭圆偏振之间变化的,它可以通过在矢量光束光路后加入液晶相位延迟器(LCVR)来产生<sup>[16,17]</sup>。LCVR的相位延迟角度由外接电压控制,可在 $0\sim\pi$ 内连续变化,即通过LCVR可以实现对矢量光束偏振状态的实时改变,它的具体研究分析可参考文献<sup>[16]</sup>。

本文数值模拟了对于不同模阶次的空间变化偏

振矢量BG光束经过强聚焦系统后的强度分布,证实了对于所研究光束聚焦后焦斑移位的存在性,并具体分析了光束的偏振状态、模阶次以及光束宽度等因素对于焦斑移位大小的影响。

## 2 理论模型

选用Richards-Wolf的经典衍射模型<sup>[18,19]</sup>讨论空间变化偏振矢量BG光束经高数值孔径透镜强聚焦后焦点附近的强度分布。在柱坐标系下一般矢量光束聚焦后焦平面附近的电场分布表达式<sup>[10]</sup>为

$$\mathbf{E}^{(s)} = \begin{bmatrix} E_r^{(s)} \\ E_\phi^{(s)} \\ E_z^{(s)} \end{bmatrix} = \frac{ikf}{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos\theta \sin\theta} \exp[ik(z_s \cos\theta + r_s \sin\theta \cos(\phi - \phi_s))] \times \begin{bmatrix} \cos\theta \cos(\phi - \phi_s) E_r \\ \cos(\phi - \phi_s) E_\phi \\ \sin\theta E_r \end{bmatrix} d\theta d\phi, \quad (1)$$

式中 $E_r$ 和 $E_\phi$ 为聚焦前光束的径向分量与方位角方向分量,认为聚焦前光束为近轴光束,不存在纵向分量, $\theta$ 为极角,为相对于 $x$ 轴的方位角。 $r_s, \phi_s, z_s$ 构成了像空间柱坐标系,坐标原点为透镜焦点, $z_s$ 正方向沿光束传播方向。

从(1)式可以看出,当聚焦系统一定时,入射光束的电场分布形式是影响聚焦光束焦平面附近电场分布的主要因素。下面结合聚焦示意图给出空间变化矢量光束电场的表达式,光束聚焦的几何光学示意图如图1所示。认为入射光束波前为一个平面,对于消球差透镜系统,经过透镜后的光束波前可以看成是以像空间焦点为球心的弧面,图1中聚焦系统的光瞳半径为 $b$ ,透镜的焦距为 $f$ ,则透镜的像方孔径角 $\alpha$ 可以表示为 $\alpha = \arcsin(b/f)$ ,且像方孔径角与系统数值孔径 $a$ 的关系为 $\sin\alpha = a/n$ , $n$ 为像空间介质折射率。假设光束的束腰位置恰与系统的入瞳位置重合,用 $\beta_0$ 表示光瞳半径与光束宽度之比,

则 $\beta_0 = b/\omega_0$ ,其中 $\omega_0$ 为束腰半径。对于入瞳截面上距离入射光束中心为 $r$ 的任意一点,在像空间形成的偏折角度表示为 $\theta$ , $\sin\theta = r/f$ 。结合 $\sin\theta, \sin\alpha$ 和 $\beta_0$ 与光学系统的光瞳半径 $b$ 和焦距 $f$ 之间的关系,当聚焦系统入射光束为 $m$ 阶近轴矢量BG光束时,入射光束表达式可以表示为 $\theta$ 和 $\phi$ 的函数<sup>[20]</sup>:

$$\mathbf{E}_0(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} E_{0r} \\ E_{0\phi} \end{bmatrix} = \exp\left[-\beta_0^2 \left(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right)^2\right] \times \begin{bmatrix} \sin m\phi \left[ J_{m-1}\left(2\beta_0 \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) + J_{m+1}\left(2\beta_0 \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) \right] \\ \cos m\phi \left[ J_{m-1}\left(2\beta_0 \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) - J_{m+1}\left(2\beta_0 \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) \right] \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中 $E_{0r}$ 和 $E_{0\phi}$ 分别为光束在极坐标表示下的径向分量与方位角分量, $J_n(x)$ 为第一类贝塞尔函数。

LCVR可以看作是一个相位延迟角度可以通过改变其驱动电压而连续变化的可调波片。设LCVR的快轴沿 $y$ 轴,当光束通过LCVR后,电场的 $x$ 分量会相对于 $y$ 分量产生一个大小为 $\delta$ 的相位延迟角度, $\delta$ 可在 $0\sim\pi$ 内连续变化。极坐标系下,LCVR对光束横截面上电场分布的调制作用表示为

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\delta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0r} \\ E_{0\phi} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_r \\ E_\phi \end{bmatrix}$ 为光束通过LCVR后的光束电场表示形

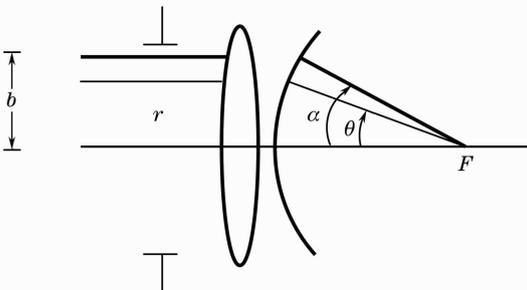


图1 聚焦系统的几何光学模型

Fig.1 Geometrical optics model of focusing system

式。当通过 LCVR 的光束偏振状态为横截面上不同位置的偏振方向为各不相同的线偏振时,调节相位延迟角度  $\delta$  的大小可以使通过 LCVR 后的光束在横截面上呈现出线偏振与椭圆偏振交替出现的偏振状态。 $\delta=0$  时 LCVR 不改变光束的偏振,光束横截面上各点均为线性偏振,当  $\delta=\pi$  时光束各点同样均为线性偏振,只是线偏振的方向发生了变化,相对于在  $\delta=0$  的基础上在光电场的  $y$  分量产生了一个

$\pi$  的相位差。取不同的  $\delta$  值即得到了空间变化偏振矢量光束<sup>[16]</sup>。0 阶空间变化偏振矢量 BG 光束的强聚焦性质已经在文献[17]中进行了重点分析,本文选用由不同阶次的矢量 BG 光束经过 LCVR 后得到的空间变化偏振矢量 BG 光束作为入射光束,研究其强聚焦后的焦斑移位现象以及影响其焦斑移位大小的因素。将(2)式代入(3)式可以得出极坐标下强聚焦系统入射光电场的表达式为

$$\mathbf{E}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} E_r \\ E_\phi \end{bmatrix} = \exp\left[-\beta_0^2 \left(\frac{\sin \theta}{\sin \alpha}\right)^2\right] \times \begin{bmatrix} \sin m\phi \left[ J_{m-1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) + J_{m+1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) \right] + \sin \phi \left[ \exp(i\delta) - 1 \right] \left[ \cos(m-1)\phi J_{m-1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) - \cos(m+1)\phi J_{m+1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) \right] \\ \cos m\phi \left[ J_{m-1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) - J_{m+1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) \right] + \cos \phi \left[ \exp(i\delta) - 1 \right] \left[ \cos(m-1)\phi J_{m-1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) - \cos(m+1)\phi J_{m+1} \left( 2\beta_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) \right] \end{bmatrix}. \quad (4)$$

### 3 空间变化偏振矢量光束的焦斑移位

为了研究光束的模阶次以及偏振状态对焦斑移位的影响,模拟了不同阶次的空间变化偏振矢量 BG 光束经过透镜聚焦后焦点附近的强度分布情况。由于主要研究光束的偏振状态等性质对焦斑移位现象的影响,且由系统有效菲涅耳数大小等因素引起的焦斑移位现象<sup>[13]</sup>较为不明显,这里将这一部分的焦斑移位忽略不计,并以不同阶次入射光在  $\delta=0$  时的焦点位置作为衡量空间变化偏振矢量光束焦斑移位的参考点,数值模拟得出的焦斑移位大小均由与选定的参考点相比较得出。数值模拟选取的参数是:光瞳半径与光束宽度之比  $\beta_0=3/2$ ,像方孔径角  $\alpha=\arcsin(a/n)$ ,数值孔径  $a=1.32$ ,像空间介质折射率  $n=1.5$ ,光束波长为单位 1。将(4)式代入(1)式就可以得到不同模阶次的入射矢量 BG 光束在相位延迟角  $\delta$  为  $0, \pi/3, \pi/2$  和  $\pi$  时,经过消球差透镜系统聚焦后在焦点附近  $r_s/z_s$  平面上的光强分布,如图 2 所示。

在图 2 中,第 1 行为相位延迟角  $\delta$  为 0 时,  $m$  分别为 0、1、2 和 3 时的入射光在束腰位置的光束横截面上光强分布。从图中可以看出,对于较高阶次的入射光束,其光强在横截面上呈现花瓣状分布,花瓣数与  $2m$  相等。因此,为了更加完整清晰地表现出聚焦后光束在  $r_s/z_s$  平面上的光强分布特点,必须选取适当的方位角来确定不同阶次的入射光束聚焦后用于数值模拟讨论的  $r_s/z_s$  平面,此处规定当  $m=0$  时  $\phi_s=0, m \neq 0$  时  $\phi_s=\pi/2m$ 。图 2 第 2 行为相位延迟

角  $\delta$  为 0 时对应不同阶次的光束聚焦后在焦点附近  $r_s/z_s$  平面上的光强分布,图中标出了光束的光强最大值点的位置,此时光束的光强最大点位于坐标原点,与选定的参考点重合。图 2 第 3~6 行分别为  $\delta$  为  $\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$  和  $\pi$  时焦点附近  $r_s/z_s$  平面上的聚焦强度分布图。从图中可以看出,对于 0 阶和 2 阶的入射光束,无论  $\delta$  怎样取值,均没有焦斑移位现象发生。对于  $m=1$  的情况,光束的光强最大值点随着  $\delta$  的增大逐渐向着  $z$  轴负方向移动,光束的质心也因此不断左移,并在  $\delta=\pi/2$  时达到最大焦斑移位。从数值模拟结果得出,当  $\delta$  超过  $\pi/2$  时,在  $z$  轴正方向上会产生一个与光强最大值点关于坐标原点对称的光强极值,随着  $\delta$  的进一步增大这一光强极值的强度也逐渐增加,这使得光束的质心又重新向着坐标原点靠近。当  $\delta=\pi$  时,  $z$  轴正方向上的光强极值点强度与原有的  $z$  轴负方向上的最大光强恰好相等(图 2 第 6 行第 2 列),光束的质心位置又重新回到了坐标原点。对于  $m=3$  的情况,光强最大值点的移动同样是在  $\delta=\pi/2$  时最大,而后又随着  $\delta$  的增大逐步减小,当  $\delta=\pi$  时,焦斑移位现象消失。结合相位延迟角对于光束偏振状态的影响,当  $\delta=0$  时,入射光束横截面上的各点均呈现线性偏振,随着  $\delta$  的增大入射光束的偏振状态发生了很大的变化,从而产生了焦斑移位现象。当  $\delta$  增大到  $\pi$  时,入射光束横截面上各点的偏振状态又回到了线性偏振,焦斑移位现象也随之消失。

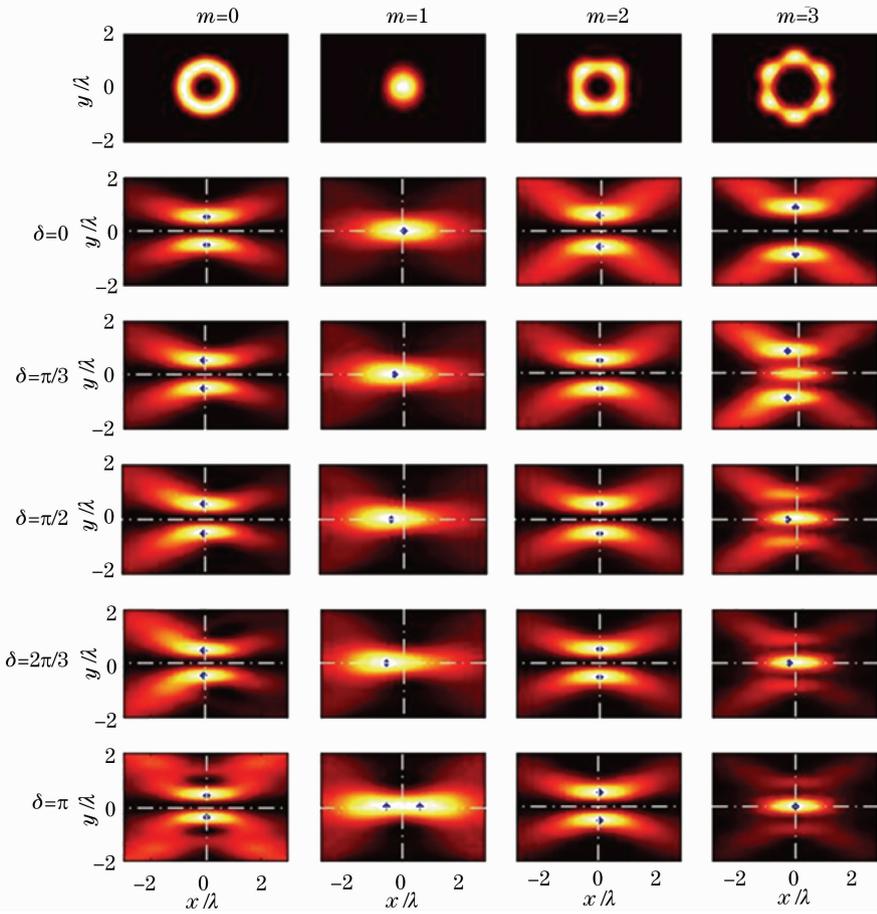


图 2 0~3 阶矢量 BG 光束在  $xOy$  平面上和  $\delta$  分别为  $0, \pi/3, \pi/2$  和  $\pi$  时  $r_s/z_s$  平面上的光强分布

Fig. 2 Light-intensity distribution of vector BG beams with order from 0 to 3 in  $xOy$  plane and in  $r_s/z_s$  plane with different  $\delta$  of  $0, \pi/3, \pi/2$  and  $\pi$

为了进一步探讨影响矢量光束强聚焦产生焦斑移位的因素,研究了焦斑移位与相位延迟角  $\delta$  以及光束阶次  $m$  的关系,如图 3 所示。从图中可以看出,光束聚焦后的焦斑移位大小与相位延迟角  $\delta$  的取值密切相关,也就是与入射光束的偏振状态密切相关。焦斑移位的大小随相位延迟角  $\delta$  的增大而增大,当  $\delta = \pi/2$  时,焦斑移位的大小达到极值; $\delta$  继续增大达到  $\pi$  时,焦斑移位现象消失。对于不同阶次  $m$  的入射光束,在  $\delta \leq \pi/2$  的区间,相同相位延迟角  $\delta$  情况下入射光束阶次越高焦斑移位越明显。当入射光束为 5 阶,相位延迟角为  $\pi/2$  时,聚焦光束产生了达 0.57 个波长大小的焦斑移位。但是当  $\delta > \pi/2$ , 低阶次入射光束反而有可能比高阶次产生的焦斑移位更大。前面指出空间变化偏振矢量 BG 光束的光束偏振态的变化是依靠 LCVR 的相位延迟角度来控制的,相位延迟角度可以在  $0 \sim \pi$  之间连续变化,从而可以实现光束局部偏振状态的实时控制,这间接实现了对矢量光束焦斑移位大小的实时控制,这对于矢量光束在与粒子的相互作用方面有潜在的应用价值。

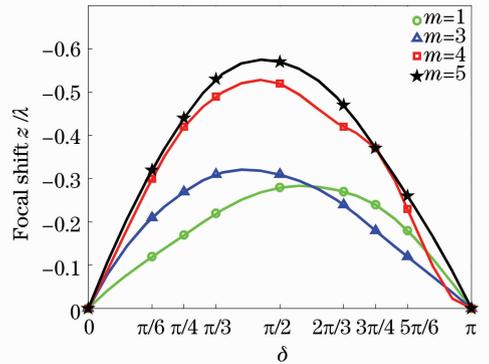


图 3 空间变化偏振矢量光束强聚焦后的焦斑移位大小与相位延迟角  $\delta$  及光束阶次  $m$  的关系  
Fig. 3 Relation between the magnitude of focal shift of spatial-variant polarization vector beams lightly focused with different  $m$  and the phase delay angles  $\delta$

光束宽度也是影响空间变化偏振矢量 BG 光束焦斑移位的因素。如果认为聚焦系统的光瞳半径为定值,那么改变数值计算中用到的光瞳半径与光束宽度之比  $\beta_0$  就可以间接地控制光束宽度,光束宽度

与  $\beta_0$  成反比。图 4 给出了当入射光阶次  $m=4$  时，对于  $\delta$  分别为  $\pi/4$ 、 $\pi/3$ 、 $\pi/2$  情况下焦斑移位的大小与  $\beta_0$  之间的关系。从图中可以很明显看出，焦斑移位的大小随  $\beta_0$  的增大而增大，即入射光束宽度越小焦斑移位越明显。

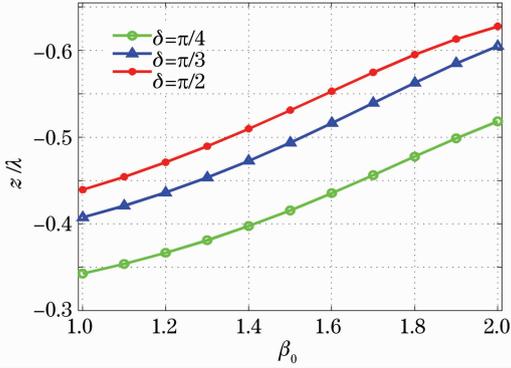


图 4 相位延迟角  $\delta$  为  $\pi/4$ 、 $\pi/3$  和  $\pi/2$  时 4 阶次空间变化偏振矢量 BG 光束强聚焦后的焦斑移位大小与  $\beta_0$  的关系

Fig. 4 Relation between the magnitude of focal shift of spatial-variant polarization vector beams tightly focused and  $\beta_0$  when  $\delta = \pi/4$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$  and  $m=4$

由前面的讨论得知，入射光束的阶次  $m$ 、光束偏振状态  $\delta$  以及光束宽度  $\beta_0$  均为影响光束聚焦后焦斑移位大小的重要因素。此外，由于文中提到的数值模拟结果均以波长为单位，入射光束的波长也是影响焦斑移位的一个因素，由图 3 和图 4 可知波长越大焦斑移位越明显。

## 4 结 论

通过数值模拟研究讨论了空间变化偏振矢量 BG 光束经过高数值孔径聚焦系统后产生的焦斑移位现象，并深入分析了影响这种焦斑移位大小的因素。数值结果显示，入射光束的阶次、偏振状态、光束宽度以及波长都是影响其焦斑移位的因素。光束的阶次越高，产生的焦斑移位越明显，光束宽度越窄，焦斑移位的大小越大。光束的局部偏振状态是影响焦斑移位大小极为重要的因素，由于光束的偏振状态是通过调节 LCVR 的相位延迟角度  $\delta$  连续调控，从而可以实现焦斑移位大小的实时调控，这在粒子加速、粒子捕获等光学微操纵领域具有潜在利用价值。

## 参 考 文 献

- 1 S. D. Nicola. On-axis focal shift effects in focused truncated  $J_0$  Bessel beams [J]. *Pure Appl. Opt.*, 1996, **5**(6): 827~831
- 2 B. Lü, W. Huang. Three-dimensional intensity distribution of focused Bessel-Gauss beams [J]. *J. Mod. Opt.*, 1996, **43**(3):

509~515

- 3 B. Lü, W. Huang. Focal shift in unapertured Bessel-Gauss beams [J]. *Opt. Commun.*, 1994, **109**(1-2): 43~46
- 4 W. H. Cater. Focal shift and concept of effective Fresnel number for a Gaussian laser beam [J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(11): 1989~1994
- 5 M. Martinez-Corral, C. J. Zapata-Rodriguez, P. Andrés *et al.*. Effective Fresnel-number concept for evaluating the relative focal shift in focused beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(2): 449~455
- 6 C. F. Li. Representation theory for vector electromagnetic beams [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **78**(6): 063831
- 7 D. G. Deng, H. Yu, S. Q. Xu *et al.*. Nonparaxial propagation of vectorial hollow Gaussian beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2008, **25**(1): 83~87
- 8 Mei Zhangrong, Zhao Daomu, Gu Juguan. Nonparaxial propagation of vectorial controllable dark-hollow beams [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(6): 1675~1679
- 梅掌荣, 赵道木, 顾菊观. 矢量可控空心光束的非傍轴传输 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(6): 1675~1679
- 9 Li Hanxing, Yang Shuangyan. Spin hall effect of cylindrical vector beams in the transmission [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(10): 1026001
- 李寒星, 杨双燕. 柱矢量光束在透射时的自旋霍尔效应 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(10): 1026001
- 10 K. S. Youngworth, T. G. Brown. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams [J]. *Opt. Express*, 2000, **7**(2): 77~87
- 11 Q. W. Zhan, J. R. Leger. Focus shaping using cylindrical vector beams [J]. *Opt. Express*, 2002, **10**(7): 324~331
- 12 G. M. Lerman, L. Stern, U. Levy. Generation and tight focusing of hybridly polarized vector beams [J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(26): 27650~27657
- 13 P. L. Greene, D. G. Hall. Focal shift in vector beams [J]. *Opt. Express*, 1999, **4**(10): 411~419
- 14 G. H. Wu, Q. H. Lou, J. Zhou. Focal shift in focused radially polarized ultrashort pulsed laser beams [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(25): 6251~6255
- 15 X. M. Gao, S. Hu, H. T. Gu *et al.*. Focal shift of three-porion concentric piecewise cylindrical vector beam [J]. *Optik*, 2009, **120**(11): 519~523
- 16 K. Xu, Y. F. Yang, Y. He *et al.*. Liquid crystal retarder modulation for generating real time non-uniformly polarized beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2010, **27**(3): 572~578
- 17 Xu Kai, Yang Yanfang, He Ying *et al.*. Study on the tight focusing of the local elliptically polarized beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(9): 6125~6130
- 徐凯, 杨艳芳, 何英等. 局域椭圆偏振光束强聚焦性质的研究 [J]. *物理学报*, 2010, **59**(9): 6125~6130
- 18 E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems I. an integral representation of the image field [J]. *Proc. Roy. Soc. A*, 1959, **253**(1274): 349~357
- 19 B. Richards, E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems II. structure of the image field in an aplanatic system [J]. *Proc. Roy. Soc. A*, 1959, **253**(1274): 358~379
- 20 D. G. Hall. Vector-beam solutions of Maxwell's wave equation [J]. *Opt. Lett.*, 1996, **21**(1): 9~11

栏目编辑：李文喆