

均匀各向异性介质球散射的解析研究

李应乐¹ 李 瑾² 王明军¹ 董群峰¹

(¹ 咸阳师范学院电波传播与散射研究所, 陕西 咸阳 712000)
² 西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

摘要 将均匀各向异性介质重构为电学上的无耗各向同性介质, 得到了重构目标的散射截面; 进而得到了主坐标系中无耗各向异性介质球的散射截面, 将介质退化到各向同性介质时, 各向异性介质球的散射截面与 Mie 理论完全一致, 验证了所得结果的正确性; 仿真结果表明: 散射截面正比于目标介电常数张量的元素且随入射方向的变化而变化; 所得结果为复杂形体各向异性介质目标的散射评判提供了理论基础。

关键词 散射; 各向异性介质; 电磁场多尺度理论; 重构

中图分类号 O436.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0429002

Investigation of Scattering for a Uniformly Anisotropic Dielectric Sphere

Li Yingle¹ Li Jin² Wang Mingjun¹ Dong Qunfeng¹

(¹ Institute of Radio Wave Propagation and Scattering, Xianyang Normal University,
Xianyang, Shaanxi 712000, China
² School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract The uniformly anisotropic medium is reconstructed as a lossless isotropic one in electricity, and its scattering cross section is developed. In primary coordinate system, the scattering cross section of a lossless anisotropic dielectric sphere is obtained. It is found that when the anisotropic medium is an isotropic one, the scattering cross section of this sphere is in agreement with the famous Mie theory, so the validity of the gaining result is tested. Simulations show that the scattering cross section is proportional to the element of the dielectric constant tensor and varies with the incident wave direction. For the scattering of a complex anisotropic medium target, this result provides an evaluation criterion.

Key words scattering; anisotropic medium; scale theory of electromagnetic field; reconstruction

OCIS codes 290.5825; 290.5850; 140.3460

1 引 言

近年来,随着现代雷达系统及现代隐身、遥感等技术领域的不断发展,各向异性目标的电磁波散射研究受到人们的普遍重视;当电磁波在各向异性介质中传播时,有两个传播矢量,其大小取决于电场的极化状态^[1],是各向异性目标散射的主要困难;1908年 Mie 彻底地解决了无耗各向同性均匀介质球的电磁散射^[2,3],为复杂目标散射特性的评判提供了一个标准,各向异性均匀介质中平面电磁波在介质

分界面上的传播及各向异性均匀介质球的散射特性等^[4,5]得到了很好的研究。为了解决各向异性介质目标的散射问题,已有文献^[6,7]将各向异性介质中的电磁波用矢量球面波函数展开,然而,介电常数张量的元素在不同的坐标系中是不同的,球矢量波函数的正交性是以各向同性介质中的标量势波动方程为基础导出的;采用波透射链矩阵的方法^[8]可以处理介质参数为单轴各向异性材料的波传播问题,难以研究一般的各向异性材料中的波传播问题。文献

收稿日期: 2011-09-15; **收到修改稿日期**: 2011-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(60971079)和陕西省自然科学基金(2009JM8020)资助课题。

作者简介: 李应乐(1961—),男,博士,教授,主要从事光和电磁散射方面的研究。E-mail: liyinglexidian@yahoo.com.cn

[9]利用积分方程分析了二维各向异性介质对平面电磁波的散射,但在谐振区误差很大,另外,人们还利用矩量法、T矩阵等^[10~15]等数值算法的结合研究了三维各向异性目标的电磁散射问题,可控光束、高斯光束在单轴晶体中的传播及在界面上的反射等已受到人们的普遍关注,研究各向异性椭圆柱目标的电磁散射^[16],应将介电常数张量变换到在椭圆柱坐标系中,同时应注意球矢量波函数的适应性。为了解决无耗各向异性介质的电磁波传播、散射问题,文献系统地提出了电磁场的多尺度理论,应用该理论已成功地研究了磁化等离子体球、各向异性椭球的瑞利散射特性^[16~18]。

本文以电磁场的多尺度理论为基础,将均匀各向异性介质重构为各向同性介质,给出了各向异性介质球重构后的介电常数和目标半径,估计了由此引起的磁各向异性,得到了重构目标的散射场和散射截面;论证了面元矢量的多尺度关系,证明了电磁波的功率为一个尺度伸缩不变量,以此为基础,利用能流密度矢量的多尺度关系以及散射系数的定义,得到了无耗各向异性目标散射截面的解析表达式;以各向异性介质球为例,仿真结果验证了所得结果的正确性,将所得结果退化到瑞利散射时,与 Mie理论取得了一致的结果。

2 无耗各向异性介质球的电磁重构

文献[1]由能量守恒定律得出:无耗的各向异性介质介电常数张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 必为一个实对称张量,那么,通过坐标轴的适当旋转,可以将该介电常数张量变为对角张量,能使介电常数张量对角化的坐标系被称为主坐标系;因此,可设主坐标系中一个半径为 R 的无耗各向异性介质球的球心与主坐标系 Σ 的原点重合,电磁参数为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_0. \quad (1)$$

在笛卡儿坐标系中,主坐标与伸缩坐标的关系设为

$$x' = \frac{x}{a}; \quad y' = \frac{y}{b}; \quad z' = \frac{z}{c}, \quad (2)$$

式中 a, b, c 分别为待定的无量纲尺度因子;尺度因子的引入,使得长度的测量标准发生了变化,那么,定义在坐标上的物理量必然发生变化;由文献[14, 15]可知,在伸缩坐标系 Σ' 中电磁参数变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1 bc}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2 ac}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_3 ba}{c} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mu}' = \begin{bmatrix} \frac{\mu_0 bc}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0 ac}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0 ba}{c} \end{bmatrix}.$$

尺度因子的选择原则上是任意的,为了减小误差,计算简单,我们可分别选择尺度因子为

$$a = \frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}, \quad b = \frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}}, \quad c = \frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1}},$$

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}} = \sqrt{\varepsilon_a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$\boldsymbol{\mu}' = \begin{bmatrix} \frac{\mu_0 m^2}{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0 m^2}{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0 m^2}{\varepsilon_3} \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

(3)式表明:主坐标系 Σ 中电各向异性球体在尺度坐标系 Σ' 中变为电各向同性、磁各向异性;由于研究的是弱电各向异性,磁导率 μ_0 的大小为 10^{-9} 量级, m^2/ε_i 有相同的数量级,所以球体的磁各向异性相差在 10^{-10} 数量级,在工程应用上和近似计算中这一误差可以忽略不计,可近似地认为重整后的目标是电磁各向同性的介质球。为了减小计算误差,必须合理得出重整后的介质球半径;在主坐标系中,表述介质球的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (4)$$

将(2)式代入(4)式可得

$$\frac{x'^2}{R^2/a^2} + \frac{y'^2}{R^2/b^2} + \frac{z'^2}{R^2/c^2} = 1. \quad (5)$$

在尺度坐标系中,球体变成了椭球体,由尺度因子的引入其变化不大,在近似计算中可以将椭球看成球体;取椭球的体积与等效球的体积相等,可以得到等效球体的半径 $R' = R(abc)^{-1/3}$, (5)式变为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2, \quad (6)$$

在伸缩坐标系 Σ' 中,目标的散射场为^[3]

$$\begin{cases} E'_{\theta s} = \frac{j \exp(-jkr)}{kr} \cos \varphi' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n \tau_n + d_n \pi_n), \\ E'_{\varphi s} = \frac{-j \exp(-jkr)}{kr} \sin \varphi' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n \pi_n + d_n \tau_n), \\ \tau_n = \frac{dP_n^1(\cos \theta')}{d\theta'}, \quad \pi_n = \frac{P_n^1(\cos \theta')}{\sin \theta'}. \end{cases} \quad (7)$$

由文献[14]可得主坐标系 Σ 中各向异性球体的散射场矩阵表达式为

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E}'_s, \quad (8)$$

式中 \mathbf{Q}^{-1} 为主坐标系与尺度坐标系电场强度的变换矩阵; 散射场的具体表达式为

$$\begin{aligned} E_{\theta s} &= q_{22} E'_{\theta s}, \\ E_{\varphi s} &= q_{32} E'_{\theta s} + q_{33} E'_{\varphi s}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} q_{22} &= \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)^{1/2} \left/ \left[c \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right)^{1/2} \right], \right. \\ q_{32} &= \frac{\cos \theta \sin 2\varphi}{2c \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)^{1/2}}, \\ q_{33} &= \frac{1}{ab \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

将散射场代入(9)式, 去掉 $\exp(-jkr)/r$ 因子后的散射振幅矢量为

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{o}) = f_{\theta s}(\mathbf{i}, \mathbf{o}) \hat{\theta} + f_{\varphi s}(\mathbf{i}, \mathbf{o}) \hat{\varphi}. \quad (10)$$

图1为相对介电常数张量给定时, 散射振幅随磁导率的变化; 三种曲线分别表示采用(3b)式中的不同元素时散射振幅随散射角的变化, 这一变化表明: 由介电常数张量引起的磁导率各向异性对散射振幅有一定的影响, 对后向、前向散射来讲 ($\theta=0$ 或 π), 这一影响十分微小, 平均误差约为 5%, 对电磁波衰减、散射研究来说影响不大, 实际应用上可以忽略。

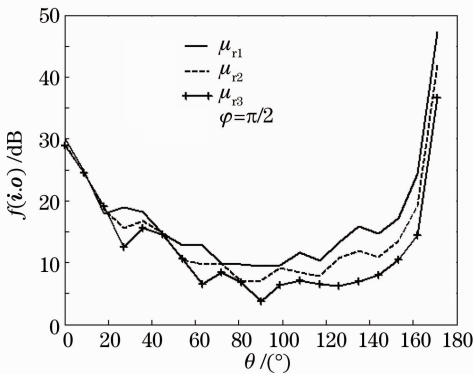


图1 散射振幅与磁导率的关系

Fig.1 Relation between scattering amplitude and permeability

由于重整后目标近似地为各向同性球体目标, 故伸缩坐标系中目标散射系数近似为

$$\sigma'_s = \frac{2}{(kR')^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|c_n|^2 + |d_n|^2), \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\hat{J}_n(kR') \hat{J}'_n(kmR') - m \hat{J}_n(kmR') \hat{J}'_n(kR')}{\hat{H}_n^{(2)}(kR') \hat{J}'_n(kmR') - m \hat{J}_n(kmR') \hat{H}_n^{(2)'}(kR')} \\ d_n &= \frac{m \hat{J}_n(kR') \hat{J}'_n(kmR') - \hat{J}_n(kmR') \hat{J}'_n(kR')}{m \hat{H}_n^{(2)}(kR') \hat{J}'_n(kmR') - \hat{J}_n(kmR') \hat{H}_n^{(2)'}(kR')}. \end{aligned}$$

k 为自由空间的传播常数, $\hat{J}_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x)$

为另一种球贝塞尔函数。

3 无耗各向异性介质球的散射截面

实际的各向同性目标在入射波方位一定的条件下, 其散射截面与测量方位无关, 各向同性的球形均匀介质目标散射截面不但与测量方位无关, 还与入射波的方位无关; 对于各向异性均匀介质球形目标而言, 其散射截面与各向同性的球形均匀介质目标散射截面有所不同, 散射截面应是电磁波入射方位的函数。笛卡尔坐标系中, 主坐标与尺度坐标的关系为 $x=ax', y=by', z=cz'$, 所以, 矢量面元的各分量也要发生变化, 主坐标系的矢量面元 $d\boldsymbol{\tau}$ 与尺度坐标系的矢量面元的 $d\boldsymbol{\tau}'$ 关系为

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}^{-1} d\boldsymbol{\tau}', \quad (12)$$

式中

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix},$$

为面元的尺度变换矩阵, 应注意的是如果在球坐标系、柱坐标系或其他曲面坐标系, (12)式的具体表达式也要发生变化, 可参阅文献[15, 16]。利用麦克斯韦方程组可得主坐标中电磁波的能量密度矢量与尺度坐标的能量密度矢量关系为

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{M}\mathbf{S}'_i. \quad (13)$$

由(12), (13)式可得电磁波的功率在两坐标系中是一多尺度伸缩不变量, 即

$$P = \int \mathbf{S}' \cdot d\boldsymbol{\tau} = \int \mathbf{S}'^t \mathbf{M}^t \mathbf{M}^{-1} d\boldsymbol{\tau}' = \int \mathbf{S}'^t d\boldsymbol{\tau}' = P', \quad (14)$$

(14)式是在直角坐标系中的表达式, 与坐标系的选择无关; 利用散射截面的定义

$$\sigma_s = \frac{P}{|\mathbf{S}_i|},$$

(14)式容易得到

$$\sigma_s = (b^2 c^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + a^2 c^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + a^2 b^2 \cos^2 \theta_0)^{1/2} \sigma'_s, \quad (15)$$

式中 a, b, c 为尺度因子。(15)式表明各向异性球形目标的散射不仅是介电常数张量的复杂函数, 还与入射方位角 (θ_0, φ_0) 有关, 是目标各向异性散射特性的体现。

当介质为各向同性介质时, 即 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$, 三个尺度因子 $a = b = c = 1$, 重整目标半径等于主坐标系中的目标半径, $m = \sqrt{\epsilon}$, 尺度坐标系的散射截面与主坐标系的散射截面相等, 即 $\sigma_s = \sigma'_s$, 表明了(15)式的正确性; 由得出过程可以看出: (15)式与目标的形状无关。对于瑞利散射, 有 $kR \ll 1$:

$$\hat{J}_1(kR') = \frac{j}{3}(kR')^2, \hat{J}'_1(kR') = \frac{2}{3}kR',$$

$$\hat{H}_1(kR') = \frac{j}{kR'}, \hat{H}'_1(kR') = \frac{-j}{(kR')^2}$$

$n \geq 2$ 时(11)式中的其他项为高阶无穷小量; 将以上各式代入(15)式得

$$\sigma_s = (b^2 c^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \phi_0 + a^2 c^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \phi_0 + a^2 b^2 \cos^2 \theta_0)^{1/2} \frac{8}{3} (kR')^4 \left| \frac{\epsilon_a - 1}{2 + \epsilon_a} \right|^2. \quad (16)$$

下面是以各向异性介质球为例的部分仿真结果: 在图 2, 3 中, 仿真所用参数分别为 $f = 6 \times 10^8$ Hz, $R = 0.5$ m, $\theta = \pi/4, \phi = \pi/3, \epsilon_1 = 1.2$ 和 $f = 6 \times 10^8$ Hz, $R = 0.5$ m, $\epsilon_1 = 1.2, \epsilon_2 = 1.1, \epsilon_3 = 1.3$; 由图 2 可以

看出: 在各向异性介质目标的散射中, 当 x 方向的介电常数给定时, 目标的散射截面正比于 y, z 方向上的介电常数, 由于直角坐标系中三个方向的介电常数地位相等, 由此可得目标的散射正比于介电常数张量; 图 3 为入射波方位角 (θ, φ) 对目标散射的影响, 随角度 θ 敏感地变化, 当 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 散射最大, 只是由于此时入射场在 x 轴上的投影最大而引起的。图 4 所用参数为 $f = 25 \times 10^6$ Hz, $R = 1$ m, 满

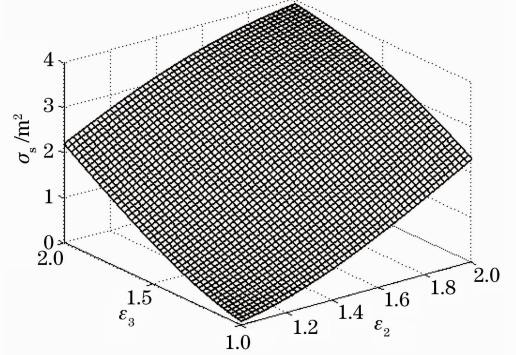


图 2 散射截面随介电常数张量的变化
Fig. 2 Scattering cross section versus the dielectric-constant tensor

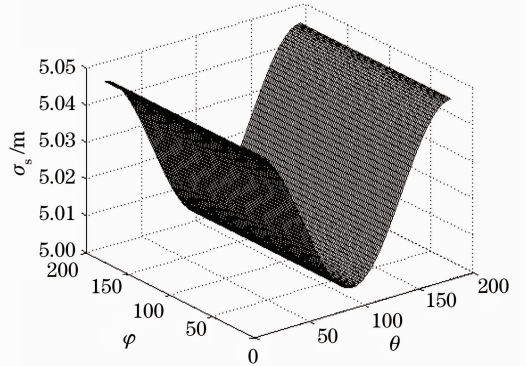


图 3 散射截面随测量方位的变化
Fig. 3 Scattering cross section versus the measuring angle

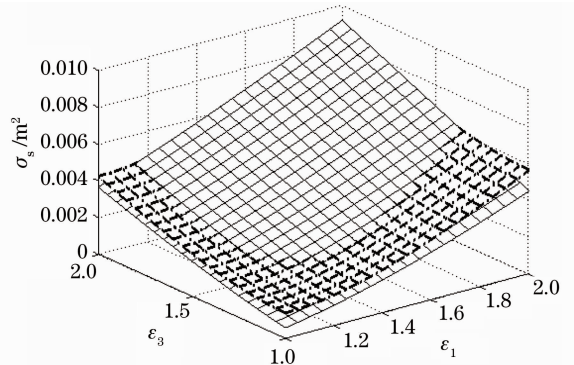


图 4 瑞利散射结果的比较
Fig. 4 Comparison of with Rayleigh scattering by different methods

足瑞利散射的条件,其中虚线为文献结果,实线为本文结果,可以看出,本文结果与文献结果有一定的误差,这是由于本文结果与文献结果都是一种近似地结果,它们近似的具体过程不同而引起的;但两种结果的变化趋势、数量级基本一致,表明了本文结果的正确。图5表明在目标大小一定的条件下,散射随介电常数张量的增大而增大,与图2的结果一致,当目标大小与波长相比拟时,散射最大;采用文献[11]所给参数计算散射效率,结果如图6所示,实线是本文所得结果,虚线为文献[11]利用T-矩阵方法所得结果,两种方法所得到的结果基本一致;将本文所得结果(9)式代入微分散射的定义,可以计算微分散射效率随散射角的变化,仿真结果如图7所示,两种曲线的变化趋势一致,表明了本文算法的有效性;本算法基于电磁场的多尺度变换,具有物理意义清晰,解析解相对直观的特点,基于解析表达式的仿真具有快速、占用计算资源少的优势。

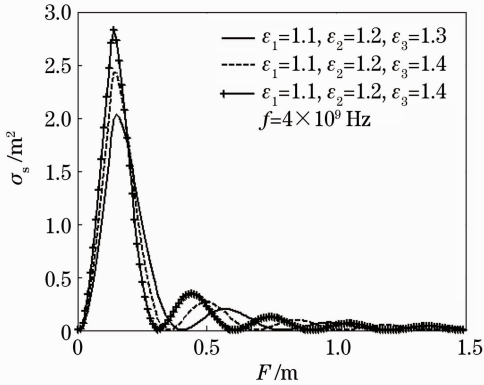


图5 散射截面随半径的变化

Fig. 5 Scattering cross section versus the radius

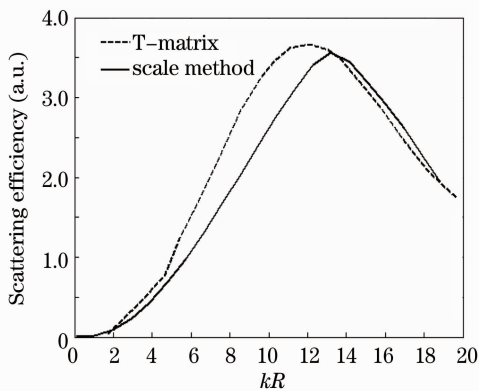


图6 散射效率随kR的变化

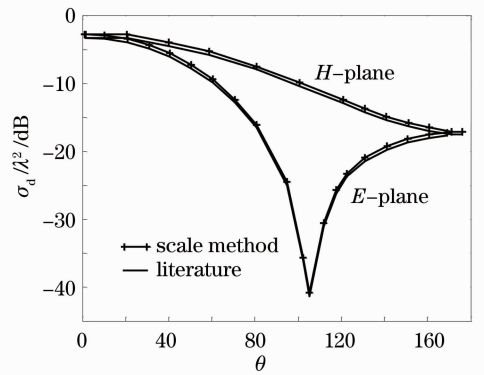
Fig. 6 Scattering efficiency versus kR 

图7 微分散射效率随散射角的变化

Fig. 7 Differential scattering efficiency versus scattering angle

4 结 论

基于电磁场的多尺度理论,将无耗各向异性介质重构为电学上的无耗各向同性介质,以球形目标为例,对其形状参数进行了估计分析,得到了重构后目标的散射截面;给出了面元矢量的多尺度变换关系,证明了电磁功率是尺度伸缩不变量,进而得到了主坐标系中无耗各向异性介质球的散射截面,发现该散射截面与入射波的方向有关,体现了目标的各向异性特性;仿真结果与现有各向异性目标散射的文献基本一致,将介质退化到各向同性介质时,所得结果与Mie理论完全一致,验证了所得结果的正确性;在目标尺寸与波长相比拟时对所得结果进行了仿真,结果表明:散射截面正比于目标介电常数张量的元素;散射截面随入射方向的变化而变化,并给出了这一变化的物理意义;如何利用电磁场的多尺度理论研究有耗各向异性介质球体、复杂形体各向异性介质目标的散射特性,是下一步将要开展的研究工作。

参 考 文 献

- 1 Hermann A. Haus. Waves and Fields in Optoelectronics[M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1984. 320~329
- 2 Van de Hulst, H. C.. Light Scattering by Small Particles[M]. New York: Wiley, 1957
- 3 A. Ishimaru. Wave Propagation and Scattering in Random Medium [M]. New York: Academic Press, 1978
- 4 Wen Jing, Zhuo Chunying. Fresnel formula of plane wave in anisotropic crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29** (7): 2000~2006
温 静, 左春英. 平面波在各向异性晶体中的菲涅耳公式 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(7): 2000~2006
- 5 Y. L. Geng, X. B. Wu, L. W. Li. Mie scattering by a uniaxial anisotropic sphere[J]. *Phys. Rev. E*, 2004, **70**(5): 056609

- 6 W. Ren. Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media [J]. *Phys. Rev. E*, 1993, **47**(1): 664~673
- 7 B. Stout, M. Nevier, E. Popov. Mie scattering by an anisotropic object. Part I. Homogeneous sphere [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2006, **23**(5): 1111~1123
- 8 T. Leung, A. K. Jin, K. H. Ding. Scattering of Electromagnetic Waves [M]. (Wiley-Interscience John Wiley & Sons, Inc.) 75~83
- 9 W. Ren. Spherical wave functions and dyadic Green's functions for homogeneous elastic anisotropic media [J]. *Phys. Rev. E*, 1993, **47**(6): 4439~4446
- 10 Zhang Weilin, Zhang Tingrong, Li Yantao. Propagation properties of controllable dark-hollow beams in uniaxial crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 0826001
张伟林, 张廷蓉, 李艳桃. 可控空心光束在单轴晶体中的传输特性 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(8): 0826001
- 11 A. D. Kiselev, V. Y. Reshetnyaba, T. J. Sluckain. Light scattering by optically anisotropic scatterers; T-matrix theory for radial and uniform anisotropies [J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **65**(5): 056609
- 12 Hong Minfang, Shen Jianqi, Zhang Qiuchang. Propagation of Gaussian beam through planar interface [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(7): 0702005
洪敏芳, 沈建琪, 张秋长. 高斯光束垂直入射到不同折射率介质中的传播规律 [J]. *中国激光*, 2011, **38**(7): 0702005
- 13 Wu Wei, Qin Shiqiao, Huang Zhuqing. A fast inversion method for water droplet size determination in scattering light measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(7): 0712008
吴伟, 秦石乔, 黄竹青. 水滴粒径散射测量中的快速反演方法研究 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(7): 0712008
- 14 Guo Yulan, Lu Mim, Tan Zhiguo. A novel method for ladar target orientation estimation [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(4): 0414002
郭裕兰, 鲁敏, 谭志国. 一种新的激光雷达目标姿态估计算法 [J]. *中国激光*, 2011, **38**(4): 0414002
- 15 Wu Lianghai, Gao J., Fan Zhiguo. Scattering of particles in the atmosphere and their influence on celestial polarization patterns [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(7): 0701005
吴良海, 高隽, 范之国. 大气粒子散射特性及其对空间偏振分布的影响 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(7): 0701005
- 16 Y. L. Li, J. Y. Huang. The scale-transformation of electromagnetic theory and its applications [J]. *Chin. Phys.*, 2005, **14**(6): 646~655
- 17 Li Yingle, Wang Mingjun, Dong Qunfeng. Investigation of electric field inside elliptical sphere with anisotropic medium [J]. *Equipment Environmental Engineering*, 2010, **7**(4): 1~4
李应乐, 王明军, 董群峰. 各向异性介质椭球内电场的研究 [J]. *环境装备工程*, 2010, **7**(4): 1~4
- 18 Y. L. Li, M. J. Wang. Rayleigh scattering for an electromagnetic anisotropic medium sphere [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2010, **27**(5): 054101

栏目编辑: 李文喆