

基于微分几何的矩形照度分布自由曲面反射器设计

刘正权 孙耀杰 林燕丹

(复旦大学信息科学与工程学院光源与照明工程系, 上海 200433)

摘要 在 LED 照明应用中为实现矩形均匀照度分布要求, 提出了一种基于一阶线性偏微分方程的自由曲面反射器设计方法。基于微分几何理论和折射定律描述了光线与自由曲面的相互作用。根据 LED 光源特性建立了朗伯光源与矩形被照面之间的能量拓扑关系, 推导了自由曲面反射器的一阶线性偏微分方程和边界条件。分别使用 Runge-Kutta 法和有限差分法对边界条件和偏微分方程进行数值计算, 并对计算结果进行光线追迹仿真。仿真结果表明自由曲面反射器光通利用率达到了 94%, 矩形被照面横向照度均匀度达到了 0.9, 纵向照度均匀度达到了 0.8。程序计算时间少于 1 s。

关键词 光学设计; 自由曲面反射器; 数值计算; 矩形照度分布; LED 照明

中图分类号 O435 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201232.1022006

Freeform Reflector Design for Rectangular Illuminance Distribution Based on Differential Geometry

Liu Zhengquan Sun Yaojie Lin Yandan

(Department of Illuminating Engineering and Light Sources, School of Information Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract A freeform reflector design method, which is mainly based on a first-order linear partial differential equation, is proposed for uniform rectangular illuminance distribution in the field of LED illumination. The interaction between the freeform surface and the light beam is depicted based on theory of the differential geometry and Snell's law. The energy topological relation between the Lambertian luminaire and the illuminated rectangular surface is established according to the LED luminous intensity distribution. The method deducts a first-order linear partial differential equation with some boundary conditions to represent the freeform reflector. The boundary conditions and the partial differential equation are solved by the Runge-Kutta method and finite difference method, respectively. The numerical results are validated in the form of raytracing, which reveal that the luminous flux efficiency is about 94%, the transverse uniformity of illuminance on the target surface is 0.9 and the longitudinal uniformity of illuminance on the target surface is 0.8. The numerical computation time is less than 1 s.

Key words optical design; freeform reflector; numerical computation; rectangular illuminance distribution; LED illumination

OCIS codes 080.4295; 080.4298; 220.4298

1 引言

LED 在道路照明、汽车前照灯、投影仪设备和扫描打印等领域得到了广泛的应用。按照设计对象划分, 现在基于 LED 光源的非成像光学设计主要有

自由曲面反射器和自由曲面透镜, 其设计思想都是通过光学器件对光源光线的调制以达到在被照面上形成预期的照度分布的目的^[1~4]。在非成像光学设计中边缘光线理论是基本理论^[5~7]。LED 的自由

收稿日期: 2012-01-06; 收到修改稿日期: 2012-05-10

基金项目: 国家 973 计划(2010CB734102)和国家 863 计划(2011AA03A113)资助课题。

作者简介: 刘正权(1985—), 男, 硕士研究生, 主要从事非成像光学设计自由曲面方面的研究。

E-mail: 09210720085@fudan.edu.cn

导师简介: 林燕丹(1978—), 女, 博士, 副教授, 主要从事非成像光学设计与人体工效学方面的研究。

E-mail: ydlin@fudan.edu.cn(通信联系人)

曲面光学设计按照原理分类主要有两种方法,分别为裁剪法和试错法。2002年 Ries 等^[8~11]使用三维自由曲面裁剪法设计光学曲面,这个方法通过裁剪光学曲面控制波前方向,最终将光学曲面模型抽象为求解一组非线性偏微分方程,其缺点是不能根据指定的光学曲面进行设计。Ding 等^[12,13]基于折射定律和光通守恒定律建立了关于自由曲面透镜的非线性偏微分方程组,并使用数值计算的方法求解反射器的面形,这个方法的优点是不需要采用试错法,通过数值计算可以在短时间内得到较高精度的自由曲面的面形数据,缺点是要求解多个非线性偏微分方程,数值求解与编程一般比较困难。

另一种方法是试错法,这种方法具有直观的优点,设计方法是根据光源与被照面之间的能量映射关系进行光线设计,通过迭代求解得到光学曲面的坐标点以确定透镜或者反射器的外形,其特点是需要划分足够的网格控制计算精度,设计和优化时间较长^[14~16]。

本文根据 LED 配光特性和矩形照度分布要求,基于微分几何理论和能量守恒原理建立自由曲面反射器模型,使用一阶线性偏微分方程描述自由曲面反射器,实现了均匀矩形照度分布的自由曲面反射器设计,简化了设计步骤,提高了光学设计效率并降低了基于微分几何方法的自由曲面设计难度。

2 设计原理

2.1 光线与自由曲面作用关系推导

在球坐标下研究自由曲面,假定自由曲面是一阶连续且正则。首先讨论自由曲面的法线、切线及其与光线的相互作用关系。如图 1 所示,自由曲面上任意一点 P , 矢径 \overrightarrow{OP} 可记为

$$\boldsymbol{\rho}(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta),$$

式中 θ 和 φ 分别为天顶角和方位角, ρ 为矢径 \overrightarrow{OP} 长度。

根据经典微分几何理论,自由曲面上 P 点切向矢量分别为 $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \varphi}$ 。进一步得到自由曲面的外向法向矢量为 $\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \varphi}$, 其单位法向矢量记为 $\boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ ^[17]。

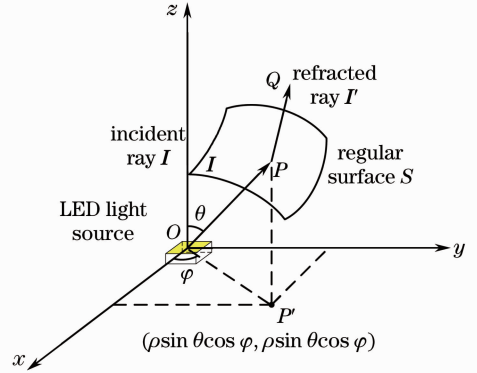


图 1 球坐标下自由曲面及其与光线的相互作用
Fig. 1 Interaction between the freeform surface and the light beam in spherical coordinate

图 1 所示,入射光线和折射光线的单位矢量分别为 \boldsymbol{I} 和 \boldsymbol{I}' ,入射光线与折射光线所在空间介质折射率分别为 n_1 和 n_2 。根据折射定律,有

$$n_1 \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{n}' = n_2 \boldsymbol{I}' \times \boldsymbol{n}', \quad (1)$$

式中 Q 点坐标记为 (x, y, z) , 折射光线单位矢量 $\boldsymbol{I}' = \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$ 。将(1)式两边同时叉乘 \boldsymbol{n}' ,并化简得

$$n_1 \boldsymbol{I} - n_2 \boldsymbol{I}' = [n_1^2 + n_2^2 - 2n_1 n_2 \boldsymbol{I}' \cdot \boldsymbol{I}]^{1/2} \boldsymbol{n}', \quad (2)$$

(2)式两端分别点乘切向矢量 $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \varphi}$,得

$$\begin{cases} (n_1 \boldsymbol{I} - n_2 \boldsymbol{I}') \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta} = 0 \\ (n_1 \boldsymbol{I} - n_2 \boldsymbol{I}') \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

(3)式完备描述了折射定律。注意到 $\boldsymbol{I} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ 和

$$\boldsymbol{I} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi},$$

代入(3)式化简得

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{n_2 (x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta) \rho}{n_2 \rho + n_1 |\overrightarrow{OP}| - n_2 (x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{n_2 (-x \sin \theta \sin \varphi + y \sin \theta \cos \varphi) \rho}{n_2 \rho + n_1 |\overrightarrow{OP}| - n_2 (x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)} \end{cases}. \quad (4)$$

对于非旋转对称光学器件表面,即 $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \neq 0$ 时,由(4)式可得到

$$(x \sin \theta \sin \varphi - y \sin \theta \cos \varphi) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + (x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0. \quad (5)$$

2.2 光源与被照面能量拓扑关系

根据被照面微元与光源立体角微元一一对应的拓扑结构推导能量拓扑关系^[18,19]。图2和图3所示光源与被照面之间的能量拓扑关系。光线全部照射到矩形被照面上且照度均匀分布,根据能量守恒定律,有

$$\iint I(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \iint E(x, y) dx dy, \quad (6)$$

式中 $I(\theta, \varphi)$ 为 LED 光源光强分布; $E(x, y)$ 为矩形被照面上照度分布, 为常数。矩形被照面长度和宽度分别为 l 和 w , LED 近似为朗伯光源, 配光 $I(\theta, \varphi)$ 取 $I_0 \cos \theta$, 计算得到

$$\pi I_0 = wlE, \quad (7)$$

即理想情况下, 被照面照度为 $E = \frac{\pi I_0}{wl}$ 。

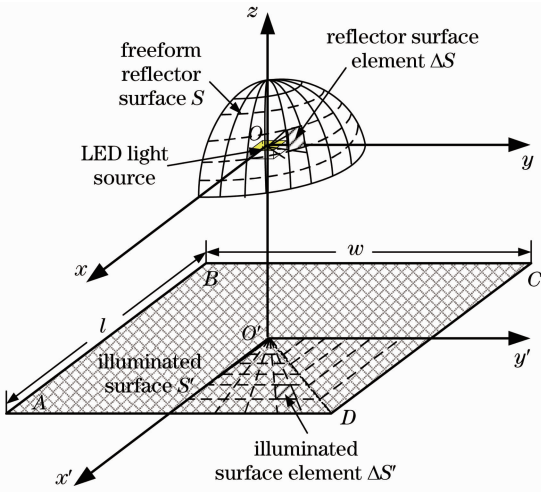


图2 LED光源与被照面能量拓扑示意图

Fig. 2 Sketch of the energy topological relation between the LED light source and the illuminated plane

如图3所示,对于不同的 θ 范围内,有

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} I_0 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' = \iint E(x, y) dx dy = 4XYE, \quad (8)$$

式中 X 和 Y 分别表示第一象限矩形被照面顶点坐标, 且满足 $\frac{X}{Y} = \frac{l}{w}$ 。计算得到

$$\begin{cases} X = \frac{l}{2} \sin \theta \\ Y = \frac{w}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (9)$$

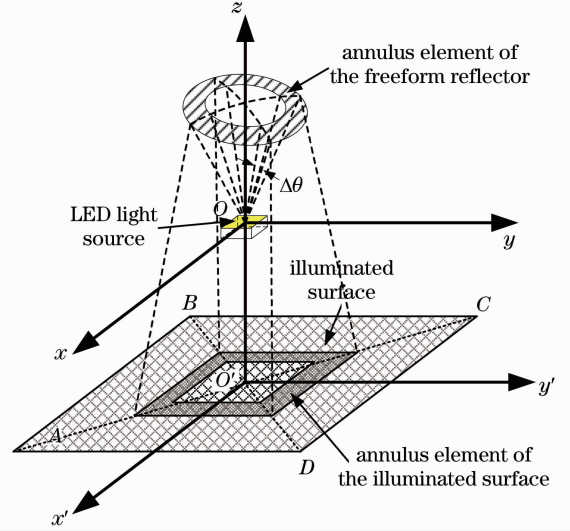


图3 立体角微元与面积微元之间能量拓扑示意图

Fig. 3 Sketch of the energy topological relation between the solid angle element and the area element

在第一象限, 当 $0 \leq y < Y$ 时, 即 $x = X = \frac{l}{2} \sin \theta$,

$\frac{y}{Y} = \frac{\varphi}{\pi/4}$, 有 $y = \frac{4\varphi}{\pi} Y = \frac{2\varphi w}{\pi} \sin \theta$; 当 $y = Y$ 时, $x = \frac{4X}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{2l \sin \theta}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$, $y = \frac{w}{2} \sin \theta$ 。综上所述, 第一象限内 LED 发光面上方位角为 (θ, φ) 的出射光线照射到路面上点 Q 的坐标 (x, y, z) 为

$$\begin{cases} \left(\frac{l}{2} \sin \theta, \frac{2\varphi w}{\pi} \sin \theta, z \right), & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \left[\frac{2l \sin \theta}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \frac{w}{2} \sin \theta, z \right]. & \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (10)$$

2.3 一阶偏微分方程的建立与数值计算

根据(4)、(5)和(10)式, 令 $n_1 = n_2$ 得到第一象限 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ 的自由曲面反射器的一阶线性偏微方程及其边界条件如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} (x \sin \theta \sin \varphi - y \sin \theta \cos \varphi) + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} (x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta) = 0, & 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \Big|_{\varphi=0} = \frac{(x \cos \theta - z \sin \theta) \rho}{\rho + |\vec{OP}| - (x \sin \theta + z \cos \theta)}, & 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho \Big|_{\theta=0} = \rho_0. & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (11)$$

首先使用 Runge-Kutta 法求解第一个边界条件得到 $\rho(\theta, 0)$, 再使用前向有限差分法求解一阶偏微分方程。同理, 也可以得到第一象限 $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ 的自由曲面反射器偏微分方程, 可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} (x \sin \theta \sin \varphi - y \sin \theta \cos \varphi) + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} (x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta) = 0, & \frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \left. \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{(y \cos \theta - z \sin \theta) \rho}{\rho + |\vec{OP}| - (y \sin \theta + z \cos \theta)}, & 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho|_{\theta=0} = \rho_0. & \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (12)$$

同样使用 Runge-Kutta 法求解第一个边界条件得到 $\rho(\theta, \pi/2)$, 再使用 Lax-Friedrichs 差分格式求解一阶偏微分方程^[20]。在本设计中, LED 与反射器中心距离 $\rho_0 = 30$ mm, 矩形被照面长度 $l = 2000$ mm, 宽度 $w = 3500$ mm, 矩形被照面与 LED 中心距离 $z = -2000$ mm。

3 仿真与分析

将偏微分方程的数值解也就是自由曲面上离散坐标点导入三维模型软件, 得到自由曲面反射器的外形, 反射器的长度为 232.8 mm, 宽度为 171.8 mm, 高度为 30 mm, 如图 4 所示。

再将反射器外形导入光学仿真软件, 使用 $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ 的朗伯光源进行光线追迹, 被照面照度分布如图 5 所示。矩形被照面照度基本呈矩形分布, 照度分布均匀, 其纵向照度均匀度为 0.8, 横向照度均匀度为 0.9。另外, 被照面的照度分布不是严格的矩形分布, 这个误差主要是数值求解和曲面拟合建模过程中引入的; 数值求解差分格式的稳定性

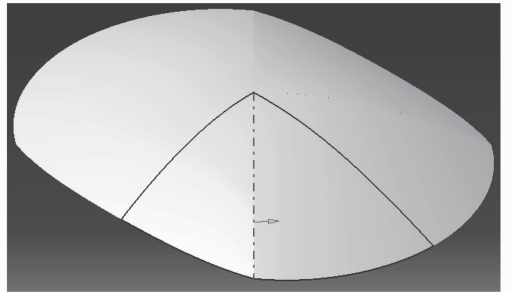


图 4 矩形照度分布自由曲面反射器外形图
Fig. 4 Shape of the freeform-surface reflector for rectangular illuminance distribution

性和步长影响了求解精度, 三维模型软件使用样条曲面拟合曲面上离散数据, 也引入了误差。另外, 图 5 的照度分布显示被照面横向和纵向照度分布较好, 但是对角线部分照度值出现峰值, 原因是求解偏微分方程过程中采用的有限差分算法存在误差传递, 在 $\varphi = 0$ 处照度均匀度为 0.9, 随着 φ 逐渐增大到 $\pi/4$, 数值计算过程中存在的误差不断累加导致在被照面对角线上照度不均匀。对角线部分的反射器表面不平滑, 也会引起照度不均匀。

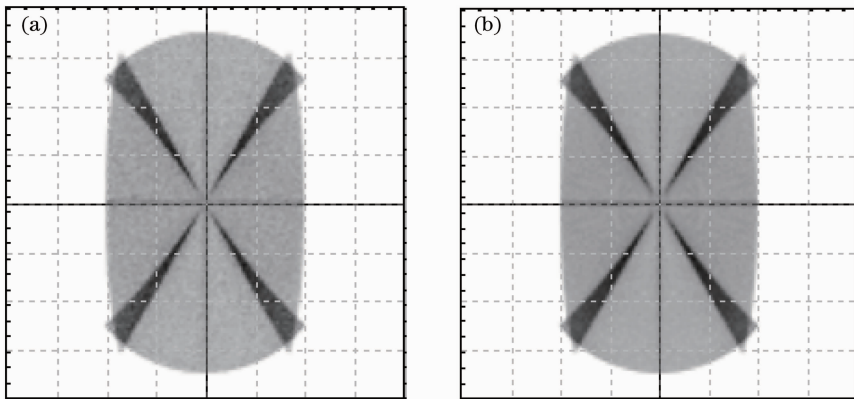


图 5 矩形被照面朗伯点光源与面光源照度分布。(a) 朗伯点光源模拟面照度分布; (b) $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ 朗伯面光源模拟照度分布

Fig. 5 Illuminance distribution on the rectangular illuminated plane. (a) Illuminance distribution with Lambertian point source; (b) illuminance distribution with Lambertian surface source

4 结 论

提出了一种基于一阶线性偏微分方程的自由曲面反射器设计方法。针对 LED 配光与矩形照度分布要求建立了光源与被照面之间的能量拓扑关系, 基于微分几何和折射定律建立了自由曲面反射器模型, 得到了关于自由曲面反射器的一阶线性偏微分方程, 使用有限差分法求解得到了自由曲面反射器面形并使用光学软件进行了分析验证, 结果表明自由曲面反射器光通利用率达到了 94%, 矩形被照面纵向和横向照度均匀度分别达到了 0.8 和 0.9。数值计算程序运行时间少于 1 s。该设计方法能用于道路照明灯具和汽车前照灯等领域的自由曲面反射器和自由曲面透镜设计中, 只需要根据相应的照度要求确定光源与照明面之间的能量映射关系, 结合文中的偏微分方程(5)式进行设计。可以通过优化数值计算算法提高数值解的精度, 进一步提高反射器光学性能。

参 考 文 献

- 1 F. Fournier, J. Rolland. Design methodology for high brightness projectors[J]. *J. Display Technol.*, 2008, **4**(1): 86~91
- 2 J. C. Minano, P. Benitez, A. Santamaria. Free-form optics for illumination[J]. *Opt. Rev.*, 2009, **16**(2): 99~102
- 3 R. Wu, H. Li, Z. Zheng *et al.*. Freeform lens arrays for off-axis illumination in an optical lithography system[J]. *Appl. Opt.*, 2011, **50**(5): 725~732
- 4 Jin Ji, Yu Guiying, Lin Min. Research of high light collection efficiency of LED parabolic reflector based on non-imaging optics [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(3): 680~684
金 骥, 余桂英, 林 敏. 基于非成像光学的 LED 高收光率的抛物反射器研究[J]. *中国激光*, 2010, **37**(3): 680~684
- 5 H. Ries, A. Rabl. Edge-ray principle of nonimaging optics[J]. *J. Opt. Soc. Am. A: Optics Image Science and Vision*, 1994, **11**(10): 2627~2632
- 6 Yu Guiying, Jin Ji, Ni Xiaowu *et al.*. Design for LED uniform illumination reflector based on étendue[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(8): 2297~2301
余桂英, 金 骥, 倪晓武等. 基于光学扩展量的 LED 均匀照明反射器的设计[J]. *光学学报*, 2009, **29**(8): 2297~2301
- 7 Ding Shushu, Yu Guiying, Hao Wenwen. A freeform surface

- lens for indoor uniform illumination[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, **49**(4): 042201
- 丁纾妹, 余桂英, 郝雯雯. 用于室内照明的自由曲面均匀配光透镜设计[J]. *激光与光电子学进展*, 2012, **49**(4): 042201
- 8 H. Ries, J. Muschaweck. Tailored freeform optical surfaces[J]. *J. Opt. Soc. Am. A: Optics Image Science and Vision*, 2002, **19**(3): 590~595
- 9 J. S. Schruben. Formulation of a reflector-design problem for a lighting fixture [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1972, **62**(12): 1498~1501
- 10 Z. R. Zheng, X. Hao, X. Liu. Freeform surface lens for LED uniform illumination [J]. *Appl. Opt.*, 2009, **48**(35): 6627~6634
- 11 P. F. Guan, X. J. Wang. On a Monge-Ampere equation arising in geometric optics[J]. *J. Differential Geometry*, 1998, **48**(2): 205~223
- 12 Y. Ding, X. Liu, Z. R. Zheng *et al.*. Freeform LED lens for uniform illumination [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(17): 12958~12966
- 13 Xing Shasha, Wu Rengmao, Li Haifeng *et al.*. Freeform-surface design of off-axis illumination in projection lithography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(3): 0322002
- 邢莎莎, 吴仍茂, 李海峰等. 应用于投影光刻离轴照明的自由曲面设计[J]. *光学学报*, 2011, **31**(3): 0322002
- 14 K. Wang, S. Liu, F. Chen *et al.*. Freeform LED lens for rectangularly prescribed illumination[J]. *J. Opt. A: Pure & Appl. Opt.*, 2009, **11**(10): 105501
- 15 K. Wang, F. Chen, Z. Y. Liu *et al.*. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging[J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(2): 413~425
- 16 Yan Xingtiao, Yang Jianfeng, Zhang Guoqi *et al.*. Freeform LED lens design based on longitude-latitude division and tangent-plane iteration[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2011, **48**(2): 022201
- 闫兴涛, 杨建峰, 张国琦等. 基于经纬划分和切面迭代的自由曲面 LED 透镜设计[J]. *激光与光电子学进展*, 2011, **48**(2): 022201
- 17 D. J. Struik. Lectures on Classical Differential Geometry[M]. New York: Dover Publications, 1988
- 18 F. R. Fournier, W. J. Cassarly, J. P. Rolland. Fast freeform reflector generation using source-target maps[J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(5): 5295~5304
- 19 Ding Yi, Gu Peifu. Freeform Reflector for Uniform Illumination [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(3): 540~544
- 丁 毅, 顾培夫. 实现均匀照明的自由曲面反射器[J]. *光学学报*, 2007, **27**(3): 540~544
- 20 J. W. Thomas. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods[M]. Berlin: Springer, 1995

栏目编辑: 王晓球