基于波像差函数建立大口径施密特校正板方程

潘宝珠[1,2] 程灏波[1] 文永富[1] 曹桂丽[1]

([1] 北京理工大学光电学院光机电工程联合研究中心，北京 100081
[2] 南通大学 理学院，江苏 南通 226019)

摘要 施密特光学系统由施密特校正板和球面反射镜组成，校正板设置在球面反射镜的球心处，系统的焦点不一定和反射镜的焦点重合。为了得到精确的校正板面形初始结构参数，基于波像差函数建立了带有离焦量的大口径施密特校正板的数学模型，同时校正了系统的三级和五级球差。利用光学设计软件对校正板口径为 1000 mm、主镜的曲率半径为 2000 mm、F 数为 1 的系统进行了设计和分析，来验证校正板面形数学模型的正确性。结果显示此校正板的数学模型与优化后结果吻合得较好，校正板面形初始结构参数的精度得到了极大的提高，这为大口径、大相对孔径的施密特光学系统的设计提供了理论基础。

关键词 光学设计；数学模型；非球面光学；施密特校正板；波像差函数

中图分类号 TH703 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201132.0222001

Establishment of an Equation of Schmidt Corrector Plate with Large Aperture Based on Wavefront Aberration Functions

Pan Baozhu[1,2] Cheng Haobo[1] Wen Yongfu[1] Cao Guili[1]

([1] *Joint Research Center for Optomechatronics Engineering, School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*
[2] *School of Science, Nantong University, Nantong, Jiangsu* 226019, *China*)

Abstract A Schmidt optical system consists of a Schmidt corrector plate and a spherical primary mirror, in which the corrector plate lies at the center of the spherical mirror. The focus of the system is not necessarily coincident with the one of the mirror. To precisely find the initial surface parameters of the corrector, a mathematical model based on wavefront aberration functions with the corrector plate surface varying as a function of defocusing amount is established. This model simultaneously corrects both the third-order and the 5th-order spherical aberrations for the system. A Schmidt optical system with aperture size 1000 mm, the mirror radius of curvature 2000 mm and the F number 1 is designed as an example to analyze and test the correctness of the mathematical model of the corrector. The results show that the mathematical model for the corrector agrees with the optimized result of the optical design software Zemax very well. The initial parameters of the optical system are improved greatly. It provided the theoretical foundation of the Schmidt optical systems design with the large aperture and the large relative aperture.

Key words optical design; mathematical model; aspheric optics; Schmidt corrector plat; wavefront aberration functions

OCIS codes 220.1250; 220.2740

1 引 言

1931 年德国光学家 G. wolfschmidt 设计了施密特光学系统。由于此光学系统结构简单、视场大，可以用于天文望远物镜、航空相机、红外物镜以及大

收稿日期：2011-05-16；**收到修改稿日期**：2011-09-08

基金项目：国家自然科学基金(60978043，61061160503，61128012)资助课题。

作者简介：潘宝珠(1979—)，男，博士研究生，讲师，主要从事自由曲面光学系统设计、先进光学制造技术等方面的研究。E-mail：ntunba@126.com

导师简介：程灏波(1975—)，男，教授，主要从事新型光学元件与系统及先进制造检测领域等方面的研究。E-mail：h_cheng@yahoo.cn

屏幕投影电视等一些成像系统。无论是透射式还是反射式施密特光学系统，前人都做了大量研究工作，取得了重要的研究成果[1~6]，尤其是对大口径、大相对孔径的施密特光学系统的应用将越来越广泛[7~9]。然而，先前得出的校正板初始结构参数在大口径、大相对孔径系统中误差较大，不利于对此类光学系统的认识和设计。

Schmidt 等[1,3,10]都用偶次多项式建立过消三级球差的施密特校正板的数学模型，由于系统的高级球差没有校正，所以此模型仅在小口径小相对孔径的光学系统中适用；Smith[11]建立了消五级球差的校正板面形的方程式，但是方程式没有考虑系统离焦，不能反映系统在不同离焦位置的校正板面形；苏定强等[12,13]研究了用光线追迹的方法精确求解校正板初始结构参数，但计算过程比较复杂。随着工程技术的发展，自由曲面加工和检测能力不断提高，光学系统的口径越来越大。建立简单而准确的大口径校正板面形的数学模型有利于光学系统的设计、有利于评估校正板的加工难度。

本文基于波像差函数建立了大口径施密特校正板的数学模型，同时校正了系统的三级和五级球差；利用光学设计软件对口径为 1000 mm，F 数为 1 的系统进行设计和分析，来验证校正板面形数学模型的正确性；最后分析了中性带与系统成像质量以及校正板面形的关系，为此类系统的设计提供了理论基础。

2　基本概念

施密特光学系统如图 1 所示，校正板 M_1 第一面是平面 $r_1 \to \infty$；第二面为非球面，非球面的顶点在球面反射镜 M_2 的球心 O 处，光栏位于非球面上；物体位于无限远处，即 $l_1 \to \infty$；P，M 点分别为未加校正板时反射镜的近轴光线、边缘光线与光轴的交点，C 点为加校正板后实际像面与光轴的交点。

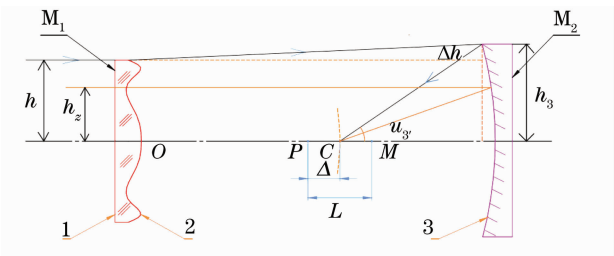

图 1　施密特光学系统草图

Fig. 1　Plot of Schmidt optical system

在求解施密特校正板的方程式之前认为施密特校正板是平行平板，由三级像差理论可知：在不考虑色差的情况下，系统只有球差和场曲，彗差、像散和畸变自动校正，校正板用来校正球面反射镜 M_2 的球差[3,10]。

根据三级像差理论可知，球面反射镜 M_2 的球差 L' 为

$$L' = \frac{h^2}{8f}, \tag{1}$$

式中 h 为系统的半口径，f 为反射镜焦距。加上校正板后系统的焦点不一定与反射镜的焦点重合，系统焦点到反射镜焦点的距离称为离焦量 Δ，通常离焦是在反射镜球差范围内进行的，因此离焦量的取值范围为

$$\frac{h^2}{8f} \leqslant \Delta \leqslant 0 . \tag{2}$$

为了方便分析还需要引入中性带的概念，中性带是指校正板上对平行光不发生偏转的带区，离焦量 Δ 与中性带的位置 h_z（校正板中心到中性带的距离，如图 1 所示）之间的关系为[10]

$$\Delta = \left(\frac{h_z}{h}\right)^2 \frac{h^2}{8f} . \tag{3}$$

3　校正板面形的数学模型

加入校正板以后，系统边缘光线在球面反射镜上的高度以及系统的焦距都发生了变化，所以在对施密特校正板数学建模时要考虑系统中各种参数与离焦量的变化关系。

3.1　反射镜口径与离焦量的关系

反射镜的口径随着校正板的口径和离焦量的变化而变化，利用三角函数可以得到它们之间的关系为

$$h_3 = h + 2\left(\Delta - \frac{h^2}{8f}\right)\tan\left(\frac{h}{\Delta - f}\right). \tag{4}$$

在相对孔径 A 不是很大时，$\tan\dfrac{h}{\Delta - f} = \dfrac{h}{\Delta - f}$，整理得

$$h_3 = \frac{2\left[\Delta - \dfrac{h^2}{8f}\right] + (\Delta - f)}{\Delta - f} h , \tag{5}$$

式中 h 为校正板的半高度，h_3 为球面反射镜的半高度，为了书写方便，将(5)式改写为

$$\begin{cases} h_3 = \beta h , \\ \beta = \dfrac{2[\Delta - h^2/(8f)] + (\Delta - f)}{\Delta - f}. \end{cases} \tag{6}$$

3.2　反向光线追迹

根据符号法则可知：f 和 Δ 均为负值，系统焦距 f_Δ 与离焦量 Δ 之间的关系[11]，以及后截距 $\Delta l'$ 与离焦量 Δ 之间的关系分别为

$$\begin{cases} f_\Delta = f + \Delta \\ l'_\Delta = f - \Delta \end{cases}. \tag{7}$$

根据高斯公式：

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}, \tag{8}$$

对各个面依次逆追光线，并且 $r_1 \to \infty$，可以解得校正板的顶点曲率半径为

$$r_{02} = \frac{(1-n)f(f+\Delta)}{-\Delta}. \tag{9}$$

对于大口径、大相对孔径的施密特光学系统，令校正板的方程式为

$$x = ay^2 + by^4 + cy^6 + dy^8 \cdots, \tag{10}$$

式中 $a = \frac{1}{2r_{02}}$，所以，

$$a = \frac{-\Delta}{2(1-n)f(f+\Delta)}, \tag{11}$$

式中 n 为校正板材料的折射率。

3.3 波像差法建立校正板面形的数学模型

如果系统不以反射镜的焦点为焦点，而是有一个离焦量，则离焦后球差可以表示为

$$L' = \frac{y^2}{8f} - \Delta, \tag{12}$$

令 $u'_3 = \frac{\beta y}{(\Delta + f)}$，则波像差表示[14]为

$$W_3 = \frac{n'}{2}\int_0^{u'^2_3}\left(\frac{y^2}{8f} - \Delta\right)\mathrm{d}u'^2_3 = -\frac{\Delta\beta^2 y^2}{2(\Delta+f)^2} + \frac{\beta^2 y^4}{32f(\Delta+f)^2}. \tag{13}$$

对于大口径、大相对孔径的光学系统，在消除三级球差以后，还有大量高级球差存在，它们对系统的成像质量仍有重要影响，因此必须加以校正。对高级球差的校正，可以通过适当改变参考点的位置来实现。在像差计算时，对于几何像差而言相当于改变了坐标原点的位置；对于波像差则相当于参考球面的半径发生了变化，新的参考球面与原来的参考球面之间的偏离就是参考点移动所产生的波像差。当参考点沿光轴移动 $\Delta l'$ 时，所引起的波像差的变化量 ΔW[14]为

$$\Delta W = \frac{n'}{2}\Delta l'\int_0^{u'^2}\mathrm{d}u'^2. \tag{14}$$

设参考点位置移动量为五级球差的大小，即 $\Delta l' = \frac{3y^4}{128f^3}$，则由此引起的波像差的变化量为

$$\Delta W_3 = \frac{n'}{2}\Delta l'\int_0^{u'^2_3}\mathrm{d}u'^2_3 = \frac{3\beta^2 y^6}{256f^3(f+\Delta)^2}. \tag{15}$$

令系统的波面像差 $\Sigma W_i = 0$， $W_1 = 0$， $W_2 = (n-1)x$，求解施密特校正板的数学表示式，

$$\Sigma W_i = W_2 + W_3 + \Delta W_3 = 0, \tag{16}$$

$$(n-1)x - \frac{\Delta\beta^2}{2(\Delta+f)^2}y^2 + \frac{\beta^2}{32f(\Delta+f)^2}y^4 + \frac{3\beta^2}{256f^3(\Delta+f)^2}y^6 = 0, \tag{17}$$

$$x = \frac{-\Delta\beta^2}{2(1-n)(\Delta+f)^2}y^2 + \frac{\beta^2}{32(1-n)f(\Delta+f)^2}y^4 + \frac{3\beta^2}{256(1-n)f^3(\Delta+f)^2}y^6, \tag{18}$$

即对于校正板方程(10)式，方程式系数为

$$\begin{cases} a = \dfrac{-\Delta\beta^2}{2(1-n)(\Delta+f)^2} \\ b = \dfrac{\beta^2}{32(1-n)f(\Delta+f)^2} \\ c = \dfrac{3\beta^2}{256(1-n)f^3(\Delta+f)^2} \end{cases}. \tag{19}$$

4 举例说明

以 F 数为 1 的施密特光学系统为例，来说明校正板面形数学模型的正确性。设校正板口径为 1000 mm，球面反射镜半径为 2000 mm，校正板材料为 K9，对于可见光范围内 $n_d = 1.5163$，$n_C = 1.5139$，$n_F = 1.52195$，取不同的离焦量，按照(1)，(2)，(3)，(6)，(11)，(19)式求解系统初始结构参数，并将这些参数代入到光学设计软件 Zemax 中，利用 Zemax 软件对光学系统进行像差校正，让边缘带球差为零。分别绘出球面反射镜半口径随离焦量变化曲线、校正板面形参数随离焦量变化的曲线以及不同离焦量时系统焦面上的点列图，如图 2～6 所示。

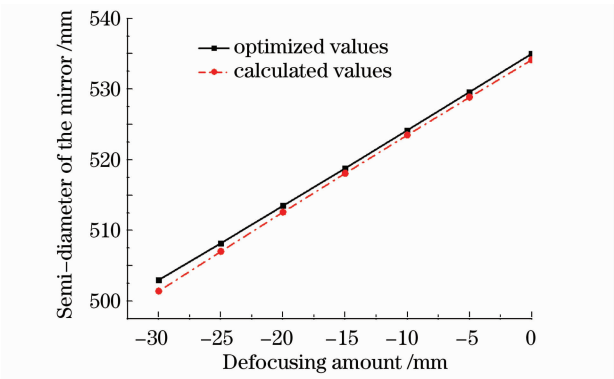

图 2 反射镜半口径随离焦量变化曲线

Fig. 2 Semi-diameters of the mirror versus defocusing amount

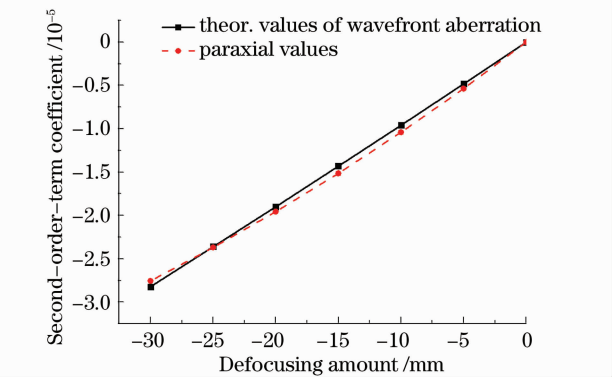

图 3　二次项系数随离焦量变化曲线

Fig. 3　Second-order-term coefficients of the aspheric surface versus defocusing amount

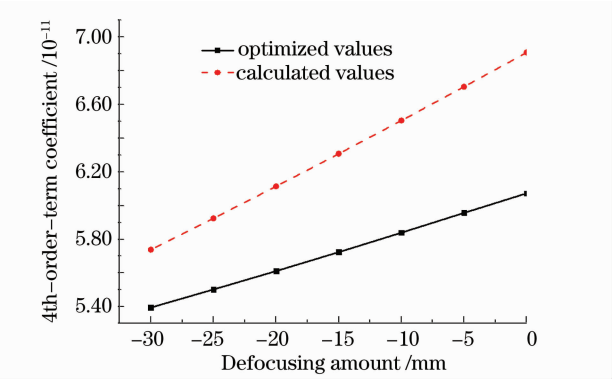

图 4　四次项随离焦量变化曲线

Fig. 4　4th-order-term coefficients of the aspheric surface versus defocusing amount

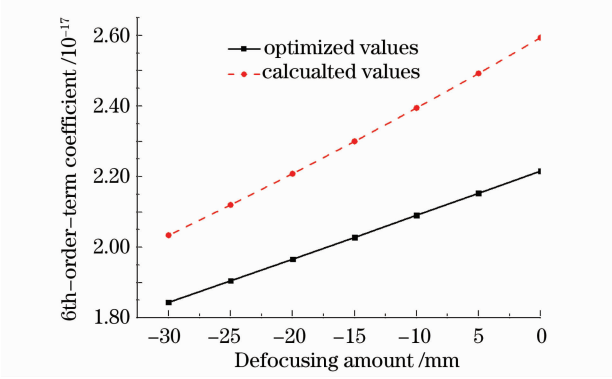

图 5　六次项系数随离焦量变化曲线

Fig. 5　6th-order-term coefficients of the aspheric surface versus defocusing amount

图 2 为反射镜半口径随离焦量变化的曲线，从图中可知：由(2)式算出的值和实际反射镜的口径随离焦量的变化是吻合的，说明(5)式的推导是正确的。

图 3 为校正板面形二次项系数随离焦量变化的曲线，从图中可知：两条曲线非常接近，说明用波像差法和近轴公式得到的结果是一致的，两者稍有差别的原因是波像差法是用边缘光线近似计算得到的。

图 4 和图 5 分别为校正板面形四次项系数和六次项系数随离焦量的变化曲线，可以看出两者的变化趋势是一致的，但在离焦量较小时两者的误差稍大。这是因为离焦量越小，反射镜口径越大，边缘光线偏折角度越大，高级像差也越大。

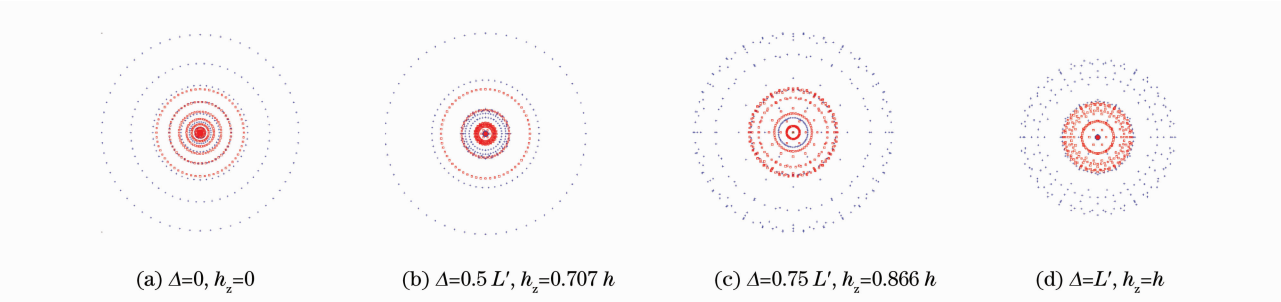

图 6　系统点列图

Fig. 6　Spot diagrams of the system versus defocusing amount

图 6 为系统在不同离焦量时焦面上的点列图。从图中可以看出，在 $\Delta=0$ 时，系统不离焦，此时焦面上的弥散斑最大；在 $\Delta=0.75L'$ 时，以 0.866 带为中性带，均方根(RMS)半径为 22.766 μm，几何半径 47.241 μm，此时系统弥散斑最小；在 $\Delta=0.5L'$，以 0.707 带为中性带时，系统弥散斑直径基本是以 0.866 带为中性带的弥散斑二倍。因此尽管以 0.707带为中性带时校正板面形偏离平面最小，校正板最容易加工[3,11]，但是弥散斑较大，相比以 0.866 带为中性带系统成像质量较差。对于本例即使是最小的弥散斑直径相对现有的接收器像元尺寸也是比较大的，成像质量不高，因此对于大口径大相对孔径施密特系统还要考虑消色差问题，以减小弥散斑直径，提高系统成像质量。

从上面的分析可以看出，用波差法建立的校正板面形的数学模型是正确的，可以作为此类光学系统的初始结构参数。实际上，对于校正板的顶点曲率半径，即二次项系数用近轴公式得到的结果应更

为准确。所以实际校正板面形方程式应为

$$\begin{cases} x = ay^2 + by^4 + dy^6 \\ a = \dfrac{-\Delta}{2(1-n)f(\Delta+f)} \\ b = \dfrac{\beta^2}{32(1-n)f(\Delta+f)^2} \\ c = \dfrac{3\beta^2}{256(1-n)f^3(\Delta+f)^2} \end{cases} . \tag{20}$$

5 结　　论

本文基于波像差函数建立了带有离焦变量的大口径施密特校正板的数学模型，系统同时校正了三级和五级球差。该模型可以适用于大口径大相对孔径的施密特光学系统，使校正板初始结构参数的精度得到了较大的提高。以 0.707 带为中性带，校正板面形偏离平面最小，校正板最容易加工；以 0.866 带为中性带时，校正板色差最小。因此对于口径和相对孔径较小的系统，色差影响不大时，校正板以 0.707 带为中性带较好，有利于校正板的加工。但是随着口径和相对孔径的增加，色差不可忽略时，校正板以 0.866 带为中性带，能够提高系统的成像质量。

参 考 文 献

1 G. Wolfschmidt. The development of the Schmidt telescope [J]. *Astron. Nachr*, 2009, **330**(6): 555～561

2 C. G. Wynne. The optics of the achromatizea UK Schmidt telescope [J]. *R. Astr. Soc.*, 1981, **22**(2): 146～153

3 Pan Junhua. The Design, Manufacture and Test of Aspheric Optical Surfaces [M]. Suzhou: Soochow University Press, 2004. 12～13, 72～81
潘君骅. 光学非球面的设计、加工与检验[M]. 苏州：苏州大学出版社，2004. 12～13，72～81

4 Su Dingqiang. Researches of Schmidt and achromatic Schmidt telescope[J]. *Acta Astronmica Sinica*, 1988, **29**(4): 384～396
苏定强. Schmidt 和消色差 Schmidt 望远镜的研究[J]. 天文学报，1988，**29**(4)：384～396

5 Shi Guanghui. A pseudo-schimidt system with through-twice afocal corrective lens[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(3): 373～375
史光辉. 具有两次透射的无光焦度校正透镜组的准施密特系统[J]. 光学学报，1998，**18**(3)：373～375

6 Daniel J. Schroeder. All-reflecting Baker-Schmidt flat-field telescopes [J]. *Appl. Opt.*, 1978, **17**(1): 141～144

7 W. Saunders, A. J. McGrath. A large reflective Schmidt telescope for the Antarctic correctorau [C]. 1st ARENA Conference on "Large Astronomical CONCORDIA, prospects and constraints for Antarctic Optical/IR Astronomy," 2007, 25: 261～264

8 Shouguan Wang, Dingqiang Su, Yaoquan Chu *et al.*. Special configuration of a very large Schmidt telescope for extensive astronomical spectroscopic observation [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(25): 5155～5161

9 J. B. Breckinridge, N. A. Page, R. R. Shannon *et al.*. Reflecting Schmidt imaging spectrometers [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(8): 1175～1180

10 Hao Peiming, Pan Baozhu, Li Hongguang *et al.*. Discussion and analysis of Schmidt system[J]. *Chinese J. Quantum Electron.*, 2006, **23**(6): 783～787
郝沛明，潘宝珠，李红光 等. 施密特系统探讨与分析[J]. 量子电子学报，2006，**23**(6)：783～787

11 W. J. Smith. Modern Optical Engineering [M]. New York: McGraw-Hill Press, 2000. 485～487

12 Su Dingqiang, Wang Yanan, Wang Lanjuan. The numerical calculation of aspherics in an optical system[J]. *Acta Astronemica Sinica*, 1984, **25**(1): 86～97
苏定强，王亚男，王兰娟. 光学系统中非球面的数值计算[J]. 天文学报，1984，**25**(1)：86～97

13 Andrea Romoli. Alessandro Zuccaro Marchi Lisa Gambicorti, Francessca Simonetti. Schmidt camera correctors for large telescopes[J]. *Appl. Opt.*, 2010, **49**(15): 2898～2902

14 Zhang Yimo. Applied Optics[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2008. 341～355
张以谟. 应用光学[M]. 北京：电子工业出版社，2008. 341～355

栏目编辑：谢　婧