

# 双光子过程耦合腔系统中的纠缠特性

卢道明

(武夷学院电子工程系, 福建 武夷山 354300)

**摘要** 研究了双光子过程原子与耦合腔相互作用系统, 给出了系统总激发数等于 2 时态矢的演化。采用负本征值来描述两个子系统间的纠缠, 利用数值计算方法研究了系统中原子与原子间、腔场与腔场间和原子与腔场间的纠缠特性。讨论了腔场间的耦合强度变化对纠缠特性的影响。研究结果表明: 随着腔场间耦合的增强, 两原子间的纠缠增强, 但原子与腔场间和两腔场间的纠缠却减弱。

**关键词** 量子光学; 二能级原子; 双光子过程; 耦合腔; 量子纠缠

**中图分类号** O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0227001

## Entanglement Properties in the System of Atoms Interacting with Coupled Cavities via a Two-Photon Hopping Interaction

Lu Daoming

(Department of Electronic Engineering Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

**Abstract** Two identical cavities, each containing one two-level atom, coupled via a two-photon hopping interaction are considered. The evolution of the state vector of the system is given. Negativity is used to quantify the degree of entanglement. By means of numerical calculations, the temporal evolution in the entanglement between atoms, between cavities, as well as between the atom and the local cavity mode are investigated. The influence of cavity-cavity coupling coefficient on the entanglement is also discussed. The results show that the entanglement between atoms is strengthened, and that between cavities and that between the atom and the local cavity mode are weakened with the increase of cavity-cavity coupling coefficient.

**Key words** quantum optics; two-level atom; two-photon process; couple cavities; quantum entanglement

**OCIS codes** 270.5580; 020.5580

### 1 引 言

腔量子电动力学(QED)技术和囚禁离子技术是实现多比特纠缠态、量子信息处理和量子计算等最有前途的技术。1995年 Turchette 等<sup>[1]</sup>利用腔 QED 技术实验上第一次演示并测量了与量子逻辑门有关的相移。近十多年来, Hagley 等<sup>[2~5]</sup>利用腔 QED 技术在实验上成功实现两原子 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)纠缠态、两腔模的 EPR 纠缠态、三粒子 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态和两比特量子逻辑门等。近年来,由于分布式腔 QED 系统在量子计算中具有潜在的应用价值,因此耦合腔系统已成为量子信息处理的物理实现的热门研究之一。至今,人们已对耦合腔系统作了大量研究。例如, Zheng 等<sup>[6]</sup>提出一种利用原子与耦合腔相互作用系统产生双模压缩态

的方案, Yin 等<sup>[7]</sup>提出一种利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子态转换和逻辑门的方案, Yang 等<sup>[8]</sup>提出利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子相位门的方案。另一方面,由于双光子微波激射器的成功运转和双光子过程中原子具有周期性量子力学通道的特性,使双光子 Jaynes-Cummings 模型成为量子光学的重要模型和量子通信中正确传递量子信息的重要工具。因此,双光子过程成为人们深入研究的热点<sup>[9,10]</sup>。以往对耦合腔系统的研究主要集中在研究原子与腔场和腔与腔之间通过单光子过程耦合的情况,最近 Alexanian<sup>[11]</sup>提出了利用双光子过程耦合腔系统实现双光子转换的方案,但总的来说对双光子过程耦合腔系统的研究少有报道。

本文在单光子过程的基础上进行推广,研究两

收稿日期: 2011-08-16; 收到修改稿日期: 2011-09-05

基金项目: 福建省自然科学基金(2011J01018)资助课题。

作者简介: 卢道明(1963—),男,教授,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

个二能级原子和耦合腔构成的系统,考虑原子与腔场和腔与腔之间通过双光子过程耦合的情况,采用数值计算的方法研究了系统初始激发数等于 2 时,系统中两个原子之间、腔内原子与腔场之间和两个腔场之间的纠缠特性。

## 2 理论模型

双光子过程原子与耦合腔相互作用系统模型如图 1 所示。两个二能级原子(原子 1 和原子 2)分别囚禁在耦合腔 A 和 B 中,原子通过双光子跃迁与腔场发生共振相互作用,并且腔与腔之间通过双光子过程耦合。在旋波近似下,在相互作用绘景中系统的哈密顿算符为<sup>[11]</sup>

$$H_1 = f_1(a_A^\dagger s_1^+ + a_A^+ s_1^-) + f_2(a_B^\dagger s_2^+ + a_B^+ s_2^-) + J(a_A^\dagger a_B^{\dagger 2} + a_A^+ a_B^+), \quad (1)$$

式中  $a_A^\dagger, a_A, a_B^\dagger, a_B$  分别为腔场的产生和湮没算符,  $s_i^+$  和  $s_i^- (i = 1, 2)$  为第  $i$  个原子的赝自旋算符。  $f_1$  和  $f_2$  分别表示两个腔中原子与腔场的耦合系数,  $J$  为两个腔之间的耦合系数。定义激发数算符  $\hat{N} = |e_1\rangle\langle e_1| - |g_1\rangle\langle g_1| + |e_2\rangle\langle e_2| - |g_2\rangle\langle g_2| + a_A^\dagger a_A + a_B^\dagger a_B$ , 因  $[\hat{N}, H_1] = 0$ , 所以在系统演化过程中激发数守恒。  $|e_i\rangle$  和  $|g_i\rangle (i = 1, 2)$  分别表示原子的激发态和基态。

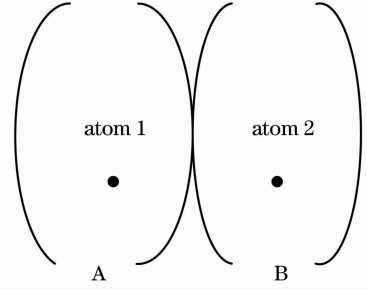


图 1 系统的框图

Fig. 1 Sketch of the system

当系统总激发数等于 2 时,在演化过程中,系统将保留在以  $|\varphi_1\rangle = |g_2\rangle_A |g_0\rangle_B, |\varphi_2\rangle = |g_0\rangle_A |g_2\rangle_B, |\varphi_3\rangle = |e_0\rangle_A |g_0\rangle_B, |\varphi_4\rangle = |g_0\rangle_A |e_0\rangle_B$  为基矢构成的子空间中。  $|g_0\rangle_A$  表示腔 A 中原子处于基态而腔场处于真空态。在该子空间中,系统的哈密顿算符的矩阵表示为

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2J & \sqrt{2}f_1 & 0 \\ 2J & 0 & 0 & \sqrt{2}f_2 \\ \sqrt{2}f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}f_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其本征值为:  $E_{1,2} = \pm \alpha, E_{3,4} = \pm \beta, \alpha = (f_1^2 + f_2^2 + 2J^2 + H)^{1/2}, \beta = (f_1^2 + f_2^2 + 2J^2 - H)^{1/2}, H = [(f_1^2 + f_2^2 + 2J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}$ 。相应的本征态为

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = P_1 \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{2}f_1} |\varphi_1\rangle + \frac{\alpha^2 - 2f_1^2}{2\sqrt{2}Jf_1} |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle + \frac{f_2(\alpha^2 - 2f_1^2)}{2J\alpha f_1} |\varphi_4\rangle \right] \\ |\psi_2\rangle = P_2 \left[ -\frac{\alpha}{\sqrt{2}f_1} |\varphi_1\rangle + \frac{\alpha^2 - 2f_1^2}{2\sqrt{2}Jf_1} |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle - \frac{f_2(\alpha^2 - 2f_1^2)}{2J\alpha f_1} |\varphi_4\rangle \right] \\ |\psi_3\rangle = P_3 \left[ \frac{\beta}{\sqrt{2}f_1} |\varphi_1\rangle + \frac{\beta^2 - 2f_1^2}{2\sqrt{2}Jf_1} |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle + \frac{f_2(\beta^2 - 2f_1^2)}{2J\beta f_1} |\varphi_4\rangle \right] \\ |\psi_4\rangle = P_4 \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{2}f_1} |\varphi_1\rangle + \frac{\beta^2 - 2f_1^2}{2\sqrt{2}Jf_1} |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle - \frac{f_2(\beta^2 - 2f_1^2)}{2J\beta f_1} |\varphi_4\rangle \right] \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $P_j$  为归一化常数。

为简单起见,设  $f_1 = f_2 = f$ 。假设初始时刻系统处于  $|\varphi_3\rangle = |e_0\rangle_A |g_0\rangle_B$  表示的状态。那么,任意时刻  $t$  系统的态矢为

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle = C |\varphi_1\rangle + D |\varphi_2\rangle + F |\varphi_3\rangle + G |\varphi_4\rangle \\ C = \frac{-i}{2\sqrt{2}fH} [\alpha(\beta^2 - 2f^2)\sin(\alpha t) - \beta(\alpha^2 - 2f^2)\sin(\beta t)] \\ D = \frac{1}{4\sqrt{2}fJH} (\alpha^2 - 2f^2)(\beta^2 - 2f^2) [\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)] \\ F = \frac{-1}{2H} [(\beta^2 - 2f^2)\cos(\alpha t) - (\alpha^2 - 2f^2)\cos(\beta t)] \\ G = \frac{-i}{4JH} (\alpha^2 - 2f^2)(\beta^2 - 2f^2) \left[ \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} - \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \right] \end{cases}. \quad (4)$$

### 3 原子与原子间纠缠的演化

为了度量两子系统间的纠缠,采用 Negativity 熵来描述两子系统间的纠缠,即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两个子系统,其纠缠可用部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值来定义:

$$N = -2 \sum_i \lambda_i, \quad (5)$$

式中  $\lambda_i$  是部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值。 $N = 0$  表示两子系统是分离的;  $N = 1$  表示两子系统处于最大纠缠态;  $0 < N < 1$  表示两子系统是纠缠的。利用(4)式,对腔场 A 和腔场 B 的态求迹,以  $|e_1\rangle|e_2\rangle$ ,  $|e_1\rangle|g_2\rangle$ ,  $|g_1\rangle|e_2\rangle$  和  $|g_1\rangle|g_2\rangle$  为基矢,可得到原子 1 和原子 2 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |F|^2 & FG^* & 0 \\ 0 & GF^* & |G|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 + |D|^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

利用(6)式可得到原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$N_{12} = \sqrt{(|C|^2 + |D|^2)^2 + 4|FG|^2} - (|C|^2 + |D|^2), \quad (7)$$

利用(7)式,可以计算出原子 1 和原子 2 间的纠缠量  $N_{12}$  随规范时间  $ft$  的演化。为了研究两个腔之间的耦合系数  $J$  的变化对纠缠的影响,  $J$  值分别取  $0.5f$ ,  $f$ ,  $4f$  和  $8f$  时,得到纠缠量  $N_{12}$  的演化如图 2 所示。从图 2 可以看出:随着腔场间耦合的增强,纠缠量  $N_{12}$  演化的周期性逐渐增强,  $J$  大于一定值后呈现出规则的周期性振荡,并且其振荡频率随  $J$  的增大而减小。另一方面,随着腔场间耦合的增强,曲线重心上升,纠缠量的平均值增大。例如  $J = 0.5f$  时,  $\bar{N}_{12} = 0.22825$ ;  $J = f$  时,  $\bar{N}_{12} = 0.28471$ ;  $J = 4f$  时,  $\bar{N}_{12} = 0.56133$ ; 而  $J = 8f$  时,  $\bar{N}_{12} = 0.59611$ 。这表明原子间的纠缠随着腔场间耦合的增强而增强,这一结果与单光子过程的结果一致<sup>[12]</sup>。但纠缠演化的振荡频率比单光子过程的振荡频率高。这是由于决定振荡频率的参数  $\alpha$  和  $\beta$  在耦合强度相同的情况下双光子过程比单光子过程大。例如,双光子过程

$$\alpha^2 = 2f^2 + 2J^2 + [(2f^2 + 2J^2)^2 - 4f^4]^{1/2},$$

而单光子过程

$$\alpha'^2 = \{2f^2 + J^2 + [(2f^2 + J^2)^2 - 4f^4]^{1/2}\}/2.$$

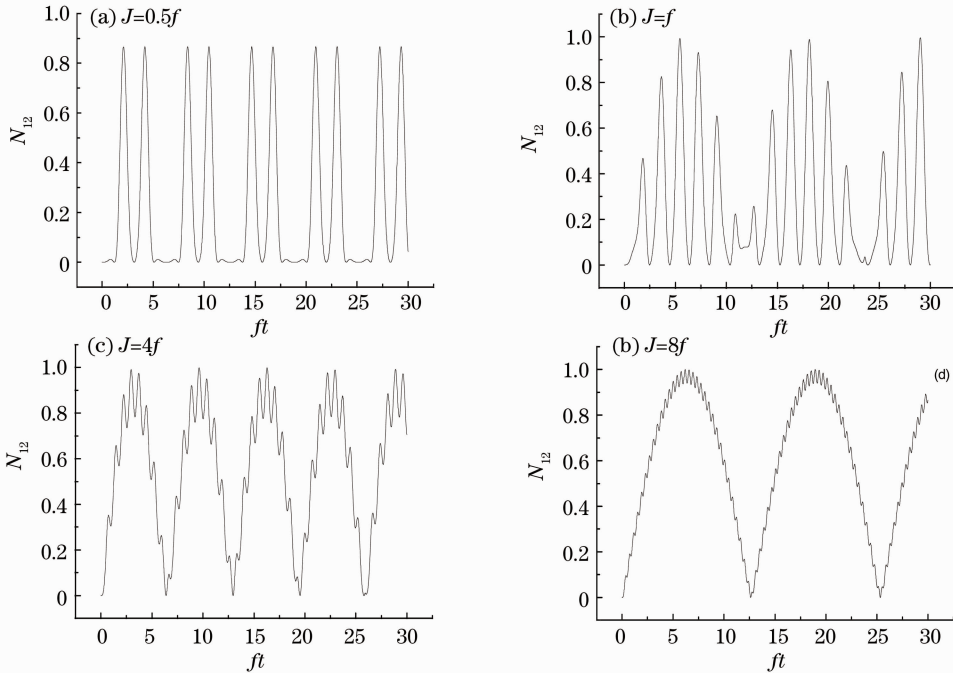


图 2 原子 1 与原子 2 间纠缠量  $N_{12}$  随规范时间的演化

Fig. 2 Time evolution of atom-atom entanglement  $N_{12}$

### 4 腔场 A 与腔场 B 间纠缠的演化

腔场 A 与腔场 B 间的纠缠仍然采用 Negativity 熵来描述。利用(4)式,对原子 1 和原子 2 的态求

迹,以  $|2\rangle_A|2\rangle_B$ ,  $|2\rangle_A|0\rangle_B$ ,  $|0\rangle_A|2\rangle_B$  和  $|0\rangle_A|0\rangle_B$  为基矢,可得到腔 A 和腔 B 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & CD^* & 0 \\ 0 & DC^* & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |F|^2 + |G|^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

利用(8)式,通过计算可得到腔 A 和腔 B 间的纠缠量为

$$N_{AB} = \sqrt{(|F|^2 + |G|^2)^2 + 4|CD|^2} - (|F|^2 + |G|^2). \quad (9)$$

为了分析两个腔之间的耦合系数对  $N_{AB}$  的影响,

求得  $J$  分别等于  $0.5f, f, 2f$  和  $4f$  时纠缠量  $N_{AB}$  随规范时间的演化,如图 3 所示。从图 3 可见:纠缠量  $N_{AB}$  随规范时间作不规则振荡。随着腔场间耦合的增强,振荡频率增大,曲线峰值下降、重心下移。这表明随腔场间耦合的增强,腔场 A 与腔场 B 间的纠缠减弱。这一结果与单光子过程的结果一致<sup>[12]</sup>。但其纠缠演化的振荡频率同样比单光子过程的振荡频率高。其原因同样是由于决定振荡频率的参数  $\alpha$  和  $\beta$  在耦合强度相同的情况下双光子过程比单光子过程大。

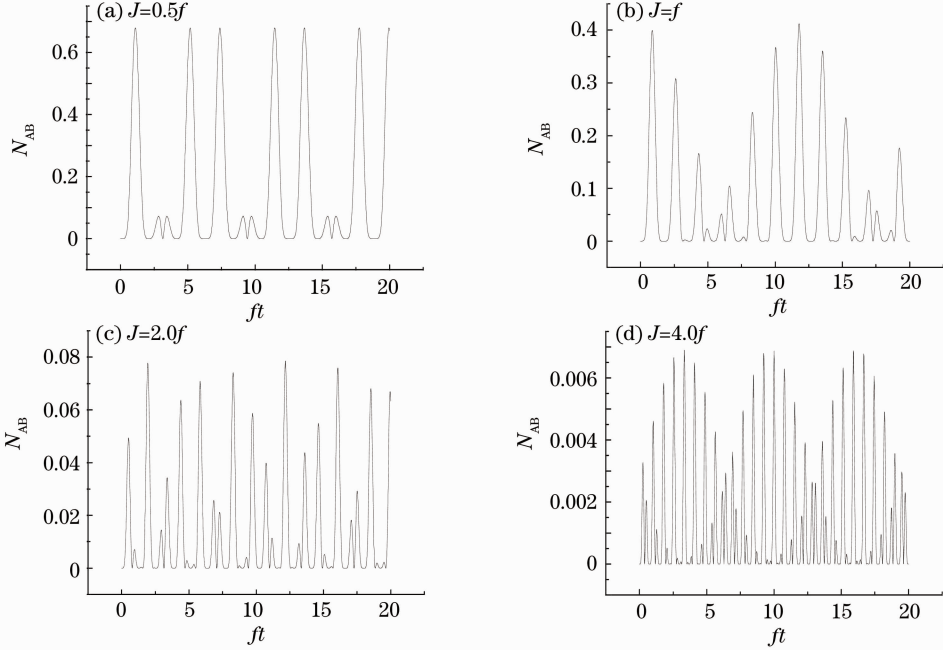


图 3 腔场 A 与腔场 B 间纠缠量  $N_{AB}$  随规范时间的演化

Fig. 3 Time evolution of cavity-cavity entanglement  $N_{AB}$

## 5 原子与腔场间纠缠的演化

原子 1 与腔场 A 间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述。利用(4)式,对原子 2 和腔场 B 的态求迹,以  $|e\rangle_1 |2\rangle_A, |e\rangle_1 |0\rangle_A, |g\rangle_1 |2\rangle_A$  和  $|g\rangle_1 |0\rangle_A$  为基矢,可得到原子 1 和腔 A 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |F|^2 & FC^* & 0 \\ 0 & CF^* & |C|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |D|^2 + |G|^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

利用(10)式可得到原子 1 和腔场 A 间的纠缠量为

$$N_{1A} = \sqrt{(|D|^2 + |G|^2)^2 + 4|CF|^2} - (|D|^2 + |G|^2). \quad (11)$$

利用数值计算方法可得出原子 1 和腔场 A 间的纠缠量  $N_{1A}$  随规范时间的演化,计算结果如图 4 所示。图 4(a)~(d) 分别与  $J$  取  $0.5f, f, 4f$  和  $8f$  的情况相对应。从图 4 可见:原子与腔场间的纠缠量作不规则振荡,振荡频率随腔场间耦合的增强而增大。但随着腔场间耦合的增强,曲线的峰值减小、重心下移。这表明随着腔场间耦合的增强原子与腔场间的纠缠减弱。进一步研究表明,原子 2 和腔场 B 间的纠缠演化与原子 1 和腔场 A 间的纠缠演化结果一致。

概括以上结果,可得出结论:随着腔场间耦合的增强,两原子间的纠缠增强,而原子与腔场间和两腔场间的纠缠减弱,这一结果与单光子过程的结果一致。不同的是其纠缠演化的振荡频率比单光子过程的振荡频率高。从物理机制上看,随着腔场间耦合

的增强,场模被激发的可能性降低,导致原子与场模间和场模之间的纠缠减弱。另一方面,随着腔场间

耦合的增强,初始的激发子由两原子分享的可能性增加,导致两原子间的纠缠增强。

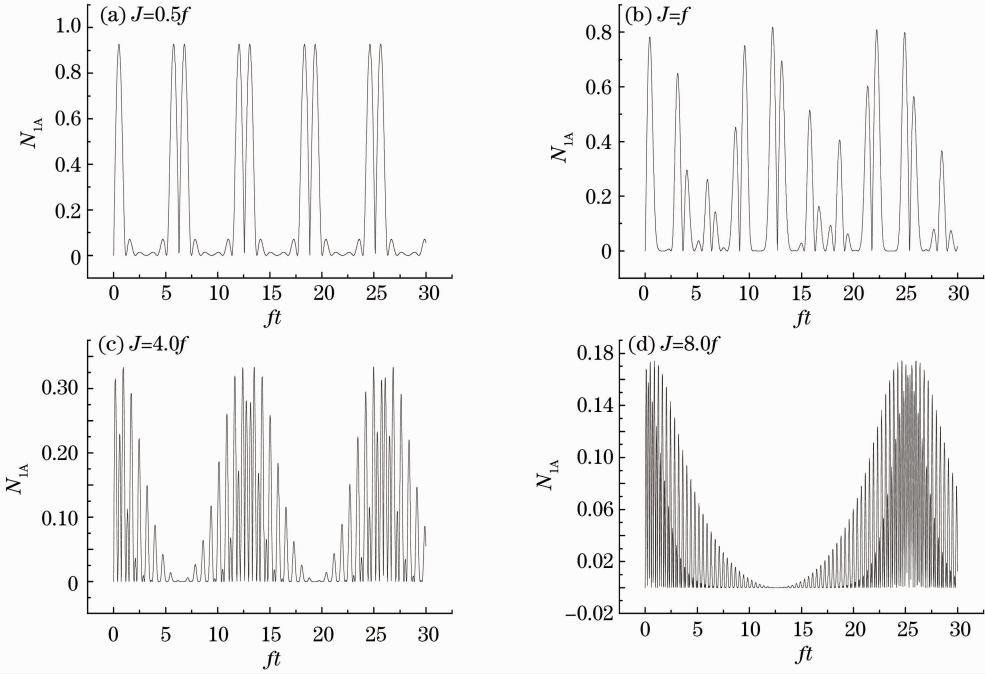


图 4 原子 1 与腔场 A 间纠缠量  $N_{1A}$  随规范时间的演化

Fig. 4 Time evolution of atom-cavity entanglement  $N_{1A}$

最后,讨论腔衰减的影响。这里采用近似估算的方法,取  $N' \approx (1 - \kappa t)N$ ,其中  $\kappa$  表示腔衰减系数, $N'$  为考虑腔衰减后的纠缠度,而  $N$  为未考虑腔衰减的纠缠度。取  $J = f, \kappa = 0.003f$ ,原子间纠缠  $N_{12}$  和原子与腔场间纠缠  $N_{1A}$  随规范时间的演化如图 5 和 6 所示。图中虚线表示考虑腔衰减的情况,而实线表示未考虑腔衰减的情况。从图 5 和 6 可见,在研究的演化时间内腔衰减对纠缠的影响不大。例如,在演化规范时间为 29.02 时,原子间纠缠  $N_{12}$  达到

峰值 0.99697,考虑腔衰减后为 0.91017,仍然保持高纠缠度。同样,在演化规范时间为 24.92 时,原子与腔间纠缠  $N_{1A}$  达到峰值 0.79869,考虑腔衰减后为 0.73898,仍然保持较高的纠缠度。进一步研究表明,腔衰减对腔场间纠缠的影响与上述结果一致。

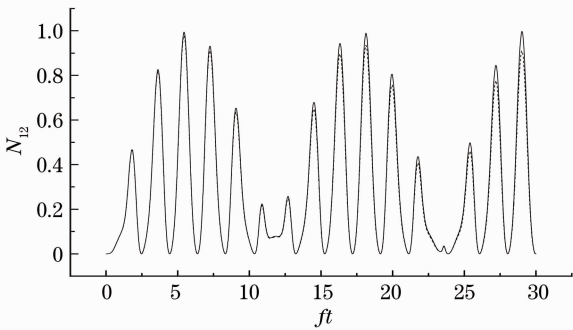


图 5 未考虑腔衰减(实线)和考虑腔衰减后(虚线)原子间纠缠量  $N_{12}$  随规范时间的演化

Fig. 5 Time evolution of atom-atom entanglement  $N_{12}$  without (solid) and with (dashed) considering the cavity attenuation

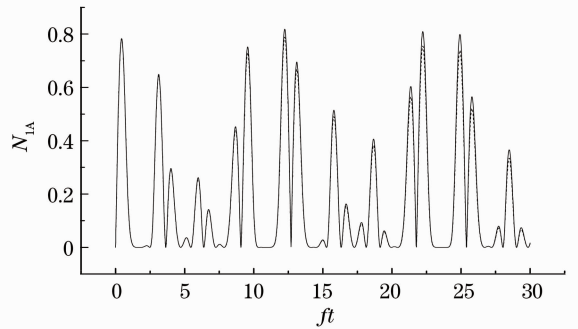


图 6 未考虑腔衰减(实线)和考虑腔衰减后(虚线)原子与腔场间纠缠量  $N_{1A}$  随规范时间的演化

Fig. 6 Time evolution of atom-cavity entanglement  $N_{1A}$  without (solid) and with (dashed) considering the cavity attenuation

## 6 结 论

将两个二能级原子(原子 1 和原子 2)分别囚禁在耦合腔 A 和 B 中,原子通过双光子跃迁与腔场发生共振相互作用,并且腔与腔之间通过双光子过程

耦合的情况。通过解薛定谔方程给出了总激发数等于 2 时系统态矢的演化公式。运用 Negativity 熵来描述两个子系统间的纠缠,采用数值计算方法给出了两个原子之间、两个腔场之间和原子与腔场之间的纠缠量随规范时间的演化曲线。讨论了耦合腔的耦合系数的变化对纠缠演化的影响。研究表明:随着耦合腔耦合系数的增大,两原子间的纠缠增强,而原子与腔场间和两腔场间的纠缠减弱。

## 参 考 文 献

- 1 Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange *et al.*. Measurement of conditional phase shifts for quantum logic [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(25): 4710~4713
- 2 E. Hagley, X. Maitre, G. Nogues *et al.*. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79**(1): 1~5
- 3 S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves *et al.*. Coherent control of an atomic collision in a cavity [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(3): 037902
- 4 A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi *et al.*. Step by step engineered many particle entanglement [J]. *Science*, 2000, **288**(5473): 2024~2028
- 5 A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi *et al.*. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity QED [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **83**(24): 5166~5169

- 6 S. B. Zheng, Z. B. Yang, Y. Xia. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, **81**(1): 015804
- 7 Z. Q. Yin, F. L. Li. Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(1): 012324
- 8 Z. B. Yang, Y. Xia, S. B. Zheng. Resonant scheme for realizing quantum phase gates for two separate atoms via coupled cavities [J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(15): 3052~3057
- 9 Liu Xiaojuan, Zhou Bingju, Fang Maofa *et al.*. Information entropy squeezing of the atom of an arbitrary initial state via the two-photon process [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 704~711
- 刘小娟, 周并举, 方卯发等. 双光子过程中任意初态原子的信息熵压缩 [J]. *物理学报*, 2006, **55**(2): 704~711
- 10 Xu Jingping, Yang Yaping. The time-dependent atom-field coupling J-C model with an initial squeezing state: two-photon process [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2): 251~255
- 许静平, 羊亚平. 压缩态光场变耦合系数双光子 J-C 模型性质 [J]. *光学学报*, 2005, **25**(2): 251~255
- 11 M. Alexanian. Two-photon exchange between two three-level atoms in separate cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2011, **83**(2): 023814
- 12 Lu Daoming. Entanglement properties in the system of atoms interacting with coupled cavities [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(9): 090302
- 卢道明. 原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性 [J]. *物理学报*, 2011, **60**(9): 090302

栏目编辑:李文喆