

大气湍流中超短高斯激光脉冲的时间域展宽模型研究

张 璐^{1,2} 吴志勇¹ 高世杰¹ 崔 明^{1,2}

(¹ 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)
² 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要 穿过大气湍流的高斯激光脉冲在时间域的展宽行为与高斯脉冲通过理想高斯滤波器后的时域展宽行为相似。因此,为了激光通信信道仿真的需要,提出用级联巴特沃斯滤波器来逼近理想高斯滤波器的方法对这种时间域上的展宽行为进行建模。逼近后的高斯滤波器的 3 dB 频率点与大气湍流的物理参数(包括折射率结构常数和湍流外尺度)和传播几何路径长度联系在一起,从而将高斯脉冲的展宽与所通过的大气湍流环境参数相结合并得到了模拟高斯脉冲展宽的解析表达式。该模型和由模型参数表示的高斯脉冲展宽的解析表达式不仅在湍流弱起伏区有效,而且在从弱起伏到中等起伏再到强起伏的整个区域中都有效。

关键词 光通信;大气湍流;时间域展宽;逼近;高斯激光脉冲;高斯滤波器

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0401001

Study of Time-Domain Spreading Model of Ultrashort Gaussian Laser Pulses in Atmospheric Turbulence

Zhang Lu^{1,2} Wu Zhiyong¹ Gao Shijie¹ Cui Ming^{1,2}

(¹ Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China
² Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract The temporal spreading behavior of Gaussian laser pulses propagating through atmospheric turbulence is similar to the behavior of Gaussian pulses passing through Gaussian filter. Hence, a temporal spreading model, being a Gaussian filter approximated by cascading Butterworth filters in essence, is proposed for laser communication channel simulation. The 3 dB frequency point of the approximated Gaussian filter is closely associated with the physical parameters of atmospheric turbulence, including the structural constant of refractive index as well as the outer scale size of turbulence, and propagation path length. So the spreading of the Gaussian pulses is combined with the parameters of atmospheric turbulence, and an analytic expression for modeling the spreading is obtained. This model and the analytic expression represented by the model's parameters are not only valid in weak fluctuation regime but also in weak-moderate-strong regime.

Key words optical communications; atmospheric turbulence; time-domain broadening; approximation; Gaussian laser pulses; Gaussian filter

OCIS codes 010.1300; 060.5530; 200.1130; 320.5550

1 引 言

大气湍流会严重影响激光光束的质量^[1~3],对于激光脉冲信号,尤其是超短激光脉冲信号(飞秒和

皮秒量级),其通过大气湍流后会产生脉冲展宽,这种展宽会严重限制高数据速率激光通信系统的性能。脉冲展宽是脉冲漂移(pulse wander)和散射这

收稿日期: 2011-10-27; **收到修改稿日期**: 2011-11-28

基金项目: 中国科学院三期创新工程和长春光机所所内创新工程(Y10532B110)资助课题。

作者简介: 张 璐(1985—),男,博士研究生,主要从事自由空间光通信技术方面的研究。

E-mail: LZhangpai@gmail.com

导师简介: 吴志勇(1965—),男,研究员,博士生导师,主要从事光通信和光电测控设备总体技术等方面的研究。

E-mail: wzy0607@yahoo.com.cn

两种现象共同作用的结果^[4]。脉冲展宽量可以通过双频互相干函数(MCF)得到^[5]。在过去对 MCF 的研究中,绝大部分研究工作都基于一些有限的假设,例如均匀平面波假设^[6]、针对高斯大气谱模型的特殊情况^[7]、弱起伏理论和近场中折射率起伏的修正的冯卡尔曼(von Karman)谱模型^[8]。然而这些研究都是基于 Rytov 近似理论,从而使这些研究的结果只在大气湍流的弱起伏区有效^[9]。Young^[9]基于展宽的惠更斯-菲涅耳原理提出了在中等起伏到强起伏情况下适用的 MCF 的解析表达式。另外,针对仿真应用,Jurado-Navas 等^[10]提出了一个脉冲时间展宽模型并用在相关研究工作中^[11,12],但该模型仅在大气湍流的弱起伏区才适用。本文基于中心极限定理提出用级联巴特沃斯滤波器来逼近理想高斯滤波器的方法对高斯脉冲时间域上的展宽行为进行建模,通过数值实验对所提模型的有效性进行了验证。

2 理论模型

本文主要研究超短高斯激光脉冲沿水平路径穿过大气湍流的弱起伏到中等起伏再到强起伏区后的时间域展宽,而且所研究的模型是文献[7]的扩展。激光脉冲信号具有高斯包络形状,高斯脉冲为^[5]

$$v_i(t) = \exp(-t^2/T_0^2), \quad (1)$$

式中 T_0 为脉冲半峰全宽。 $v_i(t)$ 的傅里叶变换可以表示为

$$V_i(\omega) = T_0 \sqrt{\pi} \exp(-\omega^2 T_0^2/4). \quad (2)$$

高斯脉冲穿过大气湍流后的脉冲展宽可以通过高斯滤波器的时间域响应进行模拟,因此高斯脉冲穿过大气湍流后的输出信号仍然是高斯形状的脉冲^[7,10,13],用 $v_0(t)$ 表示穿过湍流后的脉冲信号,其表达式可假设为

$$v_0(t) = A \exp(-\beta t^2), \quad (3)$$

式中 A 为振幅, β 为正的常数。在频率域, $v_0(t)$ 的傅里叶变换为

$$V_0(\omega) = A \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\pi^2 f^2/\beta). \quad (4)$$

大气可以被看做一个线性系统^[7,13,14],因此在频率域中输入脉冲和输出脉冲之间的关系可表示为

$$V_0(\omega) = V_i(\omega)G(\omega), \quad (5)$$

式中 $G(\omega)$ 为大气的频率传递函数。

激光脉冲的时间域展宽仅由高斯滤波器的幅度响应进行模拟,因此将理想高斯滤波器的频率响应表示为

$$G(j\omega) = \exp(-a^2\omega^2), \quad (6)$$

式中 a 是与滤波器带宽有关的常数。用 x 代替 $a^2\omega^2$ 后高斯滤波器的幅度响应可以表示为 $|G(j\sqrt{x}/a)| = \exp(-x)$ 的形式。将(2)式和(6)式代入(5)式后得到

$$V_0(\omega) = T_0 \sqrt{\pi} \exp(-\omega^2 T_0^2/4) \exp(-a^2\omega^2). \quad (7)$$

比较(7)式和(4)式,可以得到

$$\beta = \frac{1}{T_0^2 + 4a^2}. \quad (8)$$

由角频率 $\omega_{3\text{ dB}}$ 的定义可知 $|G(j\omega_{3\text{ dB}})| = 1/\sqrt{2}$, 所以可以得到

$$a^2 = \frac{\ln 2}{2\omega_{3\text{ dB}}^2}, \quad (9)$$

因此

$$\beta = \frac{1}{T_0^2 + 2\ln 2/\omega_{3\text{ dB}}^2}. \quad (10)$$

定义 $t=\tau$ 是使 $v_0(\tau) = A/e$ 的输出高斯脉冲的半峰全宽,从而可得

$$\tau = 1/\sqrt{\beta} = \sqrt{T_0^2 + \frac{2\ln 2}{\omega_{3\text{ dB}}^2}}, \quad (11)$$

另外,输出高斯脉冲的半峰全宽在文献[5]表示为

$$T_2 = \sqrt{T_0^2 + 8\alpha}, \quad (12)$$

式中

$$\alpha = 0.322 \frac{\sigma_1^2 Q_0^{-5/6}}{\omega_0^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_1^2 = 1.23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad Q_0 = \frac{L}{kL_0^2}, \quad \omega_0 = kc, \quad (14)$$

式中 C_n^2 为折射率结构常数, L_0 为大气湍流的外尺度, L 为传播路径长度, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数。

结合(11)式和(12)式可以得到高斯滤波器的 3 dB 频率为

$$\omega_{3\text{ dB}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ln 2}{\alpha}}, \quad (15)$$

α 由(13)式定义。

理想高斯滤波器的截止频率 ω_c 定义为使幅度响应 $|G(j\omega)|$ 等于 $1/e$ 的频率点,由此可得截止频率的表达式为

$$\omega_c = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{0.644\sigma_1^2 Q_0^{-5/6}}}. \quad (16)$$

由以上讨论可知,高斯脉冲的展宽行为可以由理想高斯滤波器的时间域响应进行模拟,展宽量可由(11)式给出。但是理想高斯滤波器是非因果且物

理不可实现的,为了获得因果高斯滤波器,必须对理想高斯函数进行因果逼近。

通过使 $v_0(\tau)$ 等于 A/e , 得到(11)式给出的输出高斯脉冲的半峰全宽,在频率域通过使幅度响应 $|G(j\omega)|$ 等于 $1/e$, 得到理想高斯滤波器的截止频率 ω_c 。由类比可知 ω_c 是幅度响应 $|G(j\omega)|$ 的半峰全宽。为了准确地模拟高斯脉冲的展宽,必须在 $[-\omega_c, \omega_c]$ 的区间内对理想高斯滤波器的幅度响应 $|G(j\omega)|$ 进行逼近。为了减小逼近误差,将逼近区间展宽到 $[-1.5\omega_c, 1.5\omega_c]$ 。

由中心极限定理可知,通过级联均匀滤波器可逼近理想高斯滤波器^[15]。这意味着在频率域理想高斯滤波器的幅度响应是所有级联的均匀滤波器的幅度响应的乘积,故可以用巴特沃斯滤波器的级联来逼近高斯滤波器。定义一级巴特沃斯滤波器的幅度响应为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + \gamma(\omega/\omega_c)^2}, \quad (17)$$

式中 ω_c 为所要逼近的理想高斯滤波器的截止频率, γ 为调整系数。前面所述的级联逼近行为可以表示为

$$|G(j\omega)| = \exp(-a^2\omega^2) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + \gamma(\omega/\omega_c)^2} \right]^M, \quad (18)$$

式中 M 是级联巴特沃斯滤波器的级数。

从(18)式中可知, γ 和 M 是要求解的参数。在满足逼近误差的情况下,为了使级联滤波器的级数最小,先求解级数 M , 然后求解使误差最小的 γ 。

在区间 $[-1.5\omega_c, 1.5\omega_c]$ 上, $|G(j\omega)|$ 展开为有限项泰勒级数。将(6)式中的 $a^2\omega^2$ 替换为 x , 则展开区间变为 $x \in [0, 2.25a^2\omega_c^2]$ 。又由于 $a^2\omega_c^2 = 1$, 所以 $x \in [0, 2.25]$ 。在 $x = 0$ 处, 将函数 $g(x) = \exp(-x)$ 展开为泰勒级数, 即

$$g(x) = T_N(x) + E_N(x), \quad (19)$$

式中

$$T_N(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \dots + \frac{1}{N!}(-x)^N = \frac{1}{\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{N!}x^N\right)}, \quad (20)$$

而 $E_N(x)$ 为误差项。为了评估逼近误差, 定义最小平方误差为

$$\epsilon(x) = \int_0^{2.25} [g(x) - T_N(x)]^2 dx. \quad (21)$$

通过数值计算, 高斯函数展开为不同项数泰勒级数的误差如图 1 所示。

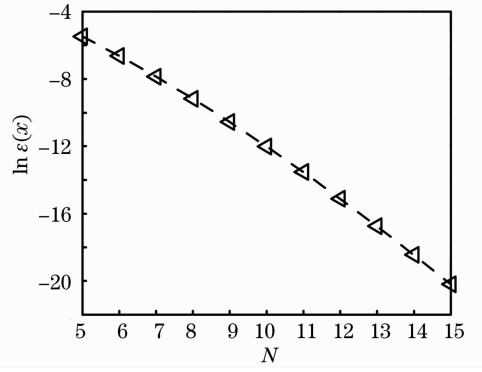


图 1 高斯函数的不同项数泰勒级数展开式的对数误差
Fig. 1 Logarithm of the error for various Gaussian function's terms series Taylor expansion

当泰勒级数的项数与级联滤波器的级数相等, 即 $N=M$ 时, 级联滤波器的级数最少, 此时有

$$|G(j\omega)| \approx 1 / \left[1 + (a^2\omega^2) + \frac{1}{2!}(a^2\omega^2)^2 + \dots + \frac{1}{N!}(a^2\omega^2)^N \right] \approx \left(\frac{1}{1 + \gamma(\omega/\omega_c)^2} \right)^N. \quad (22)$$

为求解系数 γ , 定义最小化目标函数为最小平方误差函数^[16]:

$$E(\gamma) = \int_{-1.5\omega_c}^{1.5\omega_c} \{ \exp(-a^2\omega^2) - [1 + \gamma(\omega/\omega_c)^2]^{-N} \}^2 d\omega. \quad (23)$$

为使目标函数最小, 对(23)式求 γ 的一阶导数和二阶导数, 令一阶导数为 0 且二阶导数大于或等于 0, 即

$$\frac{dE(\gamma)}{d\gamma} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d^2E(\gamma)}{d\gamma^2} \geq 0, \quad (25)$$

同时满足(24)和(25)式的 γ 可使目标函数(23)式取局部最小或严格局部最小^[17]。针对不同级数 M 用无约束最优化 DFP 算法^[18] 求得的 γ 值和级联逼近误差如表 1 所示。从表 1 可看出级联逼近误差都小于 10^{-3} , 且逼近误差随着级联级数的增加而减小, 因此级联逼近的方法完全可行。

让巴特沃斯滤波器逼近的高斯滤波器的幅度响应等于 $1/\sqrt{2}$, 即

$$\left[\frac{1}{1 + \gamma(\omega'_{3\text{dB}}/\omega_c)^2} \right]^M = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (26)$$

由此得到新的 3 dB 频率 $\omega'_{3\text{dB}}$ 的解析表达式为

$$\omega'_{3\text{dB}} = \omega_c \sqrt{\frac{2^{1/(2M)} - 1}{\gamma}}. \quad (27)$$

结合(14),(16)和(27)式可知由级联巴特沃斯滤波器逼近后的高斯滤波器的 3 dB 频率 $\omega'_{3\text{dB}}$ 与大气湍流的物理参数(包括折射率结构常数和湍流外尺度)和传输路径长度密切相关。通过这三个公式将这些参数结合到所提出的模型中。由此,经过逼近后的实际高斯滤波器的时间域响应给出的高斯脉冲的半峰全宽变为

$$\tau_2 = \sqrt{T_0^2 + 2\ln 2 / \omega'^2_{3\text{dB}}}. \quad (28)$$

表 1 用级联巴特沃斯滤波器逼近理想高斯滤波器的幅度响应产生的误差

Table 1 Approximation error for ideal Gaussian filter's magnitude response using cascading Butterworth filters

M	γ	Butterworth approximation
		error / 10^{-4}
5	0.2402	13
6	0.1952	9.9689
7	0.1638	7.6815
8	0.1409	5.9502
9	0.1236	4.7539
10	0.1101	3.9252
11	0.0992	3.2370
12	0.0903	2.7659
13	0.0828	2.3125
14	0.0765	2.0237
15	0.0711	1.8026

为了便于对比,定义本文逼近的高斯滤波器产生的脉冲半峰全宽 τ_2 和文献[5]中得到的脉冲半峰

全宽 T_2 之间的误差为

$$E = \frac{\tau_2 - T_2}{T_2}. \quad (29)$$

文献[2]中定义的理论脉冲宽度的标准差为

$$\sigma_{T_2} = T_2/2 = \sqrt{T_0^2/4 + 2\alpha}. \quad (30)$$

因此由(28)式产生脉冲宽度的标准差可以类似地定义为

$$\sigma_{\tau_2} = \tau_2/2. \quad (31)$$

3 数值结果

为了便于对比,进行数值仿真时在弱湍流起伏情况中使用和文献[5]相同的仿真参数,而在中等起伏到强起伏的情况中使用和文献[9]相同的仿真参数。

图 2 给出了脉冲的百分比展宽量 $(\tau_2 - T_0)/T_0$ 。在每个图中都仿真了三种不同的弱湍流强度($\sigma_1^2 = 0.2, \sigma_1^2 = 0.5, \sigma_1^2 = 0.8$)。选择参数 $N = 10, \gamma = 0.1101$ 作为仿真时模型的级联数和调整系数。图 2(a)中三条曲线有不同的物理参数,而且对应模型的截止频率由(16)式给出,分别为 $1.064 \times 10^{14}, 6.73 \times 10^{13}, 5.32 \times 10^{13}$ rad/s。图 2(b)中曲线对应的模型截止频率分别为 $2.186 \times 10^{13}, 1.1384 \times 10^{13}, 1.094 \times 10^{13}$ rad/s。从图中可以看出本文的模型得到的脉冲展宽和文献[5]中得到的脉冲展宽非常接近,因此模型在弱起伏区是有效的。

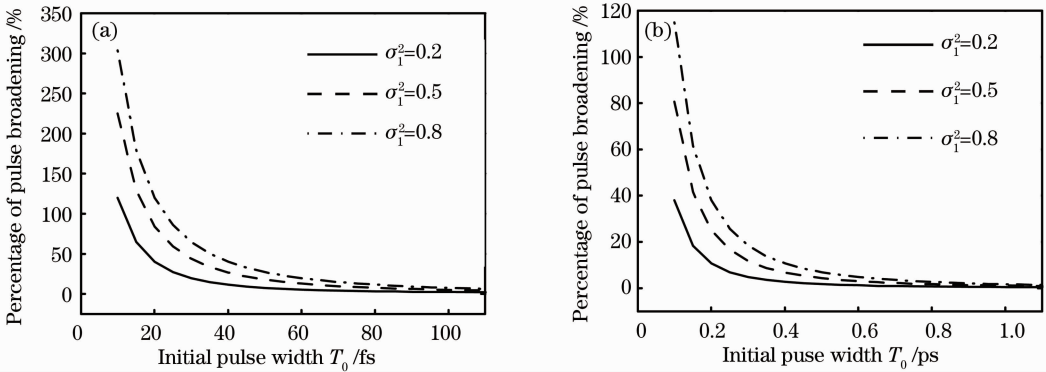


图 2 湍流弱起伏区中脉冲百分比展宽随初始脉冲半峰全宽的变化曲线。(a) $\lambda = 1.55 \mu\text{m}, Q_0 = 2.47 \times 10^{-4}$;
(b) $\lambda = 0.53 \mu\text{m}, Q_0 = 4.22 \times 10^{-7}$

Fig. 2 Percentage broadening versus initial half-pulse-width in weak turbulence regime. (a) $\lambda = 1.55 \mu\text{m}, Q_0 = 2.47 \times 10^{-4}$; (b) $\lambda = 0.53 \mu\text{m}, Q_0 = 4.22 \times 10^{-7}$

为了进一步验证本文所提出模型的有效性,比较由(12)式给出的时间展宽和由(28)式给出的时间展宽,同时利用(29)式来评估误差。该对比仿真中所用的所有物理参数都在表 2 中列出。模型产生的

误差曲线如图 3 所示。从图 3 可知,模型产生的相对误差较小,而且随着巴特沃斯滤波器级联数目的增加误差会进一步减小。针对 $T_0 = 100$ fs 和 $T_0 = 20$ fs 这两种情况,对比 τ_2 和 T_2 的误差曲线如图 4

所示。从图4可以看出本文模型所模拟的脉冲展宽与文献[5]中给出的脉冲展宽非常接近,而且随着级

联级数的增加越来越接近,模型产生的误差越来越小。

表2 用(12)和(28)式计算脉冲展宽时用到的物理参数

Table 2 Physical parameters for calculating pulse broadening using Eq. (12) and Eq. (28)

T_0/fs	$\lambda/\mu\text{m}$	$C_n^2/\text{m}^{-2/3}$	L/km	σ_1^2	Q_0	$\omega_0/(\text{rad/s})$
20	1.55	2.0×10^{-18}	100	0.2	2.47×10^{-4}	1.2×10^{15}
100	0.53	1.7×10^{-14}	0.5	0.33	4.22×10^{-7}	3.6×10^{15}

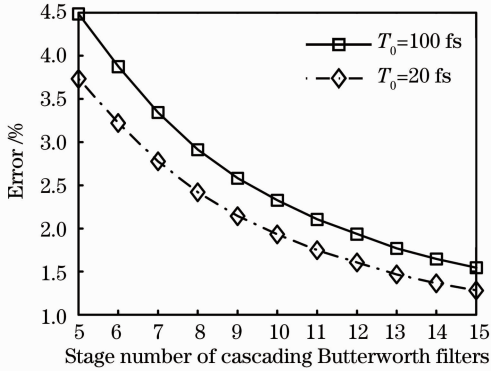


图3 由(12)和(28)式产生的时间展宽量之间的误差
Fig. 3 Error between the predicted temporal broadening using Eq. (12) and Eq. (28)

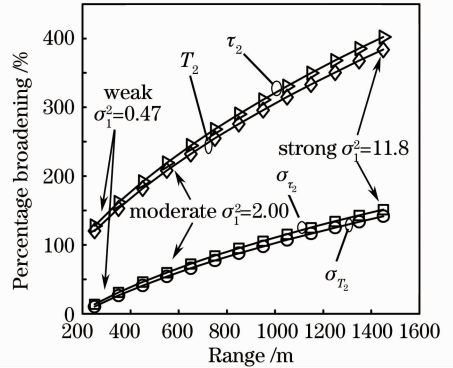


图5 弱起伏到中等起伏再到强起伏区中由(12),(28)式和(30),(31)式得到的百分比展宽量
Fig. 5 Broadening percentage calculated by Eq. (12), Eq. (28), Eq. (30) and Eq. (31) respectively in weak-moderate-strong regime

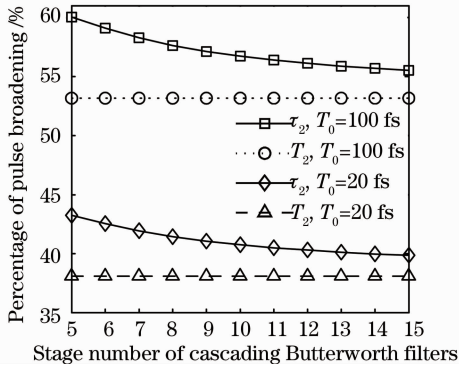


图4 $T_0=100\text{ fs}$ 和 $T_0=20\text{ fs}$ 时由(12)和(28)式产生的百分比展宽量

Fig. 4 Broadening percentage yielded by Eq. (28) and Eq. (12) for $T_0=100\text{ fs}$ and $T_0=20\text{ fs}$ respectively

为了验证模型在中等起伏到强起伏区域的有效性,对比了(28)式和(12)式产生的结果,同时还对比了(30)式和(28)式产生的结果,对比结果如图5所示。从图5中可以明显的看出 τ_2 曲线和 T_2 曲线非常接近,且 σ_{τ_2} 曲线和 σ_{T_2} 曲线也非常接近,可见 τ_2 与 T_2 之间的误差和 σ_{τ_2} 与 σ_{T_2} 之间的误差都非常小。该结果与文献[8]中的结果非常一致,因此模型在中等起伏到强起伏区也是有效的。

4 结 论

提出了基于逼近高斯滤波器理论来仿真超短高斯脉冲通过弱起伏到中等起伏再到强起伏区的时间域展宽行为。将高斯脉冲的展宽与逼近滤波器的3 dB频率点 $\omega'_{3\text{ dB}}$ 结合起来,同时又将该频率点与大气湍流的物理参数和传播几何路径长度联系在一起,从而将高斯脉冲的展宽与所通过的湍流环境参数相结合得到了模拟高斯脉冲展宽的解析表达式。通过数值结果对比可知模型在弱起伏到中等起伏再到强起伏区都产生很小的误差,因此该模型对于仿真超短高斯激光脉冲在大气湍流中的传输是有效的。

参 考 文 献

- Zhang Shuai, Qiao Na, Zhang Bin *et al.*. Propagation properties of annular beams in atmospheric turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(11): 3103~3109
张 帅, 乔 娜, 张 彬 等. 环状光束在大气湍流中的传输特性 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(11): 3103~3109
- Jing Xu, Wu Yi, Hou Zaihong *et al.*. Study of irradiance fluctuations for laser beam propagation in atmosphere [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(11): 3110~3116
靖 旭, 吴 毅, 侯再红 等. 湍流大气中激光传输光强起伏特征研究 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(11): 3110~3116

- 3 Yuan Hongwu, Mei Haiping, Huang Yinbo *et al.*. Research on atmospheric refraction correction algorithm and model for satellite laser range-finding[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(4): 1~7
袁宏武, 梅海平, 黄印博 等. 星载激光测距大气校正算法与模型研究[J]. *光学学报*, 2011, **31**(4): 1~7
- 4 D. E. Kelly, C. Y. Young, L. C. Andrews. Temporal broadening of ultra-short Gaussian space-time pulses with applications in laser satellite communications [C]. *SPIE*, 1998, **3266**: 231~240
- 5 C. Y. Young, L. C. Andrews, A. Ishimaru. Time-of-arrival fluctuations of a space-time Gaussian pulse in weak optical turbulence; an analytic solution [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(33): 7655~7660
- 6 G. Samelsohn, V. Freilikher. Two-frequency mutual coherence function and pulse propagation in random media [J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **65**(4): 046617
- 7 I. Sreenivasiah, A. Ishimaru. Beam wave two-frequency mutual coherence function and pulse propagation in random media; an analytic solution [J]. *App. Opt.*, 1979, **18**(10): 1613~1618
- 8 C. Y. Yong, A. Ishimaru, L. C. Andrews. Two-frequency mutual coherence function of a Gaussian beam pulse in weak optical turbulence; an analytic solution [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(33): 6522~6526
- 9 C. Y. Young. Broadening of ultra-short optical pulses in moderate to strong turbulence [C]. *SPIE*, 2002, **4281**: 74~81
- 10 A. Jurado Navas, J. Maria Garrido Balsells, M. Castillo Vazquez *et al.*. Numerical model for the temporal broadening of optical pulses propagating through weak atmospheric turbulence [J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(23): 3662~3664
- 11 A. Jurado-Navas, A. Garcia-Zambrana, A. Puerta-Notario. Efficient lognormal channel model for turbulent FSO communications [J]. *Electron. Lett.*, 2007, **43**(3): 178~179
- 12 A. Jurado-Navas, A. Puerta-Notario. Generation of correlated scintillations on atmospheric optical communications [J]. *J. Opt. Commun. & Networking*, 2009, **1**(5): 452~462
- 13 L. C. Andrews, R. L. Phillips. *Laser Beam Propagation Through Random Media* [M]. Bellingham: SPIE Press, 1998. 737~752
- 14 J. Klapper, M. Harris. On the response and approximation of Gaussian filters [J]. *IRE Trans. Audio.*, 1959, **7**: 80~87
- 15 W. M. Wells. Efficient synthesis of Gaussian filters by cascaded uniform filters [J]. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1986, **8**(2): 234~239
- 16 Li Qingyang, Wang Nengchao, Yi Dayi. *Numerical Analysis* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. 83~90
李庆杨, 王能超, 易大义. *数值分析* [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 83~90
- 17 U. Diwekar. *Introduction to Applied Optimization* [M]. New York: Springer Press, 2008. 47~51
- 18 Ma Changfeng. *Optimization and its Programming Method with Matlab* [M]. Beijing: Science Press, 2009. 67~69
马昌凤. *最优化方法及其 Matlab 程序设计* [M]. 北京: 科学出版社, 2009. 67~69

栏目编辑: 谢 婧