随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵相位掩模压缩成像

张 成[1] 沈 川[1] 程 鸿[1] 杨海蓉[2] 韦 穗[1]

[1] 安徽大学计算智能与信号处理国家重点实验室，安徽 合肥 230039
[2] 合肥师范学院数学系，安徽 合肥 230069

摘要 压缩成像是一种基于压缩传感(CS)理论的新成像方法，其优点是可以用比传统的 Nyquist 采样定理所需测量数目少得多的测量值重建原稀疏或可压缩图像。在研究 Bernoulli 和 Toeplitz 测量矩阵的基础上，提出一种新的随机间距稀疏三元 Toeplitz 相位掩模矩阵。实验结果表明，在可压缩双透镜成像系统中，与 Bernoulli 和 Bernoulli-Toeplitz 相位掩模矩阵相比，新相位掩模矩阵的成像信噪比与之相当。但是随机独立变元个数和非零元个数显著减少，在数据存储与传输时更具优势，物理上更易实现，甚至重建时间是只有它们的 21%～66%。

关键词 图像处理；压缩传感；压缩成像；确定性测量；稀疏三元 Toeplitz 矩阵；相位掩模矩阵

中图分类号 TN911.7 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.0211002

Phase Mask of Sparse Trinary Toeplitz Matrix with Random Pitch in Compressive Imaging

Zhang Cheng[1] Shen Chuan[1] Cheng Hong[1] Yang Hairong[2] Wei Sui[1]

[1] *Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China*
[2] *Department of Mathematics, Hefei Normal University, Hefei, Anhui 230069, China*

Abstract Compressive imaging is a new imaging method based on the compressive sensing theory, which has the advantage of sparse/compressible image reconstruction with far fewer measurements than traditional Nyquist samples. By analyzing the existing Bernoulli and Toeplitz matrix, we propose a novel sparse trinary Toeplitz matrix with random pitch for phase mask. Simulation results show that novel phase mask matrices, comparing with Bernoulli and Bernoulli-Toeplitz phase mask matrices, almost have the same signal-to-noise ratio. But with dramatical reduction of the number of independent random variables and the number of non-zeros entries, the novel matrix is more conducive to data transmission and storage and easy for hardware implementation. Even more, the reconstruction time is only about 21%～66% to that of original matrices.

Key words image processing; compressive sensing; compressive imaging; deterministic measurement; sparse trinary Toeplitz matrix; phase mask matrix

OCIS codes 110.1758; 100.3010; 100.3190; 100.2960; 110.2970

1 引 言

最近几年来新出现的可压缩传感理论[1~5](CS)突破了传统的 Shannon-Nyquist 采样定理，作为信号/图像采样与重建的一个替代选择，其核心思想是寻求从远少于 Nyquist 采样的线性和非适应性测量中准确地恢复一个稀疏或可压缩信号。

收稿日期：2011-08-03；**收到修改稿日期**：2011-08-31

基金项目：国家自然科学基金(60872106)、安徽高校省级自然科学研究项目(KJ2011B131)、安徽大学研究生学术创新研究项目(yqh090063)和安徽大学青年基金(kjqn1010)资助课题。

作者简介：张 成(1984—)，男，博士研究生，主要从事光学成像和相位恢复等方面的研究。
E-mail：question1996@163.com

导师简介：韦 穗(1946—)，女，教授，博士生导师，主要从事图像处理和三维全息显示等方面的研究。
E-mail：swei@ahu.edu.cn(通信联系人)

众所周知，自然界中大多数场景图像在某些稀疏基或冗余字典上是稀疏或可压缩的，因此产生了CS理论的重要应用之一——压缩成像(CI)，其优点是可以用比传统的Nyquist采样定理所需要的测量数目少得多的测量值捕获充分信息重建稀疏或可压缩图像。单次曝光CI[6,7]，是实现CI的众多可能的光学成像方法中一种[6~14]。

测量矩阵的适当选择是CS理论走向实际应用的关键之一。目前，CI研究中多采用随机高斯测量矩阵、Bernoulli测量矩阵和傅里叶随机测量矩阵[2]。虽然这三种矩阵能高概率重建信号，但在CS应用中，上述三种线性投影的物理实现比较困难，成本较高。在许多应用中，由于物理条件的限制，降低测量矩阵的随机性非常迫切。文献[15～18]提出了几种有效的确定性测量作为CS测量。

本文在研究现有的Bernoulli和Toeplitz测量矩阵的基础上，将二者结合形成Bernoulli-Toeplitz(BT)矩阵，再在其独立元素中随机地引入零元，由此提出随机间距稀疏三元Toeplitz相位掩模矩阵。新的相位掩模矩阵的随机独立变元个数可以减少到原矩阵的1/2～1/16，矩阵非零元个数同样大大减少，有利于数据传输和存储。模拟实验结果表明本文提出的随机间距稀疏三元Toeplitz相位掩模矩阵的在重建效果与Bernoulli和BT相位掩模矩阵相当的同时，重建时间只有原来的21%～66%。此外，新相位掩模矩阵比现有的相位掩模矩阵由于只有三个不同值(0,±1)的原因，更易于物理实现，可以进一步减少物理实现成本。对于CI理论的研究与实际应用具有重要的意义。

2　可压缩双透镜相位掩模成像

对于在某一个基$\boldsymbol{\Psi}$上稀疏或可压缩的图像$\boldsymbol{f}$，在测量过程中，各种误差影响下的成像模型的测量$\boldsymbol{g}$可以写成

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{\Phi f}+\boldsymbol{e}, \tag{1}$$

式中$\boldsymbol{\Phi}$是测量矩阵，$\boldsymbol{e}$是噪声。上述问题最终可以通过求解下面的l_1最小化问题求解

$$\hat{\theta}=\operatorname{argmin}\|\theta\|_1,\ \|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\Phi\Psi}\theta\|_2\leqslant\varepsilon, \tag{2}$$

式中$\|\theta\|_1=\sum_{i=1}^{N}|\theta_i|$，$\boldsymbol{\Psi}$是稀疏基，$\varepsilon$是误差上限。对于(2)式的优化问题，Candès等[2~5]的结果表明，对于K稀疏的信号，一般只需要选取测量次数$M\approx3K\sim5K$基本可以保证高概率重建。

图1给出单次曝光CI——利用光学相位掩模在单次曝光条件下实现CI的光学示意图，其基本原理是通过光学相位掩模对光的不同相位延时实现CS测量中的随机投影[6,7]。在该系统中，物平面在透镜L_1前位置z_1，紧贴透镜右侧的是一个满足一定分布$\varphi(r)$的光学相位掩模，掩模右侧紧贴的是透镜L_2，像平面在距离透镜L_2右侧z_2：物体发射出来的光经过通过直径为D_1、焦距为f_{L_1}的透镜L_1聚焦，随后经过光学相位掩模进行随机调制，其散射光再经过直径为D_2、焦距为f_{L_2}的透镜L_2聚焦，最终物光波到达透镜后面的一个CCD检测阵列。整个测量过程是在单次曝光下完成的。

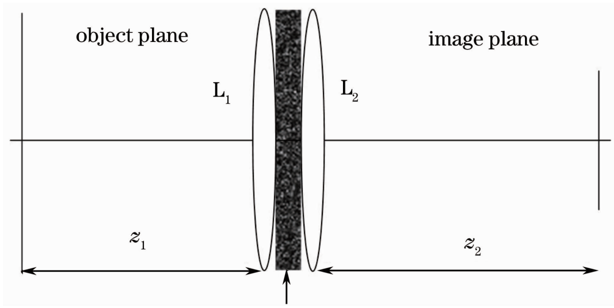

图1　单次曝光CI

Fig. 1　Single-shot CI

物平面上的任意点r_o与图像平面上的任意点r_i之间的对应关系可以用下面的公式描述[6]：

$$u(r_i,r_o)=\kappa_0\int\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z_1}(r_o-r_\varphi)^2\right]\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda f_{L_1}}r_\varphi^2\right]\exp[\mathrm{j}\varphi(r_\varphi)]\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda f_{L_2}}r_\varphi^2\right]\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z_2}(r_i-r_\varphi)^2\right]\mathrm{d}r_\varphi, \tag{3}$$

式中λ表示波长，$\varphi(r_\varphi)$是满足一定概率分布的光学相位掩模，f_{L_1}和f_{L_2}分别对应透镜L_1和L_2的焦距，κ_0是一个固定的乘法系数。(3)式定义了输入输出场之间的对应关系。参考文献[6]表明，如果图1中光学相位掩模的相关长度ρ_i关于成像系统的其他维足够小，那么算符$u(r_i,r_o)$的离散表示就能够完成所需CS测量[6]。

下面对(3)式的连续算符$u(r_i,r_o)$进行离散化处理。在均匀离散网格中，物平面上的点$f(x_o)$在点$x_o=n\Delta_o$，$-N/2\leqslant n\leqslant N/2-1$，$n\in\mathbb{Z}$处的采样和像平面上的点$g(x_i)$在点$x_i=m\Delta_i$，$-M/2\leqslant m\leqslant M/2-1$，$m\in\mathbb{Z}$处的采样之间的关系可以通过(3)式的离散形式描述，其具体形式如下式所示：

$$u(m\Delta_{\mathrm{i}},n\Delta_{\mathrm{o}})=\kappa_0\int_{-L/2}^{L/2}\exp\left[\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda z_1}(n\Delta_{\mathrm{o}}-\xi)^2\right]\exp\left[-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda f_{\mathrm{L}_1}}\xi^2\right]\exp[\mathrm{j}\varphi(\xi)]\exp\left[-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda f_{\mathrm{L}_2}}\xi^2\right]\times \exp\left[\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda z_2}(m\Delta_{\mathrm{i}}-\xi)^2\right]\mathrm{d}\xi, \tag{4}$$

式中 L 是光学相位掩模的物理尺寸，向量 $\boldsymbol{g}$ 是 M 个测量值 $g(m\Delta_{\mathrm{i}})$ 构成的向量，向量 $\boldsymbol{f}$ 由 N 个 $f(x_{\mathrm{o}})$ 的采样 $f(n\Delta_{\mathrm{o}})$ 组成，$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 之间的关系为

$$\begin{bmatrix} g(1\Delta x_i) \\ g(2\Delta x_i) \\ \vdots \\ g(M\Delta x_i) \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\Phi}_{m,n})_{M\times N}\begin{bmatrix} f(1\Delta x_o) \\ f(2\Delta x_o) \\ \vdots \\ f(N\Delta x_o) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{g}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{f}. \tag{5}$$

测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $M\times N$ 大小的矩阵，$\boldsymbol{\Phi}$ 中的元素可以表示为

$$\Phi_{m,n}=\kappa_0\int_{-L/2}^{L/2}\exp\left[\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda z_1}(n\Delta_{\mathrm{o}}-\xi)^2\right]\exp\left[-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda f_{\mathrm{L}_1}}\xi^2\right]\exp[\mathrm{j}\varphi(\xi)]\exp\left[-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda f_{\mathrm{L}_2}}\xi^2\right]\exp\left[\mathrm{j}\,\frac{\pi}{\lambda z_2}(m\Delta_{\mathrm{i}}-\xi)^2\right]\mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

3　随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵

目前 CS 理论中使用多采用的是大小 $M\times N$ 的随机 ±1 的 Bernoulli（或高斯）矩阵进行测量，但是物理实现成本较高，不利于大规模使用。因此，Bajwa 等[15~17]提出某些确定性矩阵，如 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{Toeplitz}}$，仅有 $O(N+M-1)$ 个自由元素，在重建效果和重建速度上与 Bernoulli 矩阵相当。理论上，Bernoulli 矩阵的随机性最好，其与任意固定基之间高概率非相干，但是由于自由元素太多，不能实现或实现成本太高，不利于广泛使用。因此改用自由元素较少，相对比较“确定”的且易于物理实现满足特定分布的光学相位掩模矩阵成了新的研究方向。本文在研究现有的 Bernoulli 和 Toeplitz 测量矩阵的基础上，将二者结合形成 BT 矩阵，再在其独立元素中随机地引入零元，由此提出随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵，Bernoulli 和 Toeplitz 矩阵的具体形式为

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{Berno}}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{Toeplitz}}=\begin{bmatrix} a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 \\ a_{N+1} & a_N & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N+M-1} & a_{N+M-2} & \cdots & a_M \end{bmatrix}, \tag{8}$$

式中，独立变量 a_{ij}，$i=1,\cdots,M$，$j=1,\cdots,N$ 满足 ±1 Bernoulli 分布。

以间距 $\Delta=2$ 的随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵为例，给出随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵的构造方法。在(8)式的基础上做出一些改进，对于如(8)式所示的一般 BT 矩阵，对由其第一行和第一列所有独立元素所构成的向量 $\boldsymbol{T}_1=[a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_N\quad a_{N+1}\quad \cdots\quad a_{N+M-1}]$ 做出随机间距稀疏的变化。向量 $\boldsymbol{T}_1$ 包含了(8)式 Toeplitz 矩阵中的所有独立元素。下面对向量 $\boldsymbol{T}_1$ 重新进行赋值，其元素 a_i[$i\in\Lambda$，Λ 是从 $1\sim N+M-1$ 索引序列中随机选取的 $\lfloor(N+M-1)/\Delta\rfloor$ 个索引] 值服从独立同分布（IID）的随机 Bernoulli 分布，$\boldsymbol{T}_1$ 向量中其他元素全部赋值为 0。然后根据 Toeplitz 矩阵的特点构造随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵：

$$a_{i+1,j+1}=a_{i,j}. \tag{9}$$

假如采用随机数生成器生成随机测量矩阵的，那么 Bernoulli 矩阵需要独立生成 MN 个独立元，一般的 BT 矩阵仅需要 $M+N-1$ 个独立元，矩阵的其他元素可以通过以下简单的操作实现。而本文提出的随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵仅需要生成 $\lfloor(N+M-1)/\Delta\rfloor|_{\Delta=2,\cdots,16}$ 个独立变量，其余元素赋值为 0。此外，稀疏三元 Toeplitz 的非零元只有 ±1 两种值，可以在保证重建精度的同时，降低相位掩模物理实现的难度与成本。

一个 $\Delta=8$ 的随机间距稀疏三元 Toeplitz 测量矩阵为 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T8}}$，类似地有 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T2}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T3}}$，…，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T16}}$ 等矩阵，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T8}}$ 的重建实验如图 2 所示。信号长度、测量次数和稀疏度等实验参数分别赋值如下：$N=256$，$M=128$，

$K=30$，稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 是单位矩阵，非零元振幅值是 ±1。其位置是随机选取，具有普适性。

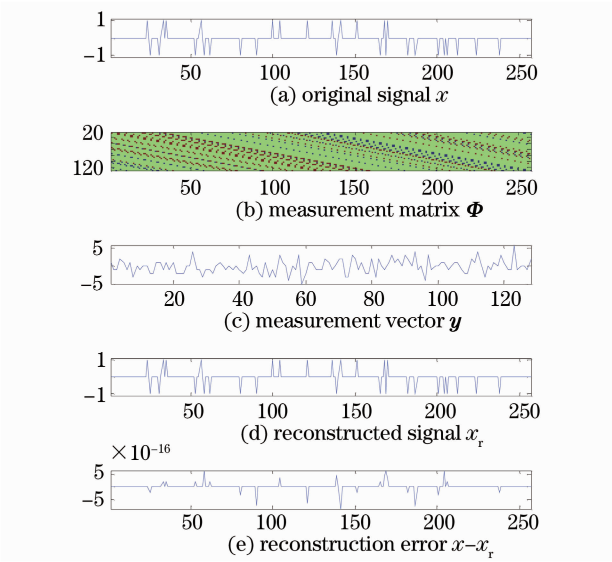

图 2　一维信号 CS 重建

Fig. 2　CS reconstruction for one dimensional signal

图 2(a)是原始信号 x，图 2(b)是测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，图 2(c)是测量向量 $\boldsymbol{y}$，图 2(d)是非线性重建算法恢复的估计 $\hat{x}$，图 2(e)是原始信号 x 与恢复信号 $\hat{x}$ 之间的差值 $x-\hat{x}$。子空间追踪算法(SP)[18]是 CS 的众多重建恢复算法的一种[19~22]。它是目前求解(2)式的最有效的算法之一，无论是在重建速度和重建成功率方面都有优秀的性能表现。在本文的实验中，各种矩阵的测试都与此类似，当重建误差小于某个阈值(选用 10^{-6})，表示此次重建成功，否则重建失败，此处采用 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T8}}$ 矩阵作为一种一般性的说明，其他测量矩阵与此过程类似，采用的是同样的方式。

比较不同测量矩阵恢复成功率的实验结果如图 3 和图 4 所示。其中图 3 中 $N=256$，稀疏度 $K=30$ 保持不变，K 个非零系数值是 ±1，测量次数 $M=80\sim140$，测量次数步长选择 3。图 4 的实验中 $N=256$，测量次数 $M=128$ 保持不变，稀疏度 $K=20\sim60$，稀疏度每次增加 2。对每组参数(N,M,K) 独立测试 1000 次，统计其重建成功比率。

从图 3 与图 4 的测试结果可以明显看出，改进的矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T2}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T3}}$，…，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T16}}$ 在成功恢复百分比方面优于 Bernoulli 矩阵和一般的 BT 矩阵，但是独立变量个数分别只有一般 BT 矩阵独立元素个数的 1/2，1/3，…，1/16。如果采用本文提出的随机间距稀疏三元Toeplitz矩阵应用到无线传感器网络中，可以在

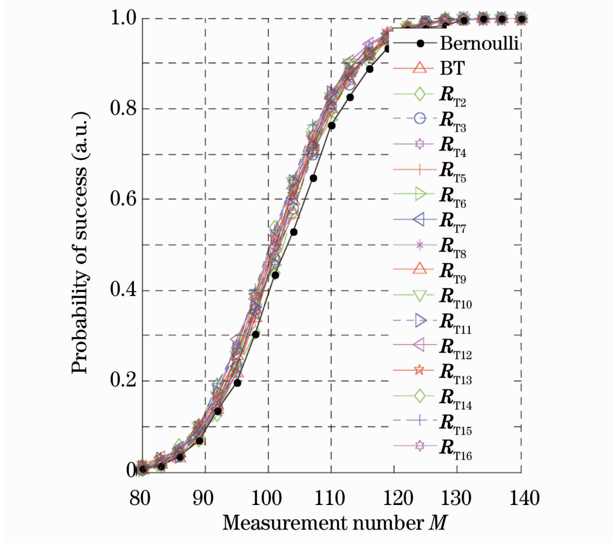

图 3　重建成功概率与测量次数 M 的关系

Fig. 3　Probability of success rate as a function of measurements number M

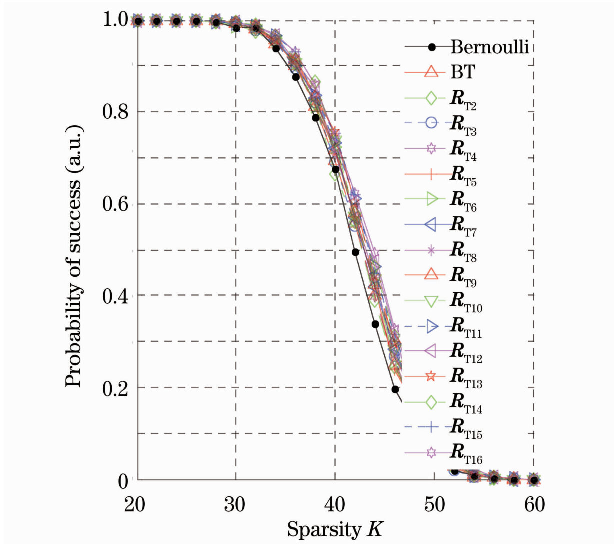

图 4　重建成功概率与稀疏度 K 的关系

Fig. 4　Probability of success as a function of sparsity level K

保持准确度的情况下将传感器的使用寿命延长 2～16 倍，甚至更长地使用时间，可以有效降低无线传感器网络的成本。

由表 1 可以明显看出，本文提出的相位掩模矩阵在独立变元和非零元以及相应的存储空间上都有显著的下降，只有原 BT 矩阵存储空间的 1/2～1/16，大大地降低了存储成本以及物理实现的难度。

表 1　不同测量矩阵中独立元素、非零元个数和存储空间的比较

Table 1　Comparison of different matrices on the number of independent entries, non-zero entries and storage space

	Independent entries and storage	Non-zero entries and storage
Bernoulli	MN	MN
BT	$M+N-1$	MN
$\boldsymbol{R}_{T2}$	$\lfloor (M+N-1)/2 \rfloor$	$M\lfloor N/2 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T3}$	$\lfloor (M+N-1)/3 \rfloor$	$M\lfloor N/3 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T4}$	$\lfloor (M+N-1)/4 \rfloor$	$M\lfloor N/4 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T5}$	$\lfloor (M+N-1)/5 \rfloor$	$M\lfloor N/5 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T6}$	$\lfloor (M+N-1)/6 \rfloor$	$M\lfloor N/6 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T7}$	$\lfloor (M+N-1)/7 \rfloor$	$M\lfloor N/7 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T8}$	$\lfloor (M+N-1)/8 \rfloor$	$M\lfloor N/8 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T9}$	$\lfloor (M+N-1)/9 \rfloor$	$M\lfloor N/9 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T10}$	$\lfloor (M+N-1)/10 \rfloor$	$M\lfloor N/10 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T11}$	$\lfloor (M+N-1)/11 \rfloor$	$M\lfloor N/11 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T12}$	$\lfloor (M+N-1)/12 \rfloor$	$M\lfloor N/12 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T13}$	$\lfloor (M+N-1)/13 \rfloor$	$M\lfloor N/13 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T14}$	$\lfloor (M+N-1)/14 \rfloor$	$M\lfloor N/14 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T15}$	$\lfloor (M+N-1)/15 \rfloor$	$M\lfloor N/15 \rfloor$
$\boldsymbol{R}_{T16}$	$\lfloor (M+N-1)/16 \rfloor$	$M\lfloor N/16 \rfloor$

4　模拟实验

利用菲涅耳理论模拟实现 2D 场的传播。实验中，设定物体像素大小是 1 mm，CCD 像素大小是 100 μm，中心波长为 $\lambda_0 = 0.55$ μm，距离 $z_1 = z_2 = 140$ mm，透镜焦距 $f_{L_1} = f_{L_2} = 280$ mm。光学相位掩模的相干波长 ρ 假设为 5 μm；两透镜的直径 $D_1 = D_2 = 50$ mm。由于计算机资源的限制，限定物体有 64 pixel×64 pixel。对应于这种大小的图像，矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的大小都是 4096×4096。其中，$\boldsymbol{\Phi}$ 的每一行对应一个移变点扩展函数，选 $\boldsymbol{\Phi}$ 的前 M 行向量构成测量矩阵。

CS 的测量重建效果很大程度上取决于测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 是否满足限制等距性质(RIP)充分条件以及 $\boldsymbol{\Phi}$ 和稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 之间的相干性的大小，相干性的定义如下：

$$\mu = \sqrt{N} \max_{i,j} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle|, \tag{10}$$

式中 ϕ_i 和 ψ_j 分别表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 i 列和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的第 j 列。相干性 μ 值的大小从某种程度上决定了该测量矩阵捕获所有稀疏信号的能力，是该测量矩阵最差情况下的一种性能表征，是理论上的参考指标之一。RIP 充分条件一般都比较难以验证，对于本文的光学成像系统，在满足本文给定的条件下，可以保证它对应的测量矩阵的列是非相关的，该非相关性在某种程度上近似与 RIP 条件的要求一致。本文在参考文献[6]的基础上，推导出本文的系统满足矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的列非相关所需的条件如(11)～(13)式所示，给定的参数满足相关条件：

$$5\times10^{-6} = \rho \ll 2\sqrt{\frac{\lambda}{\left[\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}-\left(\frac{1}{f_{L_1}}+\frac{1}{f_{L_2}}\right)\right]}} = 5.55\times10^{-4}, \tag{11}$$

$$1\times10^{-3} = \Delta_o \gg \frac{2\lambda z_1}{L} = 3.08\times10^{-6}, \tag{12}$$

$$1\times10^{-3} = \Delta_o \gg \rho z_1\left[\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}-\left(\frac{1}{f_{L_1}}+\frac{1}{f_{L_2}}\right)\right] = 5\times10^{-6}. \tag{13}$$

因此，$\boldsymbol{\Phi}$ 的列是非相关的，满足测量矩阵相关随机性要求[6]。

4.1　l_1 模优化图像重建

在实际应用中，由于各种因素的影响，往往会引入诸多误差。图 5 和图 6 分别是 Lena 图像和 Cameraman 图像在图 1 所示的光学采样系统中获得的测量值在噪声方差 $\sigma^2 = 0.5$ 的情况下采用不同的相位掩模矩阵的重建结果。图像灰度值归一化到[0,1]之间，测量值 $M = 3000$，测量矩阵的每一行的 l_2 范数为 1，噪声向量 $\boldsymbol{e}$ 是高斯噪声，其 l_2 范数同样为 1，测量值 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\Phi f} + \boldsymbol{e}\sigma^2$。

Lena 图像在不同测量矩阵下的重建结果如图 5 所示，其中图 5(a)是标准 Lena 图像(图像大小为 64 pixel×64 pixel)，稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 为 Daubechies 5 小波基，稀疏度 $K = 868$，测量次数 $M = 3000$，是原有总像素数的 73.24%。图 5(b)～(r)分别是采用 Bernoulli，BT，$\boldsymbol{R}_{T2}$，$\boldsymbol{R}_{T3}$，…，$\boldsymbol{R}_{T16}$ 矩阵相位掩模的重建结果。

Cameraman 图像在不同测量矩阵下的重建结果如图 6 所示，其中图 6(a)是标准 Cameraman 图像(图像大小为 64 pixel×64 pixel)，稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 为 Daubechies1 小波基，稀疏度 $K = 734$，测量次数 $M = 3000$，是原有总像素数的 73.24%。图 6(b)～(r)分别是采用 Bernoulli，BT，$\boldsymbol{R}_{T2}$，$\boldsymbol{R}_{T3}$，…，$\boldsymbol{R}_{T16}$ 矩阵相位掩模的重建结果。

比较两幅图像的重建结果，Lena 图像的重建效果要差于 Cameraman 图像，这是因为 Lena 图像的稀疏度 K 比 Cameraman 图像的稀疏度大得多，所以同样的测量次数下，Cameraman 图像的效果要好一些。

图 5　Lena 图像重建

Fig. 5　Reconstruction of Lena image

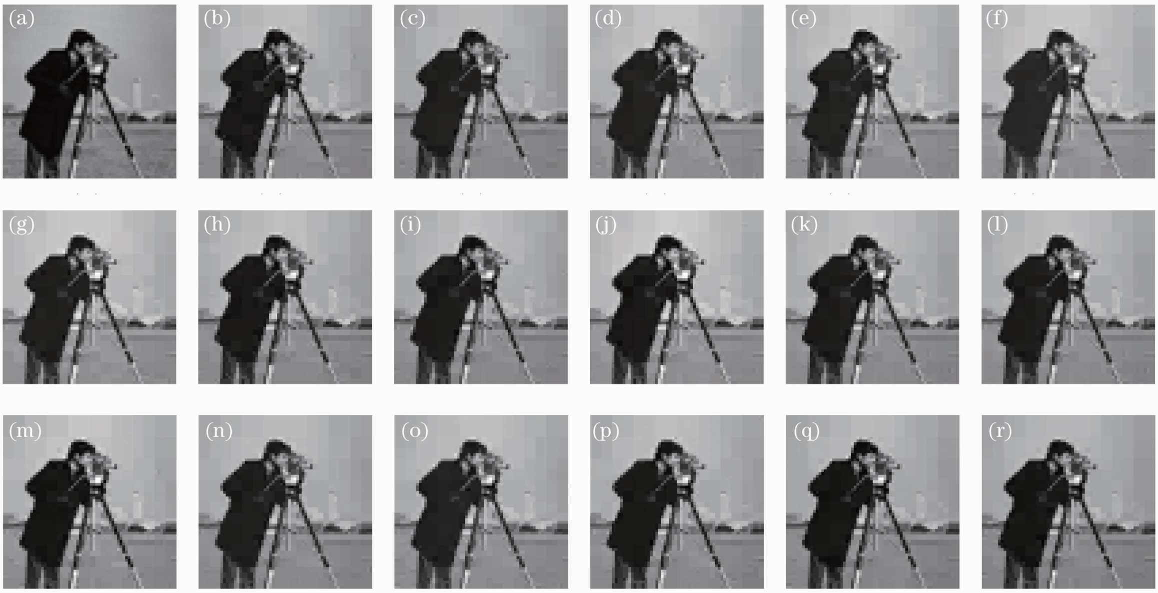

图 6　Cameraman 图像重建

Fig. 6　Reconstruction of Cameraman image

在上面实验的基础上，这里测试本文提出的相位掩模矩阵在方差 $\sigma^2=0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0$ 时的随机高斯噪声情况下的重建效果，考虑到噪声的随机性，对数据进行上面同样的处理，测量值 $M=3000$。

考虑到噪声本身具有较大的随机性，每种噪声方差下独立测试 10 次，统计其信噪比的均值和相应的重建所耗费的时间均值，结果如图 7 和图 8 所示。图 7(a)和(b)分别是 Lena 图像在不同方差下图像重建的信噪比和平均重建时间随噪声方差增加的变化曲线。图 8(a)和(b)分别是 Cameraman 图像在不同方差下图像重建的信噪比和平均重建时间随噪声方差增加的变化曲线。

从图 7 和图 8 实验结果曲线可以看出，和现有的 Bernoulli 和 BT 测量矩阵相比，本文提出的随机间距稀疏三元 Toeplitz 测量矩阵在保证重建质量的情况下，在编码和存储、实现成本以及平均重建时间方面有着较大的优势。从图 7(b)和图 8(b)中可以看出，随机间距稀疏三元 Toeplitz 测量矩阵在重建时间上大大下降，这是因为在重建算法中，需要进

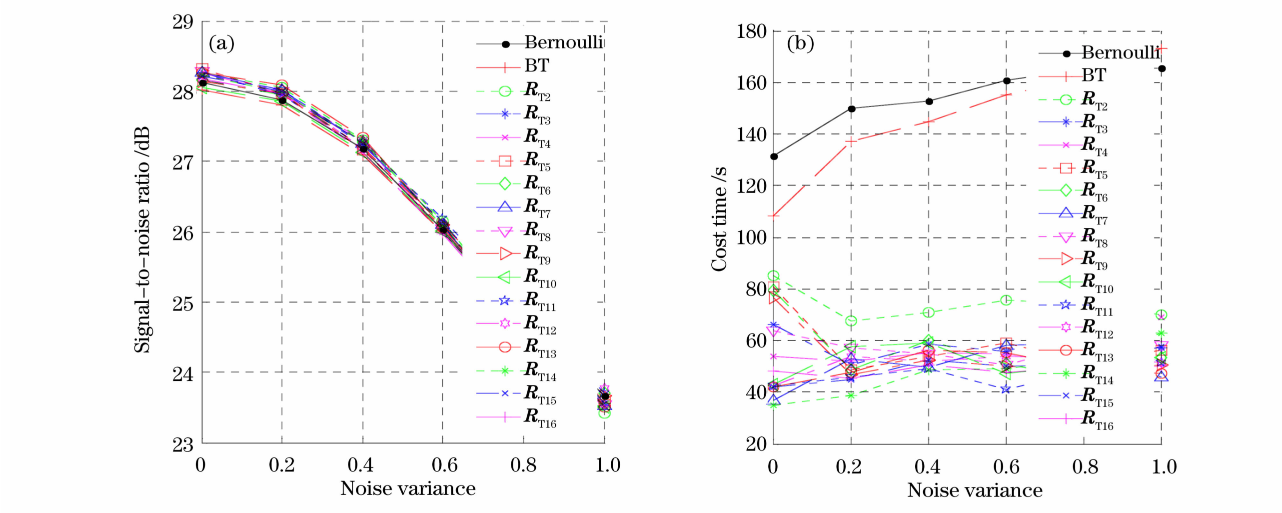

图 7　不同噪声方差下 Lena 图像重建

Fig. 7　Lena image reconstruction versus different noise variances

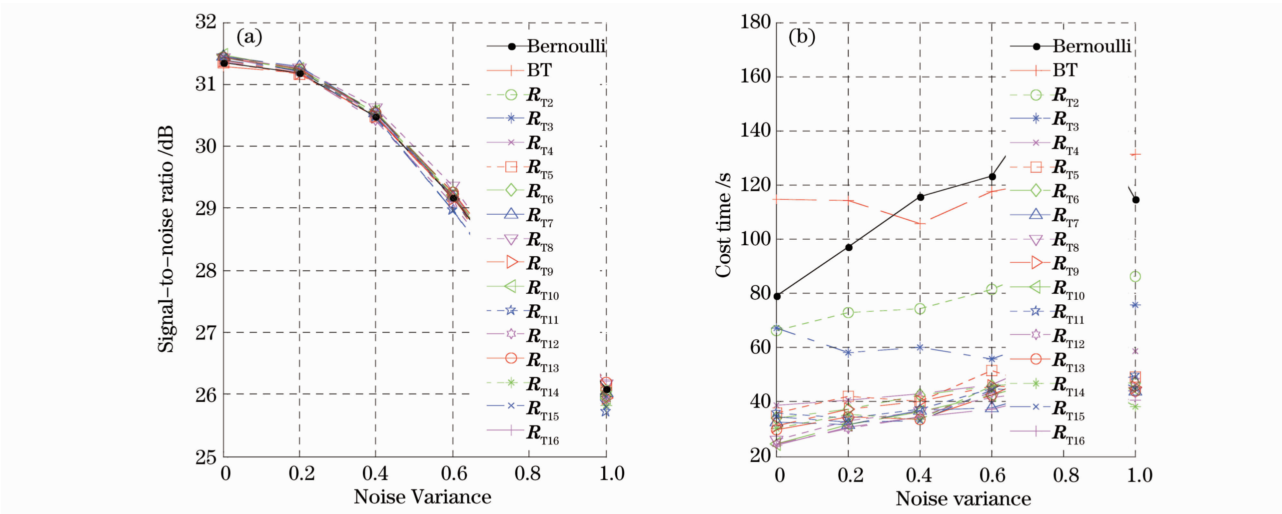

图 8　不同噪声方差下 Cameraman 图像重建

Fig. 8　Cameraman image reconstruction versus different noise variances

行多次 $\boldsymbol{\Phi\Psi f}$ 和 $(\boldsymbol{\Phi\Psi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}$ 的乘法，本文提出的测量矩阵中存在大量零元素，导致乘法运算大大下降，和原 Bernoulli 以及 BT 矩阵的重建时间相比，大约节约 33.86%～79.16%，其重建时间比较的计算公式为

$$P=\frac{t_{\mathrm{RT}\,i}}{\max(t_{\mathrm{Berno}},t_{\mathrm{BT}})},\quad i=2,\cdots,16 \tag{14}$$

其中变量 $t_{\mathrm{RT\,i}}$，t_{Berno} 和 t_{BT} 分别表示矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}i}$，Bernoullius 以及 BT 的平均重建时间，而 max( )表示取最大值，$i=2,\cdots,16$ 表示随机间距 Δ 的值。通过(14)式计算的重建时间比较结果如图 9 所示，其具体意义是本文提出的测量矩阵的平均重建时间占 Bernoulli 以及 BT 矩阵平均重建时间最大值的比例。

在图 9 中，虚线表示所有比例的最大值，而深色实线表示所有比例的最小值，其具体数值分别是 0.6614 和 0.2084。从图中可以看出，绝大多数时间大

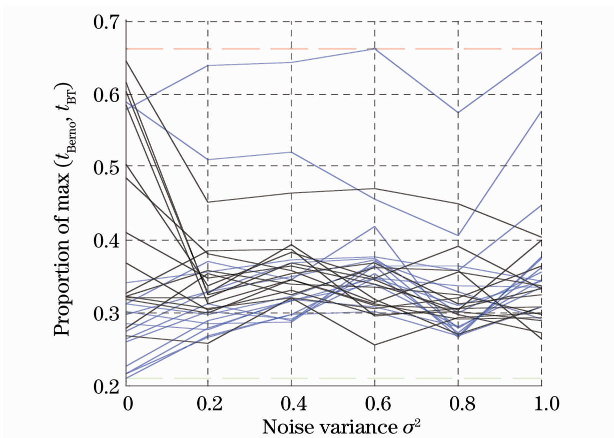

图 9　Lena 和 Cameraman 图像重建时间比较

Fig. 9　Comparison of reconstruciton time of Lena and Cameraman image

约只占对应 Bernoulli 以及 BT 矩阵的 30%～40%，具有较大的实际意义。

4.2 总体变分(TV)最小化图像重建

一般对于图像处理而言，尤其是梯度稀疏的图像，TV 最小化的效果要优于 l_1 模优化，且不需要再考虑稀疏基的构造问题，这对于图像的稀疏重构具有至关重要的作用。为了能结合本文提出的相位掩模矩阵进行针对性比较，限制图像为 64 pixel×64 pixel 大小的标准 Sheep-Logan 图像，然后采用 Bernoulli，BT 以及本文提出的一系列矩阵 $\boldsymbol{R}_{T2}$，$\boldsymbol{R}_{T3}$，…，$\boldsymbol{R}_{T16}$ 进行重建。测量次数为 1200 次，此处考虑三种情况下的重建情况，无噪声以及噪声方差 $\sigma^2=0.01$ 以及 $\sigma^2=0.1$ 下的重建情况。含有噪声的 TV 算法的优化模型如下：

$$\hat{\theta}=\arg\min\|\theta\|_{TV},\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\Phi f}\|_2\leqslant\varepsilon,\quad(15)$$

算法的具体实现采用 Candès 等编写的 L1-Magic 软件[23]，相应的重建信噪比如表 2 所示。

表 2 不同相位掩模矩阵 TV 模优化下的测试结果比较

Table 2 Comparison of different phase mask matrices with TV-minimization

	Signal-to-noise ratio /dB		
Phase mask matrix	$\sigma^2=0$	$\sigma^2=0.01$	$\sigma^2=0.1$
Bernoulli /dB	33.58	19.15	3.05
BT /dB	31.65	27.60	10.39
$\boldsymbol{R}_{T2}$ /dB	35.36	28.41	10.53
$\boldsymbol{R}_{T3}$ /dB	33.84	28.62	10.58
$\boldsymbol{R}_{T4}$ /dB	31.14	25.27	10.57
$\boldsymbol{R}_{T5}$ /dB	30.71	26.44	10.06
$\boldsymbol{R}_{T6}$ /dB	28.67	26.67	10.92
$\boldsymbol{R}_{T7}$ /dB	31.38	28.35	10.44
$\boldsymbol{R}_{T8}$ /dB	35.09	29.06	10.10
$\boldsymbol{R}_{T9}$ /dB	33.21	29.75	10.13
$\boldsymbol{R}_{T10}$ /dB	26.94	26.19	10.93
$\boldsymbol{R}_{T11}$ /dB	34.12	26.19	10.64
$\boldsymbol{R}_{T12}$ /dB	32.80	26.93	10.53
$\boldsymbol{R}_{T13}$ /dB	31.88	26.07	10.57
$\boldsymbol{R}_{T14}$ /dB	26.43	26.95	11.04
$\boldsymbol{R}_{T15}$ /dB	34.02	30.06	10.74
$\boldsymbol{R}_{T16}$ /dB	33.24	26.70	11.59

TV 方法对噪声比较敏感，因此随着噪声的增加，该 TV 最小化方法的信噪比迅速下降；从最终结果来看，本文提出的矩阵由于引入了较多的 0 元素，导致元素的采集相对比较集中，抗噪性具有一定的优势。当然，上面应用的方法只是 TV 最小化 CS 算法中的一种，关于 TV 最小化针对噪声比较敏感的缺点进一步的深入研究，提高 TV 算法的鲁棒性。

5 结　论

给出一种新的随机间距稀疏三元 Toeplitz 矩阵相位掩模。在可压缩双透镜相位掩模成像系统单次曝光条件下详细地比较了本文提出的相位掩模矩阵与 Bernoulli 以及 BT 相位掩模矩阵捕获物体信息的效果。从模拟实验结果可以看出，对于在基 $\boldsymbol{\Psi}$ 上稀疏或可压缩的图像，本文提出的相位掩模矩阵的重建效果与 Bernoulli 以及 BT 相位掩模矩阵相当。与此同时，本文提出的相位掩模矩阵在数据存储与传输时更有优势，物理上更容易实现，最后，采样新的相位掩模矩阵的平均算法重建时间是采用 Bernoulli 和 BT 相位掩模矩阵重建时间的 21%～66%。

参　考　文　献

1 D. Donoho. Compressed sensing [J]. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, **52**(4): 1289～1306

2 E. Candès, J. Romberg, T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, **52**(2): 489～509

3 E. Candès, J. Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. *Inverse Problems*, 2007, **23**(3): 969～985

4 E. Candès, T. Tao. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies [J]. *IEEE Trans. Infor. Theory*, 2006, **52**(12): 5406～5425

5 E. Candès, J. Romberg, T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, **59**(8): 1207～1223

6 A. Stern, B. Javidi. Random projections imaging with extended space-bandwidth product [J]. *J. Display Technology*, 2007, **3**(3): 315～320

7 Zhang Cheng, Yang Hairong, Wei Sui. Compressive double-lens imaging using circulant-Toeplitz-block phase mask [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 811001

张　成，杨海蓉，韦　穗. 循环托普利兹块相位掩模可压缩双透镜成像[J]. 光学学报，2011，**31**(8)：811001

8 M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar *et al.*. Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83～91

9 R. F. Marcia, R. M. Willett. Compressive coded aperture superresolution image reconstruction [C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing 2008 (ICASSP 2008), 2008, 833～836

10 R. Baraniuk, P. Steeghs. Compressive radar imaging [C]. 2007 IEEE Radar Conference, 2007, 128～133

11 D. J. Brady, K. Choi, D. L. Marks *et al.*. Compressive holography[J]. *Opt. Express*, 2009, **17**(15): 13040～13049

12 K. Choi, R. Horisaki, J. Hahn *et al.*. Compressive holography of diffuse objects[J]. *Appl. Opt.*, 2010, **49**(34): H1-H10

13 Y. Rivenson, A. Stern, B. Javidi. Compressive Fresnel holography[J]. *J. Display Technol.*, 2010, **6**(10): 506～509

14 P. Sen, S. Darabi. Compressive image super-resolution [C]. 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2009, 1-4, 1235～1242

15 W. U. Bajwa, J. D. Haupt, G. M. Raz *et al.*. Toeplitz-structured compressed sensing matrices[C]. Proceedings of the

2007 IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing, 2007, 294～298
16 R. DeVore. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. *J. Complexity*, 2007, **23**(4～6): 918～925
17 J. Haupt, W. U. Bajwa, RAZ G *et al*.. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation [J]. *IEEE Trans. Infor. Theory*, 2010, **56**(11): 5862～5875
18 W. Dai, O. Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. *IEEE Trans. Infor. Theory*, 2009, **55**(5): 2230～2249
19 Gao Rui, Zhao Ruizhen, Hu Shaohai. Variable step size adaptive matching pursuit algorithm for image reconstruction based on compressive sensing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1639～1644
高　睿，赵瑞珍，胡绍海. 基于压缩感知的变步长自适应匹配追踪重建算法[J]. 光学学报，2010，**30**(6)：1639～1644
20 Yang Hairong, Zhang Cheng, Ding Dawei *et al*.. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm [J]. *Chinese J. Electron.*, 2011, **39**(1): 142～148
杨海蓉，张　成，丁大为 等. CS 理论与重构算法[J]. 电子学报，2011，**39**(1)：142～148
21 Yang Hairong, Fang Hong, Zhang Cheng *et al*.. Iterative hard thresholding algorithm based on backtracking [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(3): 276～282
杨海蓉，方　红，张　成 等. 基于回溯的迭代硬阈值算法[J]. 自动化学报，2011，**37**(3)：276～282
22 Shi Guangming, Liu Danhua, Gao Dahua *et al*.. Advance in theory and application of compressed sensing [J]. *Acta Sinica Electronica*, 2009, **37**(5): 1070～1081
石光明，刘丹化，高大化 等. 压缩感知理论及其研究发展[J]. 电子学报，2009，**37**(5)：1070～1081
23 ℓ_1-Magic [OL]. [2011-10-28]. http://users.ece.gatech.edu/～justin/l1magic/

栏目编辑： 李文喆