

绝对方位问题封闭形式最优估计的快速算法

李 龙¹ 邓宗全¹ 李 兵² 吴 湘¹

(¹ 哈尔滨工业大学机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)
(² 哈尔滨工业大学深圳研究生院, 广东 深圳 518055)

摘要 提出一种快速的绝对方位问题算法,通过最小二乘法构造目标函数,对目标函数中的旋转矩阵和平移向量进行分离,利用矩阵的 Fobenius 范数、行列式以及伴随矩阵等构造旋转矩阵和平移向量封闭形式的最优估计。这种算法具有较高的计算精度和抗噪声性能,并且避免了目前常用算法中的奇异值分解运算,从而提高了计算速度。数学实验结果表明,在计算精度与抗噪声能力上与目前性能最优的 Umeyama 算法相当,同时计算速度较之有大幅提升,尤其适用于对实时性要求较高的领域。

关键词 机器视觉;摄影测量;绝对方位问题;位姿估计

中图分类号 TP391.41 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201232.0115003

Fast and Close-Form Optimal Estimation of Absolute Orientation Problem

Li Long¹ Deng Zongquan¹ Li Bing² Wu Xiang¹

(¹ School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang, 150001, China)
(² Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen, Guangdong 518055, China)

Abstract A fast algorithm to solve the absolute orientation problem is proposed. The algorithm first formulates objective function by least square method. Then it decouples the rotation and translation. Finally it uses the Fobenius norm, determinant and adjoint matrix to formulate the close-form optimal estimation of the rotation and translation. The proposed algorithm has high accuracy and noise-resistance, especially high computation speed because of the absence of singular value decomposition, which is commonly used in current employed algorithms. Results of numerical experiment show that, compared with Umeyama algorithm, one of the best absolute orientation algorithms, the proposed algorithm performs the same level of accuracy and noise-resistance and extremely faster speed, and it is suitable for the areas which require high real-time performance.

Key words machine vision; photogrammetry; absolute orientation problem; pose estimation

OCIS codes 150.0155; 150.1135; 150.5758

1 引 言

绝对方位问题(又称 3D-3D 位姿估计问题)是指已知一组点在空间两个坐标系中的坐标,求两坐标系间转换参数(旋转矩阵和平移向量)的问题,它是摄影测量中的一个基础性问题,广泛的应用在计算机视觉、机器人技术、增强现实(AR)以及航空宇航等领域^[1~10]。

解算绝对方位问题的算法中,最直观的方法是通过两组坐标间的转换关系建立方程组,直接求解方程组得到转换参数。但这种直接法抗噪声能力较差,测量噪声使计算结果存在较大误差;此外当点数在 3 个以上时,方程组中的冗余方程会导致方程组无解。这些问题可以通过最小二乘估计很好地解决,对测量偏差构造最小二乘目标函数,可将绝对方

收稿日期: 2011-07-11; **收到修改稿日期:** 2011-08-12

基金项目: 国家 863 计划(2008AA04Z202)和高等学校学科创新引智计划(B07018)资助课题。

作者简介: 李 龙(1981—),男,博士研究生,主要从事机器视觉和视觉导航等方面的研究。E-mail: lilong@utsz.edu.cn

导师简介: 邓宗全(1956—),男,教授,博士生导师,主要从事宇航空间机构和机器人技术等方面的研究。

E-mail: denzq@hit.edu.cn

位问题转化为受约束的非线性最小二乘问题,并采用经典的非线性优化算法迭代求解,如高斯-牛顿法、Levenberg-Marquardt 法等^[11,12]。但是这是一个优化变量空间为 $n+6$ 维的非线性优化问题,计算量将随着点数的增多急剧增加,计算速度较慢,且收敛性难以保证。为克服这些问题,有学者提出了解析算法以得到封闭解;Horn^[13]和 Walker 等^[14]提出基于四元数的封闭解;Horn 等^[15]和 Arun 等^[16]提出基于奇异值分解(SVD)的封闭解;Umeyama^[17]在 Horn 和 Arun 的算法基础上修正了数据严重恶化时旋转矩阵行列式为-1的问题,具有精度高、抗噪声能力强和计算速度快等优点,广泛的应用在 n 点透视、视觉位姿估计、视觉伺服、增强现实和视觉导航等问题上^[4,8,10,18~20],是目前最流行、性能最优的绝对方位问题解算方法。

但是,Horn 和 Arun 以及 Umeyama 算法都需要进行复杂的奇异值分解运算,虽然计算速度较迭代法有所提高,但已越来越难以满足迅速发展的实时控制、增强现实等高速应用场合的要求。为了进一步提高计算速度,受 Wahba 问题^[21]的启发,本文提出了一种不需要进行奇异值分解运算新算法,可大大提升计算速度。数值试验的结果表明,该算法在计算精度和抗噪声能力上与 Umeyama 算法相当,计算速度明显高于 Umeyama 算法。

2 绝对方位问题封闭形式最优估计的快速算法

2.1 基于最小二乘的目标函数

空间有一组点 $P_i, i = 1, \dots, n$,在坐标系 $OXYZ$ 和 $O'X'Y'Z'$ 中的坐标分别为向量 i_i 和 m_i ,如图1所示。设 A, t 分别为 $OXYZ$ 到 $O'X'Y'Z'$ 的旋转矩阵和平移向量,有如下关系:

$$m_i = Ai_i + t. \quad (1)$$

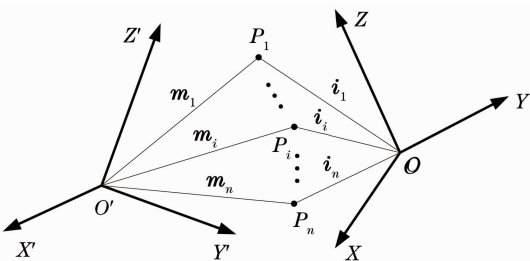


图1 空间中一组点在两个坐标系中的坐标
Fig.1 Coordinates of a set of points in two coordinate systems

考虑到测量噪声的存在,定义偏差如下:

$$e_i = m_i - (Ai_i + t). \quad (2)$$

定义最小二乘意义下的目标函数为

$$L(A, t) = \sum_{i=1}^n \|m_i - (Ai_i + t)\|^2, \quad (3)$$

则令 $L(A, t)$ 最小的 A 和 t 即为旋转矩阵和平移向量的最优估计。

2.2 奇异值分解算法

奇异值分解算法^[15~17]求解过程如下:

定义

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i_i, \quad \bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \quad (4)$$

$$i'_i = i_i - \bar{i}, \quad m'_i = m_i - \bar{m}. \quad (5)$$

将(4),(5)式,代入(3)式中,可得

$$L(A, t) = \sum_{i=1}^n \|m'_i - Ai'_i + (\bar{m} - A\bar{i} - t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|m'_i - Ai'_i\|^2 + n\|\bar{m} - A\bar{i} - t\|^2. \quad (6)$$

显然(6)式中的第二项为零时目标函数 $L(A, t)$ 最小,则平移向量 t 的最优估计 t_{opt} 可由旋转矩阵 A 表示为

$$t_{opt} = \bar{m} - A\bar{i}. \quad (7)$$

定义

$$B = \sum_{i=1}^n m'_i i'^T_i. \quad (8)$$

对矩阵 B 进行奇异值分解:

$$B = U\Sigma V^T, \quad (9)$$

式中 U, V 为正交阵, $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3], \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ 为矩阵 B 的奇异值。由文献[17]可知,令 $\text{tr}(A^T B)$ 最大的 A 为旋转矩阵的最优估计:

$$A_{opt} = U'V'^T, \quad (10)$$

式中 $U' = U \text{diag}[1, 1, \det U], V' = V \text{diag}[1, 1, \det V]$ 。

目标函数最小值为

$$L_{min} = \sum_{i=1}^n \|m'_i\|^2 + \sum_{i=1}^n \|i'_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^3 s_i, \quad (11)$$

式中 $s_1 = \sigma_1, s_2 = \sigma_2, s_3 = (\det U)(\det V)\sigma_3$ 。

(10)式和(7)式即为旋转矩阵和平移向量封闭形式的最优估计。

2.3 封闭形式最优估计的快速算法

奇异值分解算法可以得到封闭形式的解,具有精度高、抗噪声能力强的优点。但奇异值分解运算非常复杂,限制了计算速度。受 Wahba 问题中的 FOAM 算法^[22,23]的启发,本文根据矩阵的奇异值和 Fobenius 范数、行列式、伴随阵等的关系,通过变

换,可以不进行奇异值分解而直接解出最优旋转矩阵,使计算速度大幅提升。

$s_1 s_2 s_3$ 可由矩阵的 Fobenius 范数 $\|\mathbf{B}\|_F$, 行列式 $\det \mathbf{B}$ 以及伴随矩阵 $\text{adj } \mathbf{B}$ 等表示如下:

$$\|\mathbf{B}\|_F^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad (12)$$

$$\det \mathbf{B} = s_1 s_2 s_3, \quad (13)$$

$$\text{adj } \mathbf{B}^T = \mathbf{U}' \text{diag}[s_2 s_3, s_1 s_3, s_1 s_2] \mathbf{V}'^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{U}' \text{diag}[s_1^3, s_2^3, s_3^3] \mathbf{V}'^T. \quad (15)$$

将(12)~(15)式代入(10)式可得

$$\mathbf{A}_{\text{opt}} = [(\kappa + \|\mathbf{B}\|_F^2) \mathbf{B} + \lambda \text{adj } \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{B}] / \xi, \quad (16)$$

式中

$$\lambda = s_1 + s_2 + s_3, \quad (17)$$

$$\kappa = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_1 s_3, \quad (18)$$

$$\xi = (s_1 + s_2)(s_2 + s_3)(s_1 + s_3). \quad (19)$$

通过变换可得

$$\kappa = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \|\mathbf{B}\|_F^2), \quad (20)$$

$$\xi = \kappa \lambda - \det \mathbf{B}. \quad (21)$$

从而,只要求出 λ 即可不通过奇异值分解而求出最优旋转矩阵,由(10)和(17)式知:

$$\lambda - \text{tr}(\mathbf{A}_{\text{opt}}^T \mathbf{B}) = 0. \quad (22)$$

将(16),(20)和(21)式代入(22)式可得

$$0 = (\lambda^2 - \|\mathbf{B}\|_F^2)^2 - 8\lambda \det \mathbf{B} - 4 \|\text{adj } \mathbf{B}\|_F^2. \quad (23)$$

再将(12)~(14)式代入(23)式可得

$$0 = (\lambda - s_1 - s_2 - s_3)(\lambda - s_1 + s_2 + s_3) \times (\lambda + s_1 - s_2 + s_3)(\lambda + s_1 + s_2 - s_3). \quad (24)$$

通过对(24)分析可知方程(23)的根全为实数,所需的 λ 为其最大根。

若 $s_2 + s_3 = 0$, 则最大根为重根,由(19)式知 $\xi = 0$, (16)式无意义;此时由奇异值分解算法得到的(10)式同样处于不确定状态^[15,17],即在此情况下本文算法及奇异值分解算法的旋转矩阵都是不确定的。

将(20),(21)式代入(16)式即可不进行复杂的奇异值分解计算而得到最优旋转矩阵封闭形式的解,从而达到了提升计算速度的目的。

3 数学实验与结果分析

为验证本文提出算法的性能,将其与最为流行的 Umeyama 算法在计算精度,抗噪声性能以及计算速度上进行比较。测试平台硬件环境为 Intel E5500 双核 2.4 GHz 处理器、2 GB 内存的计算机;

操作系统为 Microsoft Windows XP Professional SP3;分别在 Matlab 7.0 和 VC++ 2008(安装 OpenCV 2.1 库,主要用于奇异值分解运算)下编写程序进行测试。

测试数据如下:坐标 i_i 在区间 $[-10, 10] \times [-10, 10] \times [-10, 10]$ 上均匀随机产生;旋转矩阵 \mathbf{A} 通过均匀随机产生三个欧拉角而随机产生;平移向量 \mathbf{t} 在区间 $[-100, 100] \times [-100, 100] \times [-100, 100]$ 上均匀随机产生。坐标 m_i 通过对(1)式加入标准差为 σ 的高斯白噪声而得到 1000 个受污染的点。

实验一:固定 $\sigma = 0.5$, 以 n 为变量,以 5 为步长在 3~28 内变化,计算欧拉角的角度误差。在每个节点随机产生 500 组 i_i, \mathbf{A} 和 \mathbf{t} , 每组用 1000 个受噪声污染的 m_i 进行计算,结果取平均值;本实验用于比较两算法的计算精度。

实验二:固定 $n = 10$, 以 σ 为变量,以 0.5 为步长在 0.5~3 内变化,采用实验一的方法计算欧拉角的角度误差;本实验用于比较两算法的抗噪声性能。

实验三:固定 $\sigma = 0.5$, 以 n 为变量,以 5 为步长在 3~28 内变化,每个节点随机产生 50 组数据;每组数据取一个受污染的 m_i , 重复计算 10^6 次取平均计算时间,每个节点的结果为 50 组数据结果的平均值;本实验用于比较两算法的计算速度。

实验一、二在 Matlab 和 VC++ 环境下运行结果近似,篇幅限制,这里只给出 Matlab 环境下一个欧拉角的运行结果,分别如图 2 和图 3 所示,实验结果表明:本文提出的算法和 Umeyama 算法的计算精度和抗噪声能力相当,点数越多,计算精度越高,抗噪声能力越强。

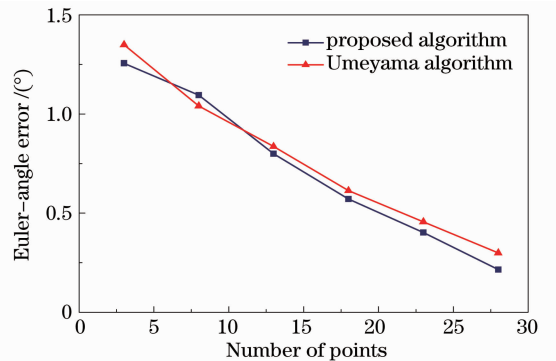


图 2 欧拉角角度误差与点数的关系

Fig. 2 Relation between Euler-angle error and number of points

实验三结果如图 4 所示,实验结果表明:同种算法在 VC++ 环境下计算速度明显高于在 Matlab 环境下;本文提出的算法在 Matlab 环境下计算速度

化计算精度和计算速度。

参 考 文 献

- Xu Yunxi, Jiang Yunliang, Chen Fang. An extended orthogonal iteration algorithm for pose estimation from point and line segment correspondences [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3129~3135
许允喜, 蒋云良, 陈方. 基于点和直线段对应的扩展正交迭代位姿估计算法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3129~3135
- V. Lepetit, F. Moreno-Noguer, P. Fua. EPnP: an accurate O(n) solution to the PnP problem[J]. *Int. J. Comput. Vision*, 2009, **81**(2): 155~166
- Wu Hua, Qin Shiyin. New approach to robot localization in real-time based on visual manifold regularization [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(1): 153~162
吴华, 秦世引. 基于视觉流形正则化的机器人实时定位新方法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(1): 153~162
- A. Ansar, K. Daniilidis. Linear pose estimation from points or lines[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal.*, 2003, **25**(5): 578~589
- Xu Yunxi, Jiang Yunliang, Chen Fang. Generalized orthogonal iterative algorithm for pose estimation of multiple camera systems [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 72~77
许允喜, 蒋云良, 陈方. 多摄像机系统位姿估计的广义正交迭代算法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 72~77
- C. P. Lu, G. D. Hager, E. Mjolsness. Fast and globally convergent pose estimation from video images[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal.*, 2000, **22**(6): 610~622
- Zhu Jigui, Guo Lei, Lin Jiarui *et al.*. Non-intrusive precise measuring method of large complex surface [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(12): 3524~3529
郝继贵, 郭磊, 林佳睿等. 大型空间复杂曲面无干扰精密测量方法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(12): 3524~3529
- S. Q. Li, C. Xu. Efficient lookup table based camera pose estimation for augmented reality [J]. *Comput. Animat. Virt. W.*, 2011, **22**(1): 47~58
- Zhong Hongjun, Yang Mengfei, Lu Xin. Calibration method of star sensor [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(5): 1343~1348
钟红军, 杨孟飞, 卢欣. 星敏感器标定方法研究[J]. *光学学报*, 2010, **30**(5): 1343~1348
- S. J. Zhang, F. H. Liu, X. B. Cao *et al.*. Monocular vision-based two-stage iterative algorithm for relative position and attitude estimation of docking spacecraft [J]. *Chinese J. Aeronautics*, 2010, **23**(2): 204~210
- J. Weng, N. Ahuja, T. S. Huang. Optimal motion and structure estimation [J]. *IEEE Trans. Pattern Anal.*, 1993, **15**(9): 864~884
- Cao Xibin, Zhang Shijie. An iterative method for vision-based relative pose parameters of RVD spacecrafts [J]. *J. Harbin Institute of Technology*, 2005, **37**(8): 691~694
曹喜滨, 张世杰. 航天器交会对接位姿视觉测量迭代算法[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2005, **37**(8): 691~694
- B. K. P. Horn. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternion [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1987, **4**(4): 629~642
- M. W. Walker, L. Shao, R. A. Volz. Estimating 3D location parameters using dual number quaternions [J]. *CVGIP: Image Understanding*, 1991, **54**(3): 358~367
- B. K. P. Horn, H. M. Hilden, S. Negahdaripour. Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1988, **5**(7): 1127~1135
- K. S. Arun, T. S. Huang, S. D. Blostein. Least-squares fitting of two 3D point sets [J]. *IEEE Trans. Pattern Anal.*, 1987, **9**(5): 698~700
- S. Umeyama. Least-squares estimation of transformation

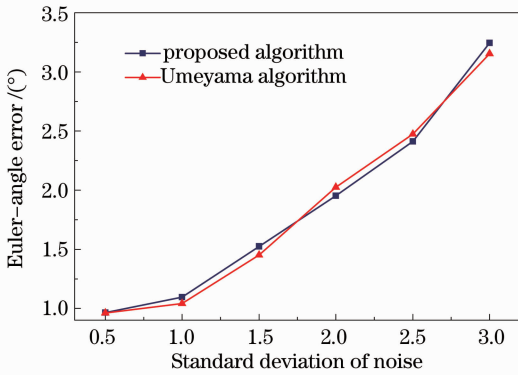


图 3 欧拉角角度误差与噪声标准差的关系
Fig. 3 Relation between Euler-angle error and standard deviation of noise

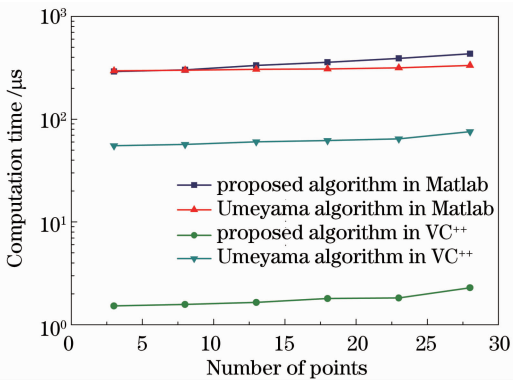


图 4 计算时间与点数的关系

Fig. 4 Relation between computation time and number of points

与 Umeyama 算法相当,这是因为 Umeyama 算法中的奇异值分解运算采用内建函数‘svd’,其执行效率远高于外部代码。在 VC++ 环境下,Umeyama 算法的奇异值分解运算采用 OpenCV2.1 库中的‘cvSVD’函数,在这种情况下,本文所提出的算法计算速度明显高于 Umeyama 算法。由于在 VC++ 环境更接近实际工程应用环境,所以在 VC++ 环境下的比较结果更具实际应用意义。

4 结 论

提出了一种绝对方位问题封闭形式最优估计的快速算法,并根据算法进行了计算精度、抗噪声性能和计算速度的比较实验。实验结果表明该算法具有计算精度高、抗噪声能力强和计算速度快的优点,可以用于替代目前最流行的 Umeyama 算法,尤其适合应用在视觉伺服、视觉导航以及增强现实等对实时性要求较高的领域。此外,该算法的计算精度和抗噪声能力随着点数增加而增加,但计算速度随之降低,下一步工作的重点是研究如何配置点数以优

- parameters between two point patterns[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal.*, 1991, **13**(4): 376~380
- 18 G. Schweighofer, A. Pinz. Robust pose estimation from a planar target [J]. *IEEE Trans. Pattern Anal.*, 2006, **28** (12): 2024~2030
- 19 G. J. Wen, Z. Q. Wang, S. H. Xia *et al.*. Least-squares fitting of multiple M-dimensional point sets[J]. *Visual Computer*, 2006, **22**(6): 387~398
- 20 S. J. Zhang, X. B. Cao, F. Zhang *et al.*. Monocular vision-based iterative pose estimation algorithm from corresponding feature points [J]. *Science China-Information Sciences*, 2010, **53**(8): 1682~1696
- 21 G. Wahba. A least squares estimate of spacecraft attitude[J]. *SIAM Review*, 1965, **7**(3): 409
- 22 F. L. Markley, M. Mortari. Quaternion attitude estimation using vector measurements [J]. *J. Astronaut. Sci.*, 2000, **48**(2-3): 359~380
- 23 F. L. Markley. Attitude determination using vector observations: a fast optimal matrix algorithm[J]. *J. Astronaut. Sci.*, 1993, **41**(2): 261~280

栏目编辑:李文喆