

小入射角条件下气动光学成像偏移

张士杰¹ 李俊山¹ 孙李辉^{1,2} 胡双演¹

(¹ 第二炮兵工程大学信息工程系, 陕西 西安 710025)
² 96646 部队, 陕西 汉中 731500

摘要 针对超声速飞行器在大气中飞行时由于气动光学效应产生的成像偏移, 推导了光线偏折角和流场折射率梯度之间的关系, 给出了小入射角情况下, 离散折射率场光线偏折角的一种计算方法; 利用不同流场的计算流体力学数据计算出对应的折射率场; 使用光线追迹法得到光线通过不同流场后的偏折角和传播路径上的折射率梯度分布。仿真结果表明, 新的偏折角计算方法所得结果在入射角小于 30° 时与 Runge-Kutta 和 Snell 光线追迹法具有很好的一致性; 同一高度下小入射角时, 光线的偏折角并不随着飞行速度的增加而增加, 而是基本保持稳定; 光线通过流场的偏折是正负折射率梯度区域共同作用的结果, 负的折射率梯度区域可以减少光线偏折, 起到部分“校正”作用。

关键词 大气光学; 成像偏移; 折射率梯度; 小入射角

中图分类号 TN012; O435; V21 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201232.1001002

Aero-Optical Imaging Deviation under the Small-Incidence-Angle Condition

Zhang Shijie¹ Li Junshan¹ Sun Lihui^{1,2} Hu Shuangyan¹

(¹ Department of Information Engineering, Second Artillery Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710025, China)
² 96646 Unit of Chinese People's Liberation Army, Hanzhong, Shaanxi 731500, China)

Abstract The non-uniform flow field around the vehicle flying at a high speed bends the incident ray and imposes an imaging deviation on the imaging plane. The relation between the deflection angle and the refractive index gradient is derived theoretically, and a new method is proposed to compute the deflection angle when the ray is passing through the discrete refractive index field with a small incidence angle. Then fluid-dynamics computations under different flying conditions have been completed. After that the mean density field is converted into the refractive index field. Ray tracing is performed to obtain the deflection angle and the gradients along the propagation path. The results show that the computed results by our method are well consistent with those by the Runge-Kutta and the Snell method when the incidence angle is less than 30° ; and at the same altitude, the imaging deviation does not grow as the flying speed increases under the small incidence-angle condition, but remains stable; the deflection angle is determined by the positive as well as the negative refractive index gradient region, and the negative refractive index gradient region may reduce the imaging deviation.

Key words atmospheric optics; imaging deviation; refractive-index gradient; small incidence angle

OCIS codes 010.1290; 080.2710; 110.3080

1 引言

当飞行器在大气层内以超声速/高超声速飞行

时, 由于气动光学效应的存在, 导致光学系统接收到的目标图像产生像素偏移, 从而使测得的目标位置

收稿日期: 2012-04-05; **收到修改稿日期**: 2012-05-21

基金项目: 国家自然科学基金(61075025, 61175120)资助课题。

作者简介: 张士杰(1981—), 男, 博士研究生, 主要从事气动光学退化效应仿真和退化图像复原等方面的研究。

E-mail: bei_ming_you_yu@sina.com

导师简介: 李俊山(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事智能图像处理与目标感知识别、网络信息安全、电子对抗模拟与仿真等方面的研究。E-mail: lijunshan403@163.com

偏离了实际位置,引起瞄视误差(BSE)^[1,2]。成像偏移可以用相对于无流场时目标光线的夹角(相对于焦距产生的角偏差)来衡量,也可以用相对于无流场时目标像点的距离(线偏差)来衡量。

一些学者从理论和实验上研究了成像偏移与影响因素如高度、攻角等之间的关系。Clark等^[3]研究了锥头体飞行器在瞄视角为 $10^\circ\sim 60^\circ$ 时的瞄视误差。Miller^[4]的研究显示,在小瞄视角的情况下,较小的攻角变化也会产生较大的瞄视误差。殷兴良^[1]指出,高速流场产生的图像偏移引起瞄视误差,主要由层流流场的弓形激波产生;在相同的飞行速度下,随高度增加偏移减少,在同一高度下,随着飞行速度的增加,偏移程度增加。而文献^[5]给出了与直觉不一致的结论,认为在 $40\sim 60$ km,随着高度的增加,瞄视误差也会缓慢增加。Xu等^[6~8]认为飞行高度和攻角等物理量并不直接影响成像偏移,而与流场有关的因素才直接决定成像偏移;并用光线传播路径上流场密度的分布来解释成像偏移,指出光线传播路径上流场密度分布越均匀,成像偏移越小,反之,偏移越大。但目前为止,成像偏移和流场折射率梯度之间关系的研究文献鲜见报道。

本文推导了光线偏折角和流场折射率梯度之间的关系,给出了小入射角情况下,离散折射率场光线

偏折角的一种新的计算方法;利用不同流场的计算流体力学(CFD)数据计算出对应的折射率场;利用光线追迹法得到光线通过不同流场后的偏折角和传播路径上的折射率梯度;在此基础上得出了相关结论,揭示了折射率梯度和成像偏移之间紧密的关系。

2 超音速流场

CFD是研究气动光学效应的一种常用方法^[1,2,5,9~13]。CFD和计算机的发展使得飞行器外围复杂流场可被精确计算;基于CFD方法国外已经编制了许多具有实用化功能的仿真软件^[5,12,13]并成功用于成像偏移和成像模糊的预测。CFD中使用纳维叶-斯托克斯(N-S)方程组描述湍流运动,N-S方程组是非线性偏微分方程组,在物理上没有解析解,只能通过离散的方法对其进行数值计算。用于N-S方程组的计算方法有3种:直接数值模拟法(DNS)、大涡模拟法(LES)和雷诺平均法(RANS)。DNS和LES都是基于瞬态控制方程,可以给出湍流瞬时运动规律。而成像偏移和瞄视误差(BSE)主要由平均流场产生^[1],因此,采用RANS方法求解导引头周围的密度场是合适的。考虑到流场的对称性,只仿真二维流场,结果可以推广到三维情况。RANS方程^[1,14]的Cartesian张量形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u_i u_j}) \end{cases}, \quad (1)$$

式中 ρ 为密度, p 为压强, μ 为运动粘性系数, δ_{ij} 为Kronecker delta符号(当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$;当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$),上横线“ \cdot ”和上标“ \cdot ”分别表示平均值和脉动量。

CFD方法只能得到导引头周围的密度场分布,需要进一步求出对应的折射率场,可以通过Gladstone-Dale(G-D)关系由气体密度求出:

$$n = 1 + K_{GD}\rho, \quad (2)$$

式中 n 为折射率, ρ 为气体密度, K_{GD} 为G-D系数。在红外区域,标准空气的G-D系数是波长的弱函数,可近似为^[1]

$$K_{GD} = 2.23 \times 10^{-4} \left(1 + \frac{7.52 \times 10^{-3}}{\lambda^2} \right), \quad (3)$$

式中 λ 为光波波长。在仿真中,取波长为 $0.4 \mu\text{m}$,此时 $K_{GD}=2.33 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$ 。

使用G-D关系式得到的仍是一个无规则非均匀的折射率场,需要对它重新划分网格并通过插值得到规则的离散折射率场,进一步地也可以得到对应的折射率梯度场。

为了计算光线偏折角,可以使用几何光学方法,通过光线追迹^[2,15~18]得到光线在离散流场中的传播路径。常用的光线追迹法有泰勒级数展开法^[16],Runge-Kutta法^[17]和Snell法^[2,18]等。

3 梯度折射率场的光线偏折

3.1 理论推导

在非均匀折射率场中,折射率是空间坐标的函数,可表示为 $n = n(\mathbf{r})$,或者 $n = n(x, y, z)$ 。光线上两点PQ之间的光程^[19]为

$$L = \int_P^Q n ds, \quad (4)$$

式中 s 为曲线的弧长,在直角坐标系中 ds 又表示为

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{1/2} dz, \quad (5)$$

式中 \dot{x}, \dot{y} 分别为 x, y 对 z 的导数。选择 z 作为积分变量,则(4)式可改写为

$$L = \int_P^Q n (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{1/2} dz. \quad (6)$$

因此,根据变分理论^[20],可以得到 x 的欧拉方程:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{n \dot{x}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} \right] = (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (7)$$

完成微分运算,并乘以 $(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$,得

$$\begin{aligned} \dot{x} \dot{y} - \dot{x} (1 + \dot{y}^2) = \\ (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \left[m \dot{x} - \frac{\partial m}{\partial x} (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

对 y ,类似地,有

$$\begin{aligned} \dot{x} \dot{y} - \dot{y} (1 + \dot{x}^2) = \\ (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \left[m \dot{y} - \frac{\partial m}{\partial y} (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

式中 \ddot{x} 和 \ddot{y} 分别为 x, y 对 z 的二阶导数, $m = \ln n$,

$$\dot{m} = \dot{x} \frac{\partial m}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial z}.$$

联立(8)式和(9)式可得

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{dx}{dz} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \\ \dot{y} = \frac{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{dy}{dz} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \end{cases}. \quad (10)$$

假设光线沿着 z 轴方向入射进入连续折射率场,入射点坐标为 $P(x_0, y_0)$,并假设微小段光束的路径仍可近似为直线且光线的曲率不可忽略,因此 $dx/dz, dy/dz$ 项可以忽略,(10)式可简化为

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial(\ln n)}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial(\ln n)}{\partial y} \end{cases}. \quad (11)$$

从而可以得到 $P(x_0, y_0)$ 处的光线偏折角^[2]:

$$\theta = (\theta_{x_0}^2 + \theta_{y_0}^2)^{1/2}, \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} \theta_{x_0} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2 x}{dz^2} dz = \frac{1}{n_0} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x_0, y_0, z} dz \\ \theta_{y_0} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2 y}{dz^2} dz = \frac{1}{n_0} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)_{x_0, y_0, z} dz \end{cases}, \quad (13)$$

式中 n_0 为光线进入连续折射率场前的折射率。

3.2 离散折射率场偏折角计算方法

对大小为 $K = M \times N$ 的二维离散折射率场,设每一个网格内的折射率梯度 ∇n_i 为常数,光线沿 y 轴方向入射进入,则在 x 轴方向上的偏折角可以表示为

$$\theta = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^K (\nabla n_{ix} \cdot y_i), \quad (14)$$

式中 ∇n_{ix} 为第 i 个网格折射率梯度 ∇n_i 沿 x 方向的分量, y_i 为光线通过第 i 个网格的长度。

(14)式也给出了小入射角(入射光线与入射界面法线之间夹角)情况下,通过成像窗口外区域流场光线偏折角的一种新的计算途径,不妨称这种方法为折射率梯度(RIG)法。把(14)式进一步改写为

$$\theta = \sum_{i=1}^K y_i \left(\frac{1}{n_0} \nabla n_{ix} \right) = \frac{1}{n_0} [G_{x+} + G_{x-}], \quad (15)$$

式中 $G_{x+} = \sum_{i=1}^K y_i \nabla n_{ix}$, 其中 $\nabla n_{ix} \geq 0, G_{x-} = \sum_{i=1}^K y_i \nabla n_{ix}$, 其中 $\nabla n_{ix} < 0$ 。由于入射角较小, y_i 可用网格边长 d 近似。因此,(15)式可进一步改写为

$$\theta = \frac{d}{n_0} [G'_{x+} + G'_{x-}], \quad (16)$$

式中 G'_{x+}, G'_{x-} 分别称为正、负折射率梯度和。

4 仿真及结果

4.1 仿真数据

仿真使用的 CFD 软件是 ANSYS FLUENT 13.0,网格划分使用 ANSYS ICEM CFD。仿真区域总的计算网格数为 99969,如图 1 所示。为提高仿真精度,对光学窗口外围的网格进行了加密。RANS 求解器设置为耦合、隐式和时间稳态并启用能量方程,湍流模型选择可实现 $\kappa-\epsilon$ 模型,使用压力远场边界条件和恒温壁面条件,采用二阶迎风格式离散化流场方程,使用 QUICK 格式处理湍动能和

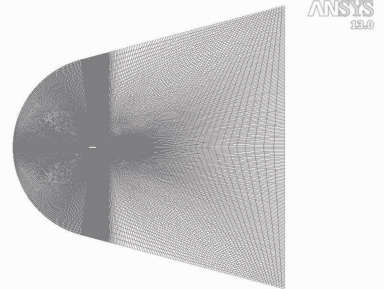


图 1 CFD 计算网格

Fig. 1 Computational grid used for CFD computations

湍流耗散率。

仿真得到了飞行速度为 $2\sim 8 Ma$ (间隔 $1 Ma$)，高度从海平面到 $60 km$ 高空 (间隔 $10 km$)，攻角为 0 时不同飞行条件下的飞行器头部周围流场。使用 Tecplot 360 处理流场仿真数据，通过插值得到了成像窗口外区域的折射率场，该区域包含 150×100 个网格，网格间距为 $1 mm$ 。

为了验证 RIG 方法的适用性，以飞行速度为 $4 Ma$ ，高度为 $10 km$ 和飞行速度为 $6 Ma$ ，高度为 $20 km$ 两种飞行条件为例，分别使用三阶 Runge-Kutta

法(RK3)、RIG 和 Snell 三种追迹方法计算光线入射角为 $5^\circ\sim 45^\circ$ (间隔 5°) 时的光线偏折角，如图 2 所示。从图中可以看到，当入射角小于 30° 时，三种光线追迹方法得到的结果具有很好的一致性；当入射角超过 30° 时，RIG 方法所得结果与其他两种方法得到的结果差别较大。这是因为 RIG 方法在推导中使用了近似和假设，使得其更适用于小入射角情况。

图 3 给出了不同高度和入射角条件下 G'_{x+} (曲线 RIG-Pos) 和 G'_{x-} (曲线 RIG-Neg) 对光线偏折角的影响；RIG 和 RK3 表示光线实际偏折角。

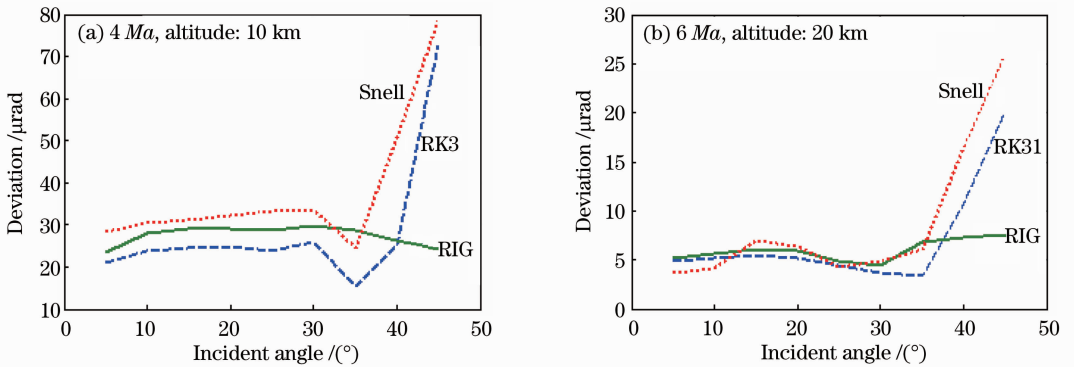


图 2 不同光线追迹法下的光线偏折曲线

Fig. 2 Imaging deviation of different ray-tracing methods

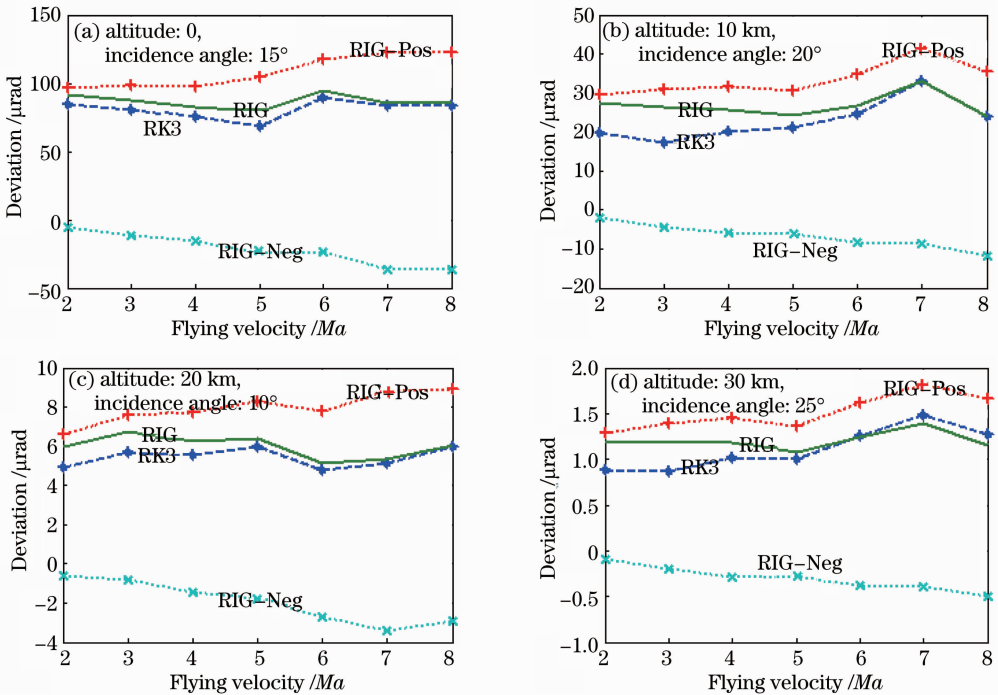


图 3 不同飞行高度下的光线随飞行速度的偏移

Fig. 3 Imaging deviation versus flying velocity at different altitudes

标准差是衡量一个样本数据波动大小的量,标准差越小则波动越小,数据越稳定。而图 3 包含了多个不同高度下的偏移角数据,均值不同;为了便于比较它们变异程度,需要引入变异系数 $f_{cv}^{[21]}$:

$$f_{cv} = \sigma/\mu, \quad (17)$$

式中 σ 为标准差, μ 为均值。变异系数越小,则说明光线偏移角保持的越稳定。表 1 给出了图 3 中不同飞行条件下的相关统计数据。

表 1 不同高度下光线偏折角与飞行速度之间的关系

Table 1 Relation between imaging deviation and flying speed at different altitude

Altitude /km	Incidence angle /($^{\circ}$)	Imaging deviation		
		Mean / μ rad	Standard deviation	Coefficient of variation
0	15	86.637938	5.092975	0.058785
10	20	26.781381	3.024278	0.112925
20	10	5.986483	0.575935	0.096206
30	25	1.231359	0.110527	0.089760

图 4 分别给出了 0、10、20、30 km 4 种不同高度时不同入射角条件下成像偏移与飞行马赫数之间的关系。从图中可以看出,同一高度下光线偏折角并不随着飞行马赫数的增加而增大,而是表现为上下

波动、基本稳定;入射角的变化对成像偏移的影响不明显。图 5 给出了小入射角时不同飞行参数下光线传播路径上折射率梯度 x 方向分量的分布。

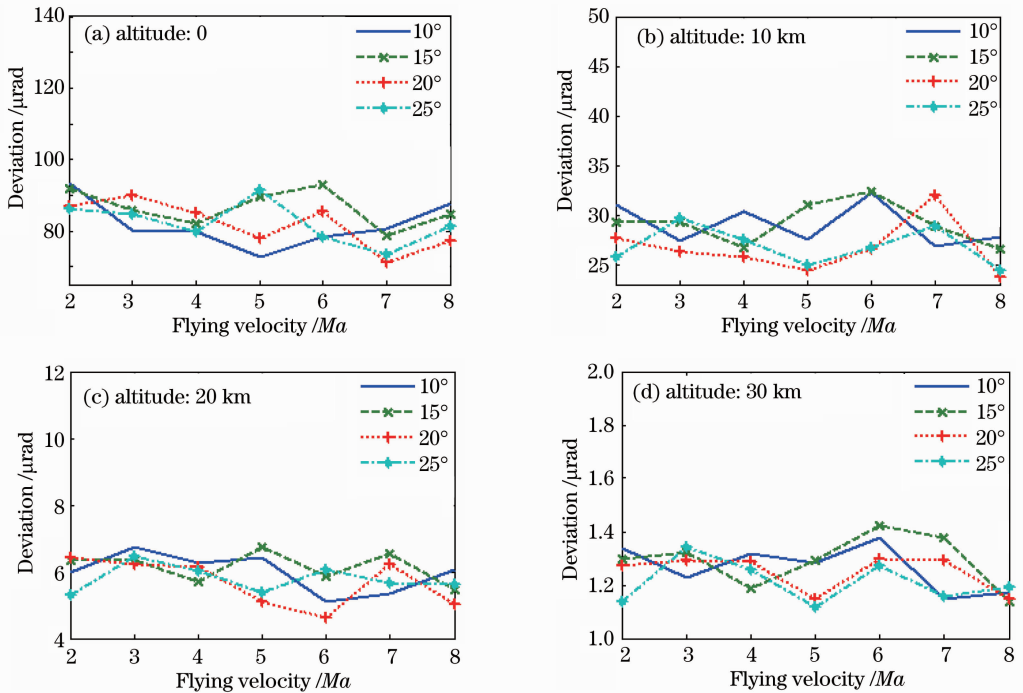


图 4 同一高度下不同入射角和飞行速度时的光线偏移

Fig. 4 Imaging deviation versus incidence angle and flying velocity at the same altitude

4.2 数据分析

从图 3、4 和表 1 中可以看到,当入射角较小时,光线偏折角随着高度的增加而减小;在相同高度下光线偏折角并不是随着飞行速度的增大而增加,而是上下波动、基本保持稳定,入射角对成像偏移的影响不明显。这是因为,在图 3 中随着飞行速度的增加,正折射率梯度和 G'_{x+} 虽然增加,但负折射率梯度和 G'_{x-} 也同样变大(绝对值);根据前面推导的(16)式,光线偏折角是 G'_{x+} 和 G'_{x-} 共同作用的结果, G'_{x-} 的

增加(绝对值)部分抵消了 G'_{x+} 增大引起的光线偏折,使得在小入射角条件下光线的偏折角不随着飞行速度的增大而增加而是基本上保持稳定。

G'_{x+} 对应的折射率梯度是正值(沿 x 轴正方向), G'_{x-} 对应的折射率梯度是负值(沿 x 轴负方向)。正的折射率梯度使得光线沿着 x 轴正方向偏折,而负的折射率梯度使得光线沿着 x 轴负方向偏折,光线通过流场的偏折是这两种正负折射率梯度共同作用的结果。图 5 中正折射率梯度较大的区域对应的是激

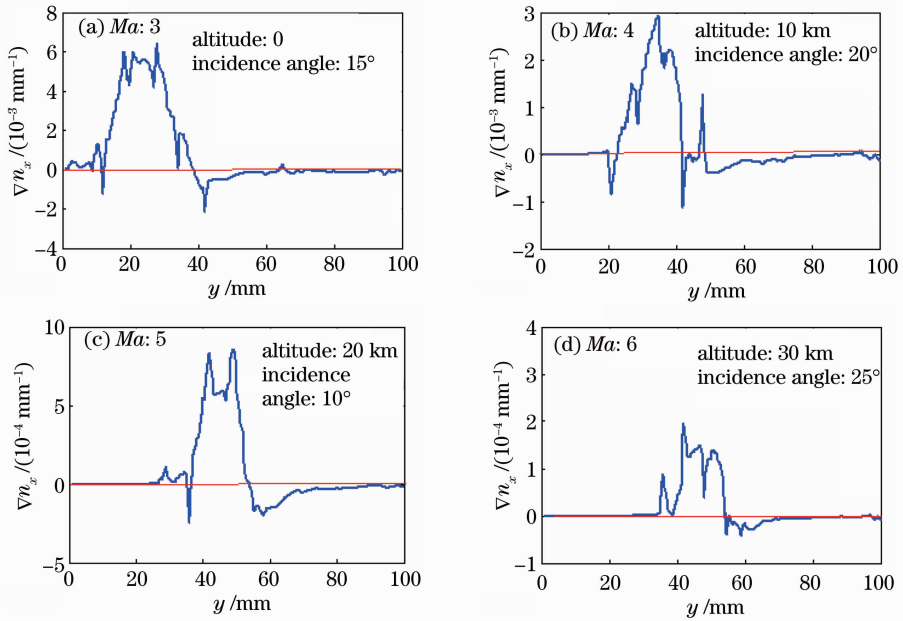


图 5 光线路径上的折射率梯度分布

Fig. 5 Distribution of refractive index gradient ∇n_x along the ray propagation path

波层,而激波层后的梯度是负折射率梯度。虽然激波层后的负折射率梯度可以减小光线偏折,对光线偏折有部分“校正”作用,但它们的绝对值远小于激波层折射率梯度,因此,对光线偏移起决定性作用的仍是激波层。

5 结 论

推导了光线偏折角和流场折射率梯度之间的关系,给出了小入射角情况下,计算离散折射率场光线偏折角的一种新方法,在入射角小于 30° 时,该方法与 RK3 和 Snell 方法具有很好的一致性;在此基础上做了大量仿真实验和数据分析,得出了如下结论:

1) 在同一飞行高度下,小入射角时,光线的偏折角并不随着飞行速度的增加而增加,而是基本保持稳定。

2) 光线通过流场的偏折是正负折射率梯度共同作用的结果,正折射率梯度区域对光线偏折起主要作用,负折射率梯度区域可以减少光线偏折,起到部分“校正”作用。

参 考 文 献

- 1 Yin Xingliang. Principle of Aero-Optics [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2003. 169~186
- 殷兴良. 气动光学原理[M]. 北京:中国宇航出版社, 2003. 169~186
- 2 Li Guichun. Aero-Optics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2006. 9~10

- 李桂春. 气动光学[M]. 北京:国防工业出版社, 2006. 9~10
- 3 R. L. Clark, R. C. Farris. A numerical method to predict aero-optical performance in hypersonic flight[C]. Proceedings of the 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, 1987. AIAA-87-1396
- 4 D. W. Miller. AIT interceptor performance predictions [C]. Proceedings of the 2nd Annual AIAA/SDIO Interceptor Technology Conference, 1993. AIAA-93-2683
- 5 J. J. Gierloff, S. J. Robertson, D. H. Bouska. Computer analysis of aero-optic effects [C]. Proceedings of AIAA SDIO Annual Interceptor Technology Conference, 1992. AIAA-92-2794
- 6 L. Xu, Y. L. Cai. Influence of altitude on aero-optic imaging deviation[J]. *Appl. Opt.*, 2011, **50**(18): 2949~2957
- 7 L. Xu, Y. L. Cai. High altitude aero-optic imaging deviation prediction for a hypersonic flying vehicle[C]. Penang 2011 IEEE International Conference on Imaging Systems and Techniques, 2011. 210~214
- 8 L. Xu, Y. L. Cai. Influence of non-uniform flow fields on imaging deviation of side-window airborne optical systems[C]. Penang: 2011 IEEE International Conference on Imaging Systems and Techniques, 2011: 12~15
- 9 Y. Hsia, W. Lin, H. Loh *et al.*. CFD-based aero-optical performance prediction of a turret [C]. *SPIE*, 2005, **5793**: 143~154
- 10 Xu Dong, Liu Haowei, Wu Lin *et al.*. High order singular value decomposition applied in aero-optical effects analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(12): 3367~3372
- 许 东, 刘浩伟, 吴 琳 等. 高阶奇异值分解在气动光学效应分析中的应用[J]. *光学学报*, 2010, **30**(12): 3367~3372
- 11 Feng Dinghua, Li Hua, Xiao Fei *et al.*. Study on optical transmission effect of optical window's cavity flow [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(4): 1~8
- 冯定华, 李 桦, 肖 飞 等. 光学窗口凹腔流场的光学传输效应研究[J]. *光学学报*, 2012, **32**(4): 1~8
- 12 J. E. Pond, C. T. Welch, G. W. Sutton. Side mounted IR window aero-optical and aerothermal analysis[C]. *SPIE*, 1999.

- 3705: 266~275
- 13 R. Clark, M. Banish, J. Hammer. Fundamentals of aero-optics phenomena [C]. AIAA, Aerospace Ground Testing Conference, 1994. AIAA-94-2545
- 14 Wang Fujun. Computational Fluid Dynamics Analysis—Principle and Application of CFD Software [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 7~10
王福军. 计算流体力学分析—CFD 软件原理与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004. 7~10
- 15 Huang Zhanhua, Cheng Hongfei, Cai Huaiyu *et al.*. A study on universal ray tracing algorithm in the medium of variable refractive index[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(5): 589~592
黄战华, 程红飞, 蔡怀宇等. 变折射率介质中光线追迹通用算法的研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(5): 589~592
- 16 Feng Dinghua, Pan Sha, Wang Wenlong *et al.*. Simulation and analysis of ray tracing in discretionary gradient refraction index medium [J]. *Computer Simulation*, 2010, **27**(2): 135~139
冯定华, 潘沙, 王文龙等. 任意梯度折射率介质中光线追迹的仿真与分析[J]. *计算机仿真*, 2010, **27**(2): 135~139
- 17 Feng Dinghua, Pan Sha, Tian Zhengyu *et al.*. Research on ray tracing method in 3D discrete space with discretionary refraction index[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 696~701
冯定华, 潘沙, 田正雨等. 任意折射率的三维离散空间光线追迹方法研究[J]. *光学学报*, 2010, **30**(3): 696~701
- 18 Wu Lin, Fang Jiancheng, Yang Zhaohua. Study on aero-optical distortion simulation of high refraction index gradient regions in hypersonic turbulent flow [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 2952~2957
吴琳, 房建成, 杨照华. 高超声速湍流场高折射率梯度区域气动光学畸变仿真研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 2952~2957
- 19 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics [M]. 7th ed. Yang Jiasun Transl. . Beijing: Science Press, 2005. 102~112
玻恩, 沃尔夫. 光学原理(第七版)[M]. 杨葭孙译. 北京:科学出版社, 2005. 102~112
- 20 Qian Weichang. Variational Method and Finite Element [M]. Beijing: Science Press, 1980. 19~21
钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京:科学出版社, 1980. 19~21
- 21 Bai Xingui. Data Analysis and Experimental Optimal Design [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1986. 11~14
白新桂. 数据分析与试验优化设计[M]. 北京:清华大学出版社, 1986. 11~14

栏目编辑: 李文喆