

基于随机数据元扩张的大气湍流相位屏数值模拟

华志励¹ 李洪平²

(¹ 山东省科学院海洋仪器仪表研究所, 山东 青岛 266001)
(² 中国海洋大学信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要 准确模拟大气湍流相位屏是建立大气湍流数值模型的核心问题。从大气湍流的统计学特性入手, 利用大气湍流波前相位结构函数建立了一种新的大气湍流相位屏数值模拟方法, 通过随机数据元扩张对大气湍流波前畸变相位分布的尺度随机性和高频分量随机性进行了模拟, 并以此为基础通过相位屏近似构建了满足 Kolmogorov 统计规律的大气湍流数值模型。计算结果表明, 随机数据元扩张法生成的相位屏在统计特性上与理论值基本吻合, 在低频部分相对于功率谱反演法有明显的提升。同时, 随着相位屏网格数的增加, 计算结果的高频特性逐渐呈现并逼近理论值。对于由相位屏构建的大气湍流数值模型, 在此通过光强闪烁率作为判据进行了验证, 结果表明对于弱湍流和中等强度的湍流, 模拟结果与理论计算基本相同; 对于强湍流则误差较为明显, 相对误差最大可达 40%。

关键词 大气光学; 大气湍流相位屏; 随机数据元扩张; 相位结构函数

中图分类号 P427.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0501001

Atmospheric Turbulence Phase Screen Simulation Based on Random Unit Expansion

Hua Zhili¹ Li Hongping²

¹ Institute of Oceanographic Instrumentation, Shandong Academy of Sciences,
Qingdao, Shandong 266001, China
² College of Information Science and Engineering, Ocean University of China,
Qingdao, Shandong 266100, China

Abstract Accurately generating the phase screen (PS) is a key step to numerical simulation of the atmospheric turbulence. According to the statistical characteristics of turbulence, a new method called random unit expansion mainly focusing on the scale distribution randomness and small scale phase fluctuation of turbulence is induced by use of the phase structure function (PSF). Based on the PS generated, Kolmogorov atmospheric turbulence model is obtained. Expansion result shows that the phase structure function derived from the simulation is very close to the ideal one. Compared with power spectrum method, performance in low-frequency part is better. Meanwhile, as the grid number of PS increases, characteristic in high frequency part appears obviously and gradually closer to the ideal function. To evaluate the accuracy of the atmospheric turbulence numerical model, scintillation ratio is computed. In the condition of weak and moderate turbulence, the simulated result agrees with theoretical one, while to the strong turbulence, max relative error will be about 40%.

Key words atmospheric optics; atmospheric-turbulence phase screen; random unit expansion; phase structure function

OCIS codes 010.1300; 010.1330; 010.3310; 200.3050

1 引 言

随机介质中光波的传输问题是光学工程领域中

的常见问题, 其中激光光波通过随机介质的传输和成像问题则显得尤为突出。激光光波通过湍流大气

收稿日期: 2011-10-17; 收到修改稿日期: 2011-12-19

基金项目: 国家 973 计划(2009CB723903)资助课题。

作者简介: 华志励(1982—), 男, 博士, 主要从事大气湍流数值模型方面的研究。E-mail: hua_zhili@yahoo.cn

传输时,大气湍流会对其产生多种湍流效应,如光强闪烁、相位扰动、到达角起伏、光束漂移和扩展以及分辨率降低等。因此,随着各类光学设备的不断发展,湍流大气中光波传输与成像问题受到人们的越来越广泛关注^[1]。

光波在湍流大气中的传输理论与大气湍流的物理属性密切相关。一直以来,人们对大气湍流本身还不是十分清楚,加之数学上对随机光波场的处理非常复杂,因此光波在湍流大气中的传输理论还不是十分完善,仍是一个十分活跃的研究领域^[2~4]。目前人们在研究湍流大气中光波的传播与成像问题时,大多采用近似的方法,如几何光学近似、Rytov近似和 Markov 近似等,试图在理论上找出光波场统计量的解析表达式^[5]。然而,用解析法计算光波通过湍流后的统计特性是十分困难的,特别是通过强湍流后的统计特性,因此在对这类问题还没有找到简单解析解的情况下,人们就把目光投向了数值模拟方法。虽然现阶段数值模拟还不能完全代替实验,但是由于其灵活、简便的特点仍不失为一种研究大气湍流的重要手段。目前,采用数值模拟方法对大气湍流的研究主要集中在大气湍流中光束的传输以及传输过程中光束的传输特性和统计特性,而在这其中如何准确建立大气湍流数值模型则是关系到数值模拟结果正确与否的一个关键问题。在建立大气湍流数值模型时,国内外学者通常采用相位屏近似的方法,而对于其中的核心问题即大气湍流相位屏的生成问题,方法主要集中在统计学方法如功率谱反演法^[6,7],数学方法如多项式展开法^[8,9]和分形理论^[10,11]等几个方面,再辅之以插值^[10,12]、矩阵分析^[13]等。综合上述方法来看,谱反演法在低频部分存在一定的不足,而多项式展开法则在高频部分有所缺失,误差主要来自于有限的取样格数、有限的相屏大小以及具体的相位屏生成方法。在此,本文从大气湍流统计学特性入手,通过大气湍流相位结构函数计算出不同采样点之间的相位差,以此来模拟生成大气湍流相位屏。

2 相位结构函数

对于平稳随机过程 $S(\cdot)$,其结构函数的定义式为

$$D_S(r) = \langle [S(r' + r) - S(r')]^2 \rangle, \quad (1)$$

式中 r' 代表某已知采样点的位置, r 表示目标采样点与已知采样点之间的标量距离, $\langle \cdot \rangle$ 表示在函数定义域内求平均。根据 Kolmogorov 湍流理论,大气

湍流通常被近似视为局部均匀各向同性的,因此在整个光波传播距离上湍流的强度可以认为是均匀的,此时对于平面波和球面波而言,其对应的相位结构函数分别可以写为^[14]

$$D(r) = 8\pi^2 k^2 Z \int_0^\infty \Phi_n(K) [1 - J_0(Kr)] K dK, \quad (2)$$

$$D(r) = 8\pi^2 k^2 Z \int_0^\infty \Phi_n(K) [1 - J_0(Kr\xi)] K dK d\xi, \quad (3)$$

式中光波波数 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为光波波长, Z 为光波传输距离, $J_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数, $\Phi_n(K)$ 为大气湍流的功率谱密度, K 为空间波数。对于满足 Kolmogorov 统计规律的湍流谱,其功率谱密度表达式为

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 K^{-11/3}, \quad 2\pi/L_0 \leq K \leq 2\pi/l_0 \quad (4)$$

式中 C_n^2 为大气湍流折射率结构常数, l_0 和 L_0 分别对应大气湍流的内、外尺度。

3 大气湍流相位屏数值模拟方法

由于大气湍流相位屏对激光光束的影响主要体现在相位的随机起伏,而在穿过相位屏前后光束幅值的变化可以忽略不计,因此对于传输过程中经过相位屏前后的激光光束其波结构函数与其相位结构函数可视为相同。而根据 Kolmogorov 湍流理论,由于一定区域内的大气湍流通常满足局部均匀各向同性的条件,故其相位起伏的分布不因采样点位置和方向的不同而改变,仅与位移矢量的大小有关。在此本文从激光光波的相位结构函数入手,由(1)式根据不同采样点之间的相位差构建大气湍流相位屏,其具体步骤是:首先由大气湍流的相关参数建立相位结构函数的表达式;然后根据不同采样点之间的距离间隔,通过相位结构函数得到相位屏上相对于某参考点的相位起伏分布;最后通过引入随机相位起伏方差实现大气湍流相位起伏的随机分布。

假设相位屏上任意一点 (i_0, j_0) 的初始相位值是 $\varphi_0(i_0, j_0)$,则由相位结构函数生成的相位屏可写为

$$\varphi_i(i, j) = \varphi_0(i_0, j_0) + \sqrt{D_\varphi(r) + R\sigma_\varphi^2}, \quad (5)$$

式中 $r = [(i - i_0)^2 + (j - j_0)^2]^{1/2}$ 为不同采样点之间的标量距离, $D_\varphi(r)$ 为根据相位结构函数生成的、间距为 r 的采样点之间的均方相位差, $\sigma_\varphi^2 = 1.0299(D/r_0)^{5/3}$ 为接收孔径 D 内的相位起伏方差, r_0 为大气湍流相干长度, R 为根据 Monte-Carlo 法

生成的、在(0,1)之间满足均匀分布的随机因子。

由于大气湍流的无特征尺度性,即湍流可以由相差很大的、各种不同尺度的涡旋组成,因此为了更进一步体现大气湍流波前相位畸变的随机性,有必要在考虑高频部分即湍流微结构随机性的同时,兼顾低频部分即湍流尺度的随机性。在此引入随机数据元扩张法,该方法的基本思想是通过迭代扩张的方式实现网格的逐步细分,在逐步细分的过程中待扩张数据元的选择是随机的,并且一旦在某一轮次的扩张过程中某个数据元未被选中,则在后续轮次的扩张过程中该数据元将不会再被选中,这也意味着该数据元的数值将保持不变。随着随机数据元扩张法的使用,在大气湍流相位屏的生成过程中将充分实现大气湍流尺度和微结构的随机分布,其中“待扩张数据元的随机选择”实现了大气湍流尺度分布

的随机性,而“均方相位差的随机引入”又能保持采样点之间相位起伏分布的随机性。

随机数据元扩张法的具体步骤如下(图1):

1) 进行相位屏的初始化[图1(a)],确定初始相位值 $\varphi_0(i, j) = \sqrt{\sigma_\varphi^2} = 1.0299(D/r_0)^{5/6}$ 以及相位屏的外尺寸即数值模型对应的湍流外尺度 L_0 ;

2) 由初始采样点 $\varphi_0(i, j)$ 根据式(5)扩展得到一个 2×2 网格[图1(b)];

3) 进行第一轮次的随机数据元扩张[图1(c)]。对于被随机选中的数据元例如图中的点1、2、3,按(5)式进一步进行扩张;对于未被选中的数据元如点4,则继续沿用点4的值作为扩张的结果。以此类推,相位屏的生成过程可以通过(6)式概括:

$$\begin{cases} \varphi_{m,1}(i, j) = \varphi_{m,0}(i, j) + [D_\varphi(r_1) + R_1\sigma_\varphi^2]^{1/2} \\ \varphi_{m,t+1}(i, j) = \varphi_{m,t}(i, j) + R_2 \cdot [D_\varphi(r_t) + R_1\sigma_\varphi^2]^{1/2}, \quad t = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

式中 R_1 是(0,1)之间均匀分布的随机数, $R_2 = 1$ 或 0 用来实现待扩张数据元的随机选择, m 表示相位屏组中的第 m 个相位屏, t 表示在一个相位屏生成过

程中进行的第 t 轮次的数据元扩张。数据元扩张过程中,通过预先设定的最小采样点间隔控制数据元的扩张轮次。当相位屏生成后,由最小采样点的间隔即可确定湍流的内尺度 $l_0 = \sqrt{2}r_0$ 。

由于在构建大气湍流数值模型时,需要用一系列等间隔的相位屏模拟无限延伸的湍流介质,此时光波通过湍流大气的传输就相当于光波通过相位屏后在相位屏间的传输。这一系列相位屏之间不是完全独立的,其相关性体现在相位屏生成时的初始相位值。假设已经生成一个相位屏(PS1),则其相邻相位屏(PS2)的初始相位值可以通过(7)式获得,即

$$\varphi_{2,0}(i, j) = \varphi_{1,0}(i, j) + [D_\varphi(\Delta z) + R_1\sigma_\varphi^2]^{1/2}, \quad (7)$$

式中 Δz 为相邻相位屏之间的距离, $\varphi_{1,0}(i, j)$ 和 $\varphi_{2,0}(i, j)$ 为 PS1 和 PS2 的初始相位值。由于湍流模型中相位屏是等间隔分布的,即相邻相位屏之间的距离 Δz 是恒定的,因此(7)式中未知数只有 $\varphi_{1,0}(i, j)$, 在此将其简写为

$$\varphi_{2,0}(i, j) = \Lambda[\varphi_{1,0}(i, j)], \quad (8)$$

而对于后续的相位屏,其相应的初始相位值采用系综平均的方法,综合已知相位屏的初始相位值进行求解,即

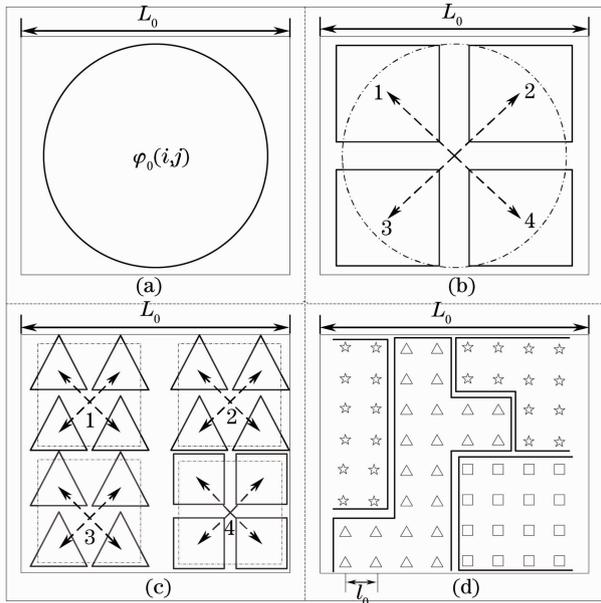


图1 随机数据元扩张示意图:(a)初始数据元 $\varphi_0(i, j)$;
(b)第一次扩张得到 2×2 网格;(c)第二次扩张得到 4×4 网格;(d)第三次扩张得到 8×8 网格

Fig. 1 Process of random unit expansion. (a) Original unit $\varphi_0(i, j)$; (b) 2×2 grid by 1st expansion; (c) 4×4 grid by 2nd expansion; (d) 8×8 grid by 3rd expansion

$$\begin{cases} \varphi_{2,0}(i,j) = \Lambda(\varphi_{1,0}) \\ \varphi_{3,0}(i,j) = \frac{1}{2}[\Lambda(\varphi_{1,0}) + \Lambda(\varphi_{2,0})] \\ \varphi_{4,0}(i,j) = \frac{1}{3}[\Lambda(\varphi_{1,0}) + \Lambda(\varphi_{2,0}) + \Lambda(\varphi_{3,0})] \\ \vdots \\ \varphi_{m,0}(i,j) = \frac{1}{m-1}[\Lambda(\varphi_{1,0}) + \Lambda(\varphi_{2,0}) + \cdots + \Lambda(\varphi_{m-1,0})] \end{cases} \quad (9)$$

大气湍流相位屏的个数 m 由屏间区域 Δz 内的光强闪烁率 $\sigma_I^2(\Delta z)$ 决定, 即需满足 $\sigma_I^2(\Delta z) < 0.1$ 。其中光强闪烁率的定义为 $\sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1$, I 表示光强。根据 Rytov 方差可得闪烁率的计算式为

$$\sigma_I^2(\Delta z) = 1.23 C_n^2 k^{2-a/2} \Delta z^{1+a/2}. \quad (10)$$

对于 Kolmogorov 谱, 取 $\alpha=5/3$ 。

4 数值模拟结果分析

数值模拟采用波长 $1.5 \mu\text{m}$ 的高斯激光光束, 大气湍流折射率结构常数 C_n^2 为 $3.0 \times 10^{-16} \text{m}^{-2/3}$, 湍流外尺度 L_0 为 32m , 光束传输距离 Z 为 2km 。对于相位屏的模拟结果, 在此通过相位结构函数曲线对其进行比对分析, 如图 2 所示。图中理想情况下的相位结构函数曲线由 (3) 式得到, 功率谱反演法的计算结果取自参考文献 [6]。从图 3 的结构函数误差对比可见, 经过随机数据元扩张生成的相位屏与理论结果更加接近, 并且在低频部分即 $r \in [0.5, 0.8]$ 相对于功率谱反演法在统计学特性上有所提升。对于不同网格数的相位屏计算结果, 相应的相位结构函数对比曲线如图 4 所示。从图中可见, 随

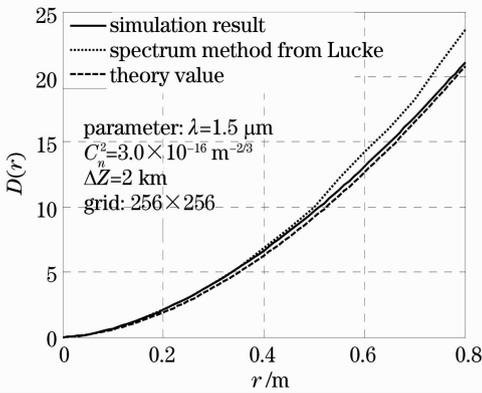


图 2 随机数据元扩张获得的相位结构函数曲线与理论曲线对比

Fig. 2 Comparison of the phase structure function derived from random unit expansion as compared to the theoretical one

着网格数的增加, 相位屏高频特性逐渐显现, 当采样率达到 128×128 时, 高频特性逐渐趋于平稳, 此时对应的大气湍流内尺度 l_0 约为 1cm 。通过对不同采样率的计算结果的对比可以看出, 随着相位屏网格数的提高 ($128 \times 128 \rightarrow 256 \times 256 \rightarrow 512 \times 512$), 计算结果的高频误差逐渐减小, 这意味着随着数据元扩张次数的增加, 大气湍流相位屏的小尺度特性逐渐显现。

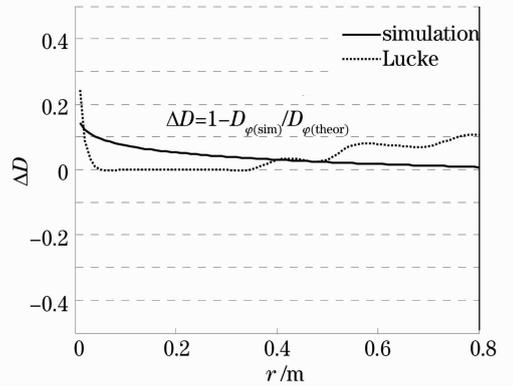


图 3 相位结构函数理论与模拟误差

Fig. 3 Relative error between the theoretical and simulated phase structure function as a fraction of the theory

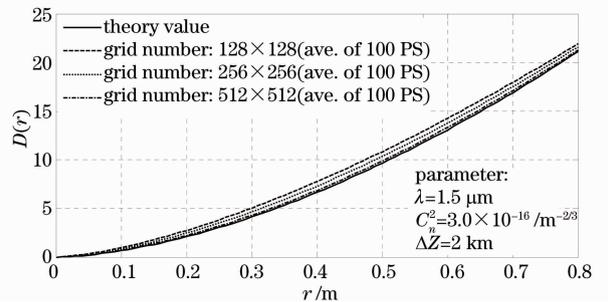


图 4 不同网格数相位屏对应的相位结构函数曲线对比

Fig. 4 Comparison of phase structure function corresponding to phase screen with different grid numbers

对于由相位屏组构建的大气湍流数值模型, 在此通过光强闪烁率作为判据进行验证, 图 5 给出光强闪烁率的计算结果, 其中光强闪烁率 σ_I^2 的理论值由 (10) 式计算得到。从对比曲线可以看出, 大气湍

流对激光光强的影响在趋势上与理论值基本相同。图 6 给出模拟结果对应的光强闪烁率相对误差,从相对误差对比曲线可见,当 $C_n^2 < 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ 时光强闪烁率在数值上与理论值吻合度高,此时对应的是弱湍流和中等强度湍流;当湍流强度的量级超过 $10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ 之后误差逐渐加大,最大相对误差可达 40%。

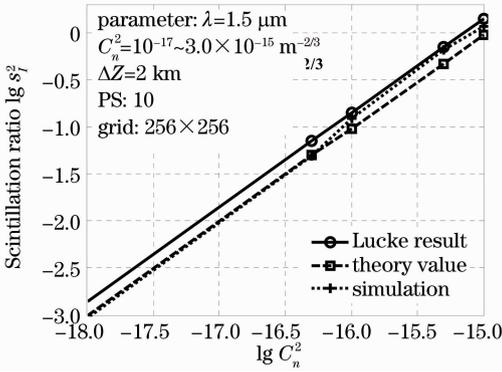


图 5 光强闪烁率的对比

Fig. 5 Comparison of light-intensity scintillation ratio

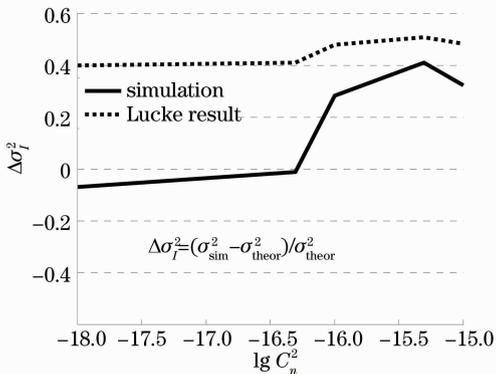


图 6 光强闪烁率相对误差的对比

Fig. 6 Comparison of relative error of light-intensity scintillation ratio

5 结 论

从大气湍流背景下激光光束的相位结构函数入手,通过引入随机数据元扩张的思想给出了一种新的大气湍流相位屏数值模拟方法。从模拟结果可以看出,采用该方法的计算结果当网格数达到 128×128 之后统计特性与理论结果吻合度较好,此时对应的大气湍流内尺度大约为 1 cm。当相位屏网格数进一步增加之后,计算结果的统计特性保持稳定,并且在高频部分逐渐逼近理论值。而对于由相位屏构建的大气湍流数值模型,通过光强闪烁率作为判据验证了其准确性。结果表明,对于弱湍流和中等强度湍流,模拟结果与理论值高度吻合,对于强湍

流则误差较为明显,相对误差最大可达 40%。

参 考 文 献

- 1 D. L. Fried. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965, **55**(11): 1427~1435
- 2 Yi Wuxiong, Guo Lixin, Wu Zhensen. Study on the optical scintillation for Gaussian beam propagation in the slant path through the atmospheric turbulence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 433~438
易修雄, 郭立新, 吴振森. 高斯波束在湍流大气斜程传输中的闪烁问题研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 433~438
- 3 Li Xinyang, Jiang Wenhan, Wang Chunhong *et al.*. Power spectra analysis of disturbed wavefront in laser beam horizontal atmospheric propagation I: wavefront overall tilt and tyler frequency[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **10**(7): 884~889
李新阳, 姜文汉, 王春红等. 激光大气水平传输湍流畸变波前的功率谱分析 I: 波前整体倾斜与泰勒频率[J]. *光学学报*, 2000, **10**(7): 884~889
- 4 Li Xinyang, Jiang Wenhan, Wang Chunhong *et al.*. Power spectra analysis of disturbed wavefront in laser beam horizontal atmospheric propagation II: wavefront phase and greenwood frequency[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(8): 1035~1042
李新阳, 姜文汉, 王春红等. 激光实际大气水平传输湍流畸变波前的功率谱分析 II: 波前相位与格林伍德频率[J]. *光学学报*, 2000, **20**(8): 1035~1042
- 5 Zhang Jianzhu. The Influence of Atmospheric Turbulence on Partially Coherent Flat-Topped Gaussian Beam[D]. Mianyang, China Academy of Engineering Physics, 2004. 6~9
张建柱. 大气湍流对部分相干平顶高斯光束影响的研究[D]. 绵阳:中国工程物理研究院, 2004. 6~9
- 6 R. L. Lucke. Synthetic aperture radar simulation with phase screens and Fourier propagation[J]. *Proc. IEEE*, 2004, **3**: 7~12
- 7 Hua Zhili, Li Hongping. Algorithm for phase errors compensation in airborne synthetic aperture radar data processing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1149~1154
华志励, 李洪平. 一种机载合成孔径激光雷达相位误差补偿方法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(5): 1149~1154
- 8 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~211
- 9 L. M. Mugnier, J. F. Sauvage, T. Fusco *et al.*. On-line long-exposure phase diversity: a powerful tool for sensing quasi-static aberrations of extreme adaptive optics imaging systems[J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(22): 18406~18416
- 10 R. G. Lane, A. Glindemann, J. C. Dainty *et al.*. Simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. *Waves in Random Media*, 1992, **2**: 209~224
- 11 Wu Hanling, Yan Haixing, Li Xinyang *et al.*. Generation of rectangular turbulence phase screens based on fractal characteristics of distorted wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 114~119
吴哈玲, 严海星, 李新阳等. 基于畸变相位波前分形特征产生矩形湍流相屏[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 114~119
- 12 C. M. Harding, R. A. Johnston, R. G. Lane *et al.*. Fast simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. *Appl. Opt.*, 1999, **38**(11): 2161~2170
- 13 V. Sriram, D. Kearney. An ultra fast Kolmogorov phase screen generator suitable for parallel implementation[J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(21): 13709~13714
- 14 R. L. Lucke, C. Y. Young. Theoretical wave structure function when the effect of the outer scale is significant[J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(4): 559~569